XIII Международная научная конференция "Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании", Саранск, 12-16 июля 2017.
XIII International scientific conference "Differential equations and their applications in mathematical modeling", Saransk, July 12-16, 2017.

УДК 517.9

О некоторых обобщениях жордановых наборов линейных оператор-функций, зависящих от двух малых параметров

П.А. Шаманаев

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва

Аннотация: В статье излагается метод построения обобщённых жордановых сеток и наборов линейных оператор-функций, зависящих от двух малых параметров. Показывается, что когда оператор-функция зависит от одного малого параметра, предлагаемое определение жордановой сетки совпадает с определением обобщённой жордановой цепочки. Вводится понятие полного жорданова набора и исследуются его свойства.

Ключевые слова: линейная оператор-функция, жорданова сетка, полнота жорданова набора.

Основные подходы по использованию обобщённых жордановых цепочек и наборов фредгольмовых операторов в задачах теории ветвления представлены в работе В.А. Треногина [1]. В частности, в этой работе методами А.М. Ляпунова и Э. Шмидта с использованием обобщённых жордановых наборов решена задача о возмущении линейного уравнения малым линейным слагаемым.

В работах [2]- [4] рассмотрены различные вопросы по обобщённых жордановым наборам аналитических операторов-функций, зависящих от одного малого параметра.

Для аналитической оператор-функции, зависящей от многих малых параметров, обобщённые жордановы цепочки были введены в работах [5], [6]. Введённые в этих работах жордановы цепочки были применены для решения задачи о точках бифуркации в случае нескольких параметров [7].

В работе [8] исследована задача о ветвлениях собственных значений в многопараметрической спектральной задаче.

В настоящей работе предлагается метод построения обобщённых жордановых сеток и наборов для линейных оператор-функций, линейно зависящих от двух малых параметров.

Пусть E_1 и E_2 – банаховы пространства. Рассмотрим оператор-функцию

$$B - \varepsilon_1 A_1 - \varepsilon_2 A_2, \tag{1}$$

где B, A_1 и A_2 – плотно заданные замкнутые линейные фредгольмовы операторы, действующие из E_1 в E_2, ε_1, ε_2 – малые вещественные параметры.

Согласно работе [1] обозначим $\mathcal{N}(B) = span\{\varphi_k\}_{k=1}^n$ – подпространство нулей оператора B, E_1^* и E_2^* – пространства, сопряжённые к E_1 и E_2, соответственно, $\mathcal{N}^*(B) = span\{\psi_k\}_{k=1}^n$ – подпространство дефектных функционалов оператора B, $\mathcal{N}^*(B) \subseteq E_2^*$.

Рассмотрим на плоскости множество точек с целочисленными неотрицательными координатами (i, j). Зафиксируем целые числа p_k, $q_k \geq 1$ $(k = \overline{1, n})$ и построим путь из точки с координатами $(0, q_k - 1)$ до точки с координатами $(p_k - 1, 0)$, двигаясь по направлениям, определяемыми векторами $e_1 = colon(1, 0)$ или $e_2 = colon(0, -1)$. Обозначим $G(p_k, q_k) = \{(i_1^*, j_1^*), ..., (i_{p_k+q_k-1}^*, j_{p_k+q_k-1}^*)\}$ – множество точек построенного пути, J_k – множество точек плоскости, ограниченное координатными осями и множеством $G(p_k, q_k)$ включительно, J_k^+ – множество точек, образованное точками с координатами $(i_\sigma^* + 1, j_\mu^*)$,

$(i_\sigma, j^*_\mu + 1)$, $\sigma, \mu = \overline{1, p_k + q_k - 1}$ и не принадлежащими множеству $G(p_k,\, q_k)$. Обозначим $A = \{A_1, A_2\}$.

Определение 1. *Будем говорить, что элемент* $\varphi_k \in \mathcal{N}(\mathcal{B})$, $k = 1, ..., n$, *образует A-жорданову сетку с длинами сторон p_k и q_k и границей $G(p_k,\, q_k)$ (или жорданову сетку оператор-функции $B - \varepsilon_1 A_1 - \varepsilon_2 A_2$), если существуют элементы $\varphi_k^{(i,\,j)}$, удовлетворяющие уравнениям*

$$\begin{aligned} &B\varphi_k^{(i,0)} = A_1\varphi_k^{(i-1,\,0)}, \quad B\varphi_k^{(0,\,j)} = A_2\varphi_k^{(0,\,j-1)}, \quad i = \overline{1, p_k - 1},\ j = \overline{1, q_k - 1}, \\ &B\varphi_k^{(i,\,j)} = A_1\varphi_k^{(i-1,\,j)} + A_2\varphi_k^{(i,\,j-1)}, \quad (i,j) \in J_k,\ i \geq 1, \quad j \geq 1, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\varphi_k^{(0,\,0)} = \varphi_k$, причём не все числа в каждом множестве

$$\begin{aligned} &(A_1\varphi_k^{(p_k-1,\,0)}, \psi_s), \quad s = \overline{1, n}, \\ &(A_1\varphi_k^{(i-1,\,j)} + A_2\varphi_k^{(i,\,j-1)}, \psi_s), \quad s = \overline{1, n}, \\ &(A_2\varphi_k^{(0,\,q_k-1)}, \psi_s), \quad s = \overline{1, n}, \end{aligned} \tag{3}$$

при фиксированных k и $(i,j) \in J_k^+$ равны нулю.

Элемент $\varphi_k^{(i,\,j)}$, $(i,j) \in J_k$ назовём A-присоединённым к φ_k элементом $(i{+}j)$-го порядка. Совокупность нулей φ_k оператора B и всевозможных A-присоединённых к ним элементов назовём A-жордановым набором.

Замечание 1. *Из существования решений уравнений* (2) *следует справедливость равенств*

$$\begin{aligned} &(A_1\varphi_k^{(i-1,\,0)}, \psi_s) = 0, \quad i = \overline{1, p_k - 1}, \\ &(A_2\varphi_k^{(0,\,j-1)}, \psi_s) = 0, \quad j = \overline{1, q_k - 1}, \\ &(A_1\varphi_k^{(i-1,\,j)} + A_2\varphi_k^{(i,\,j-1)}, \psi_s) = 0, \quad (i,j) \in J_k,\ i \geq 1, \quad j \geq 1, \end{aligned} \tag{4}$$

при всех $k, s = \overline{1, n}$.

Замечание 2. *Если для оператор-функции в формуле* (1) *положить ε_2 равным нулю, в качестве A_2 взять нулевой оператор, а вместо множества точек плоскости – множество точек прямой, то определение жордановой сетки совпадёт с определением обобщённой жордановой цепочки в смысле работы [1].*

Определение 2. *A-жорданов набор назовём полным, если*

$$\begin{aligned} &det\left[(A_1\varphi_k^{(p_k-1,\,0)}, \psi_s)\right] \neq 0, \\ &det\left[(A_1\varphi_k^{(i-1,\,j)} + A_2\varphi_k^{(i,\,j-1)}, \psi_s)\right] \neq 0, \quad (i,j) \in J_k^+, \\ &det\left[(A_2\varphi_k^{(0,\,q_k-1)}, \psi_s)\right] \neq 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Лемма 1. *Если A-жорданов набор является полным, то его можно выбрать таким образом, чтобы выполнялись следующие равенства*

$$(A_1\varphi_k^{(p_k-1,0)}, \psi_s) = \delta_{ks}, \tag{6}$$

$$(A_1\varphi_k^{(i-1,\,j)} + A_2\varphi_k^{(i,\,j-1)}, \psi_s) = \delta_{ks}, \quad (i,j) \in J_k^+, \tag{7}$$

$$(A_2\varphi_k^{(0,\,q_k-1)}, \psi_s) = \delta_{ks}, \tag{8}$$

при всех $k, s = \overline{1, n}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для равенств (6) и (8) доказательство совпадает с рассуждениями из работы [1]. Докажем справедливость равенств (7).

Зафиксируем $(i,j) \in J_k^+$ и представим функционалы ψ_1, ψ_2, ..., ψ_n в виде линейных комбинаций

$$\begin{aligned} &\psi_1 = d_{11}\chi_1 + d_{12}\chi_2 + ... + d_{1n}\chi_n, \\ &\psi_2 = d_{21}\chi_1 + d_{22}\chi_2 + ... + d_{2n}\chi_n, \\ &... \\ &\psi_n = d_{n1}\chi_1 + d_{n2}\chi_2 + ... + d_{nn}\chi_n, \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$d_{sk} = (A_1\varphi_k^{(i-1,\,j)} + A_2\varphi_k^{(i,\,j-1)}, \psi_s), \quad k, s = \overline{1,n}. \tag{10}$$

Умножая каждое из равенств (9) на выражения

$$A_1\varphi_k^{(i-1,\,j)} + A_2\varphi_k^{(i,\,j-1)}, \quad k = \overline{1,n},$$

получим

$$\begin{aligned} &(A_1\varphi_k^{(i-1,\,j)} + A_2\varphi_k^{(i,\,j-1)}, \psi_1) = \sum_{s=1}^n d_{1s}(A_1\varphi_k^{(i-1,\,j)} + A_2\varphi_k^{(i,\,j-1)}, \chi_s), \\ &(A_1\varphi_k^{(i-1,\,j)} + A_2\varphi_k^{(i,\,j-1)}, \psi_2) = \sum_{s=1}^n d_{2s}(A_1\varphi_k^{(i-1,\,j)} + A_2\varphi_k^{(i,\,j-1)}, \chi_s), \\ &... \\ &(A_1\varphi_k^{(i-1,\,j)} + A_2\varphi_k^{(i,\,j-1)}, \psi_n) = \sum_{s=1}^n d_{ns}(A_1\varphi_k^{(i-1,\,j)} + A_2\varphi_k^{(i,\,j-1)}, \chi_s), \end{aligned} \tag{11}$$

$k = \overline{1,n}$.

Обозначая

$$h_{sk} = (A_1\varphi_k^{(i-1,\,j)} + A_2\varphi_k^{(i,\,j-1)}, \chi_s), \quad k, s = \overline{1,n}, \tag{12}$$

запишем систему (11) в виде

$$\begin{aligned} &d_{1k} = \sum_{s=1}^n d_{1s}h_{sk}, \\ &d_{2k} = \sum_{s=1}^n d_{2s}h_{sk}, \\ &... \\ &d_{nk} = \sum_{s=1}^n d_{ns}h_{sk}, \end{aligned}$$

$k = \overline{1,n}$, или в матричной форме.

$$D = DH, \tag{13}$$

где $D = [d_{ks}]$, $H = [h_{ks}]$ – $(n \times n)$-матрицы.

С учётом (10), из определения 2 и формул (5) следует, что для матрицы D существует обратная D^{-1}. Тогда из равенства (13) следует, что

$$H = I,$$

где I – единичная матрица размерности n.

Учитывая определения элементов матрицы H согласно формуле (12), получим

$$(A_1\varphi_k^{(i-1,\,j)} + A_2\varphi_k^{(i,\,j-1)}, \chi_s) = \delta_{ks}, \quad k, s = \overline{1,n}. \tag{14}$$

Для завершения доказательства в равенствах (14) достаточно переобозначить элементы χ_s на ψ_s, $s=\overline{1,n}$.

Доказательство завершено.

Пусть B^* – оператор, сопряжённый к оператору B. Тогда согласно [1] оператор B^* является фредгольмовым оператором и $\mathcal{N}^*(B)=\mathcal{N}(B^*)$. Обозначим $A^*=\{A_1^*,A_2^*\}$.

Определение 3. *Будем говорить, что элемент* $\psi_s\in\mathcal{N}(B^*)$, $s=1,...,n$, *образует* A^**-жорданову сетку с длинами сторон* p_s *и* q_s *и границей* $G(p_s,\,q_s)$ *(или жорданову сетку оператор-функции* $B^*-\varepsilon_1A_1^*-\varepsilon_2A_2^*$*), если существуют элементы* $\psi_s^{(l,\,m)}$*, удовлетворяющие уравнениям*

$$B^*\psi_s^{(l,0)}=A_1^*\varphi_s^{(l-1,\,0)},\quad B^*\psi_s^{(0,\,m)}=A_2^*\psi_s^{(0,\,m-1)},\quad l=\overline{1,p_s-1},\ m=\overline{1,q_s-1},$$
$$B^*\psi_s^{(l,\,m)}=A_1^*\psi_s^{(l-1,\,m)}+A_2^*\psi_s^{(l,\,m-1)},\quad (l,m)\in J_s,\ l\geq1,\ m\geq1, \tag{15}$$

где $\psi_s^{(0,\,0)}=\psi_s$*, причём не все числа в каждом множестве*

$$(\varphi_k,A_1^*\psi_s^{(p_s-1,\,0)}),\quad k=\overline{1,n},$$
$$(\varphi_k,A_1^*\psi_s^{(l-1,\,m)}+A_2^*\psi_s^{(l,\,m-1)}),\quad k=\overline{1,n}, \tag{16}$$
$$(\varphi_k,A_2^*\psi_s^{(0,\,q_s-1)}),\quad k=\overline{1,n},$$

при фиксированных s *и* $(l,m)\in J_s^+$ *равны нулю.*

Элемент $\psi_s^{(l,\,m)}$, $(l,m)\in J_s$ *назовём* A^**-присоединённым к* ψ_s *элементом* $(l+m)$*-го порядка. Совокупность нулей* ψ_s *оператора* B^* *и всевозможных* A^**-присоединённых к ним элементов назовём* A^**-жордановым набором.*

Замечание 3. *Из существования решений уравнений* (15) *следует справедливость равенств*

$$(\varphi_k,A_1^*\psi_s^{(l-1,\,0)})=0,\quad l=\overline{1,p_s-1},$$
$$(\varphi_k,A_2^*\psi_s^{(0,\,m-1)})=0,\quad m=\overline{1,q_s-1}, \tag{17}$$
$$(\varphi_k,A_1^*\psi_s^{(l-1,\,m)}+A_2^*\psi_s^{(l,\,m-1)})=0,\quad (l,m)\in J_s,\ l\geq1,\ m\geq1.$$

при всех $k,s=\overline{1,n}$.

Определение 4. A^**-жорданов набор назовём полным, если*

$$det\left[(\varphi_k,A_1^*\psi_s^{(p_s-1,\,0)})\right]\neq0,$$
$$det\left[(\varphi_k,A_1^*\psi_s^{(l-1,\,m)}+A_2^*\psi_s^{(l,\,m-1)})\right]\neq0,\quad (l,m)\in J_s^+, \tag{18}$$
$$det\left[(\varphi_k,A_2^*\psi_s^{(0,\,q_s-1)})\right]\neq0.$$

Лемма 2. *Если* A^**-жорданов набор является полным, то его можно выбрать таким образом, чтобы выполнялись следующие равенства*

$$(\varphi_k,A_1^*\psi_s^{(l-1,\,0)})=\delta_{ks}, \tag{19}$$
$$(\varphi_k,A_1^*\psi_s^{(l-1,\,m)}+A_2^*\psi_s^{(l,\,m-1)})=\delta_{ks},\quad (l,m)\in J_s^+, \tag{20}$$
$$(\varphi_k,A_2^*\psi_s^{(0,\,m-1)})=\delta_{ks}, \tag{21}$$

при всех $k,s=\overline{1,n}$.

Замечание 4. *Изложенный подход построения обобщённых жордановых сеток и наборов для оператор-функций, зависящих от двух малых параметров, позволяет получить решение линейных уравнений с двумя малыми параметрами в виде разложения по элементам предлагаемого обобщённого жорданова набора.*

Замечание 5. *Предлагаемый метод построения обобщённых жордановых наборов в случае двух малых параметров естественным образом переносится на случай многих параметров.*

Литература

1. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: "Наука". 1969. 528 с.

2. Логинов Б.В., Русак Ю.Б. Обобщённая жорданова структура аналитической оператор-функции и её роль в теории ветвления. Редкол. "Известия АН УзССР". Ташкент. 1977. 82 с. Деп. в ВИНИТИ 18.04.1977, № 1782.

3. Loginov B.V., Rusak Yu.B. Generalized Jordan structure in the problem of the stability of bifurcating solutions. Nonlinear analysis, theory, methods and applications. 1991. Vol. 17, N 3. pp. 219-232.

4. Коноплёва И.В., Логинов Б.В., Русак Ю.Б. Симметрия и потенциальность уравнений разветвления в корневых подпространствах в неявно заданных стационарных и динамических бифуркационных задачах. Изв. высших учеб. заведений. Сев.-Кавказ. регион. Естественные науки. 2009. Спецвыпуск. С. 115-124.

5. Логинов Б.В. Вопросы математики. Ташкент. 1971. С. 80-93.

6. Рахимов Д.А. Краевые задачи для дифференциальных уравнений. Ташкент: Фан. 1975. С. 137-143.

7. Русак Ю.Б. Задача о точках бифуркации в случае нескольких параметров. Дифференциальные уравнения. 1981. Т. 17, № 2. С. 383-386.

8. Рахимов Д.А. Решение задач на собственные значения методом регуляризации. Дисс. ... докт. физ.-мат. наук. Ташкент. 2014. 144 с.

MSC 47A13

On some generalizations of Jordan sets of linear operator-functions depending on two small parameters

P.A. Shamanaev

National Research Mordovia State University

Abstract: The article describes the method of construction of generalized Jordan grids and sets of linear operator-functions depending on two small parameters. It is shown that when the operator-function depends on one small parameter, the proposed definition of a Jordan grid coincides with the definition of a generalized Jordan chain. The notion of a complete Jordan set is introduced and its properties are investigated.

Keywords: linear operator-function, Jordan grid, completeness of the Jordan set.

References

1. Vaynberg M. M., Trenogin V. A. Teoriya vetvleniya resheniy nelineynykh uravneniy [The branching theory for solutions of nonlinear equations]. Moscow, Publishing of the "Nauka". 1969. 528 p. (In Russian).

2. Loginov B.V., Rusak Yu.B. Obobshchennaya zhordanova struktura analiticheskoy operator-funktsii i ee rol v teorii vetvleniya [Generalized Jordan structure of an analytic operator-function and its role in the theory of branching]. Redkol. "Izvestiya AN UzSSR". Tashkent. 1977. 82 p. Dep. VINITI 18.04.1977, № 1782. (In Russian).

3. Loginov B.V., Rusak Yu.B. Generalized Jordan structure in the problem of the stability of bifurcating solutions. Nonlinear analysis, theory, methods and applications. 1991. Vol. 17, N 3. pp. 219-232.

4. Konopleva I.V., Loginov B.V., Rusak Yu.B. Simmetriya i potentsial'nost' uravneniy razvetvleniya v kornevykh podprostranstvakh v neyavno zadannykh statsionarnykh i dinamicheskikh bifurkatsionnykh zadachakh [Symmetry and potentiality of branching equations in root subspaces in implicitly defined stationary and dynamic bifurcation problems.]. Izv. vysshikh ucheb. zavedeniy. Sev.-Kavkaz. region. Estestvennye nauki. [Izv. higher education. institutions. Northern Caucasus. region. Natural Sciences.] 2009. Special Issue. pp. 115-124. (In Russian).

5. Loginov B.V. Voprosy matematiki [Questions of Mathematics]. Tashkent. 1971. pp. 80-93. (In Russian).

6. Rakhimov D.A. Kraevye zadachi dlya differentsial'nykh uravneniy [Boundary value problems for differential equations]. Tashkent. Fan. 1975. pp. 137-143. (In Russian).

7. Rusak Yu.B. Zadacha o tochkakh bifurkatsii v sluchae neskolkikh parametrov [The problem of bifurcation points in the case of several parameters]. Differentsialnye uravneniya [Differential equations]. 1981. V. 17, No. 2. pp. 383-386. (In Russian).

8. Rakhimov D.A. Reshenie zadach na sobstvennye znacheniya metodom regulyarizatsii. Diss. dokt. fiz.-mat. nauk. [Solving of eigenvalue problems by the regularization method. Dr. phys. and math. sci. diss.]. Tashkent. 2014. 144 p. (In Russian).