XIII Международная научная конференция "Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании", Саранск, 12-16 июля 2017.
XIII International scientific conference "Differential equations and their applications in mathematical modeling", Saransk, July 12-16, 2017.

УДК 517.977.56

Уравнение типа Риккати в задаче синтеза оптимального управления для дифференциальной системы с распределенными параметрами на графе

В.В. Провоторов

Воронежский государственный университет

Аннотация: Для задачи оптимального распределенного управления параболической системой с распределенными параметрами на графе осуществлен синтез оптимального управления (обратная связь): оптимальное управление определяется через состояние системы. Состояние системы определяется слабым решением начально-краевой задачи для параболического уравнения, управляющее воздействие на систему и наблюдение за ее состоянием осуществляются на всем графе и всем временном промежутке. Получено обобщение результатов Калмана, известных для конечномерного случая, на ограниченные операторы для эволюционных систем с распределенными параметрами на графе. Используемые методы являются основополагающими при исследовании задач оптимального управления динамикой ламинарных течений многофазных сред.

Ключевые слова: параболическая система с распределенными параметрами на графе, слабые решения, задача синтеза оптимального управления

1. Введение. Настоящая работа продолжает исследования, результаты которых приведены в [1, 2], где основополагающим явился спектральный подход, использующий анализ спектральных характеристик соответствующих краевых задач [3]. Ниже представлен другой подход, основанный на априорных оценках слабых решений начально-краевой задачи для уравнений параболического типа с распределенными параметрами на графе [4, 5]. Для задачи оптимального управления параболической системой получены условия существования единственного управляющего воздействия, распределенного на графе. Все рассмотрения используют произвольный связный ограниченный ориентированный граф, допускающий наличие циклов, при этом сохраняются обозначения, принятые в [1, 5].

2. Основные понятия и предложения. Обозначим через $\partial\Gamma$ множество граничных, через $J(\Gamma)$ — множество внутренних узлов графа Γ и пусть Γ_0 — объединение всех ребер, не содержащих концевых точек, $\partial\Re$ — множество всех граничных ребер (ребер, содержащих граничные узлы $\xi \in \partial\Gamma$); $\Gamma_T = \Gamma_0 \times (0,T)$ ($\Gamma_t = \Gamma_0 \times (0,t)$), $\partial\Gamma_T = \partial\Gamma \times (0,T)$. Каждое ребро γ графа Γ параметризуется отрезком $[0,1]$ и параметром $x \in [0,1]$, ориентация ребер установлена в [5, с. 67].

Введем необходимые пространства (см. также [1, 2]: $L_2(\Gamma)$ — пространство функций, суммируемых с квадратом на Γ (аналогично определяется пространство $L_2(\Gamma_T)$); $W_2^1(\Gamma)$ — пространство функций из $L_2(\Gamma)$, имеющих обобщенную производную 1-го порядка также из $L_2(\Gamma)$, норма в $W_2^1(\Gamma)$ определяется скалярным произведением

$$(u,v)_{W_2^1(\Gamma)} = \int\limits_\Gamma \left(u(x)v(x) + \frac{du(x)}{dx}\frac{dv(x)}{dx} \right) dx;$$

$L_{2,1}(\Gamma_T)$ — пространство функций из $L_1(\Gamma_T)$ с нормой

$$\|f\|_{L_{2,1}(\Gamma_T)} = \int\limits_0^T (\int\limits_\Gamma f^2(x,t)dx)^{1/2}dt;$$

$W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ — пространство функций $f(x,t) \in L_2(\Gamma_T)$, имеющих обобщенную производную 1-го порядка по x, принадлежащую $L_2(\Gamma_T)$, норма в $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ определяется соотношением

$$\|f\|^2_{W_2^{1,0}(\Gamma_T)} = \int\limits_{\Gamma_T} \left(f(x,t)^2 + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}^2 \right) dxdt.$$

Пусть далее $V_2(\Gamma_T)$ — множество всех функций $u(x,t) \in W_2^{1,0}(\Gamma_T)$, имеющих конечную норму

$$\|u\|_{2,\Gamma_T} \equiv vrai \max_{0\le t\le T} \|u(x,t)\|_{L_2(\Gamma)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L_2(\Gamma_T)} \tag{1}$$

и непрерывных по t в норме $L_2(\Gamma)$, т. е. таких, что

$$\|u(x,t+\Delta t) - u(x,t)\|_{L_2(\Gamma)} \to 0$$

при $\Delta t \to 0$ равномерно на $[0,T]$.

Рассмотрим билинейную форму

$$\ell(\mu,\nu) = \int\limits_{\Gamma} \left(a(x)\frac{d\mu(x)}{dx}\frac{d\nu(x)}{dx} + b(x)\mu(x)\nu(x) \right) dx,$$

коэффициенты $a(x)$, $b(x)$ — фиксированные измеримые ограниченные на Γ_0 функции, суммируемые с квадратом: $0 < a_* \le a(x) \le a^*$, $b_* \le b(x) \le b^*$, $x \in \Gamma_0$ (a_*, a^*, b_*, b^* — фиксированные постоянные). Из леммы 2 [5, с. 72] следует, что в пространстве $W_2^1(\Gamma)$ есть множество Ω функций $u(x) \in C(\Gamma)$ ($C(\Gamma)$ — пространство непрерывных на Γ функций), удовлетворяющие соотношениям

$$\sum_{\gamma_j \in R(\xi)} a(1)_{\gamma_j} \frac{du(1)_{\gamma_j}}{dx} = \sum_{\gamma_j \in r(\xi)} a(0)_{\gamma_j} \frac{du(0)_{\gamma_j}}{dx}$$

во всех узлах $\xi \in J(\Gamma)$ (здесь $R(\xi)$ — множество ребер, ориентированных «к узлу ξ», $r(\xi)$ — множество ребер ориентированных «от узла ξ»). Замыкание в норме $W_2^1(\Gamma)$ множества функций из Ω, равных нулю во всех узлах $\xi \in \partial\Gamma$, обозначим через $W_{2,0}^1(a,\Gamma)$. Пусть далее $\Omega_0(a,\Gamma_T)$ — множество функций $u(x,t) \in V_2(\Gamma_T)$, чьи следы определены на сечениях области Γ_T плоскостью $t = t_0$ ($t_0 \in [0,T]$) как функции класса $W_{2,0}^1(a,\Gamma)$, т.е. для каждого элемента $u \in \Omega_0(a,\Gamma_T)$ при фиксированном $t \in [0,T]$ существует последовательность $\{u_n\}$ функций $u_n(x,t) \in \Omega$, сходящаяся в норме $W_2^1(\Gamma)$ к следу v, при этом $u_n(x,t)$ равны нулю во всех узлах $\xi \in \partial\Gamma$, непрерывны на Γ и удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{\gamma_j \in R(\xi)} a(1)_{\gamma_j} \frac{\partial u(1,t)_{\gamma_j}}{\partial x} = \sum_{\gamma_j \in r(\xi)} a(0)_{\gamma_j} \frac{\partial u(0,t)_{\gamma_j}}{\partial x} \tag{2}$$

для всех узлов $\xi \in J(\Gamma)$. Замыкание множества $\Omega_0(a,\Gamma_T)$ по норме (1), обозначим через $V_{2,0}^{1,0}(a,\Gamma_T)$: $V_{2,0}^{1,0}(a,\Gamma_T) \subset W_2^{1,0}(\Gamma_T)$. Другим подпространством пространства $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ является пространство $W_{2,0}^{1,0}(a,\Gamma_T)$, являющееся замыканием в норме $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ множества гладких функций, удовлетворяющих соотношениям (2) для всех узлов $\xi \in J(\Gamma)$ и для любого $t \in [0,T]$, а также равных нулю вблизи $\partial\Gamma \times [0,T]$. Отличием элементов пространства $V_{2,0}^{1,0}(a,\Gamma_T)$ от элементов $W_{2,0}^{1,0}(a,\Gamma_T)$ является отсутствие у последних непрерывности по переменной t, соотношение (2) имеет место почти всюду на $(0,T)$. По мере необходимости будут введены другие пространства и их подпространства с интересующими нас свойствами.

Обозначения этого раздела дополним следующими: сужение функции $f(x,t)$ на ребро γ будем обозначать через $f(x,t)_\gamma$; интеграл от функции $f(x,t)$ по области Γ_T понимается как сумма интегралов по областям $\gamma \times (0,T)$ и имеет место представление

$$\int\limits_{\Gamma_T} f(x,t)dxdt = \sum_\gamma \int\limits_{\gamma\times(0,T)} f(x,t)_{\gamma_k} dxdt;$$

на протяжении всего раздела рассматриваются измеримые функции и используется интеграл Лебега.

Приведем два простых утверждения, связывающие пространства $W^1_{2,0}(a,\Gamma_T)$, $L_2(\Gamma_T) \in$ и $L_{2,1}(\Gamma_T)$.

Лемма 1. *Пространство* $W^1_{2,0}(a,\Gamma_T)$ *плотно в* $L_2(\Gamma_T)$.

Доказательство вытекает из самого определения пространства $W^1_{2,0}(a,\Gamma_T)$ (см. раздел 2).

Лемма 2. *Имеет место включение* $L_2(\Gamma_T) \subset L_{2,1}(\Gamma_T)$.

Доказательство. Пусть f является элементом пространства $L_{2,1}(\Gamma_T)$. Оценим норму $\|f\|_{L_{2,1}(\Gamma_T)}$, используя неравенство Коши-Буняковского:

$$\|f\|_{L_{2,1}(\Gamma_T)} = \int\limits_0^T \left(\int\limits_\Gamma f^2(x,t)dx\right)^{1/2} dt \le \sqrt{T}\sqrt{\int\limits_0^T\int\limits_\Gamma f^2(x,t)dxdt} = \sqrt{T}\|f\|_{L_2(\Gamma_T)}.$$

Из полученного неравенства $\|f\|_{L_{2,1}(\Gamma_T)} \le \sqrt{T}\|f\|_{L_2(\Gamma_T)}$ вытекает утверждение леммы.

Таким образом, имеют место включения $W^1_{2,0}(a,\Gamma_T) \subset L_2(\Gamma_T) \subset L_{2,1}(\Gamma_T)$, по аналогии с [5, стр. 75] можно показать, что пространство $W^1_{2,0}(a,\Gamma_T)$ плотно в $L_2(\Gamma_T)$.

Далее рассматривается эволюционная задача с распределенными параметрами на графе и ей соответствующие задачи оптимального управления в пространствах $V^{1,0}_{2,0}(a,\Gamma_T)$ и $W^1_{2,0}(a,\Gamma_T)$. При этом в качестве пространства управлений $\mathbb{U}$ используется $L_2(\Gamma_T)$.

3. Задача оптимального управления параболической системой в пространстве $V^{1,0}_{2,0}(a,\Gamma_T)$. Рассмотрим начально-краевую задачу отыскания решения $y(x,t)$ в области $\overline{\Gamma}_T$, удовлетворяющего условиям (2) во всех внутренних узлах графа Γ:

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right) + b(x)y(x,t) = f(x,t) \tag{3}$$

$$y\mid_{t=0} = \varphi(x), \quad x\in\Gamma, \tag{4}$$

$$y\mid_{\partial\Gamma} = 0, \quad 0\le t\le T. \tag{5}$$

Предположения относительно функций $a(x)$, $b(x)$ остаются теми же, что и в разделе 1; $f(x,t)\in L_{2,1}(\Gamma_T)$, $\varphi(x)\in L_2(\Gamma)$.

Определение. Слабым решением класса $W^{1,0}_2(\Gamma_T)$ краевой задачи (3)–(5) называется функция $y(x,t)\in V^{1,0}_{2,0}(a,\Gamma_T)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\begin{gathered}\int\limits_\Gamma y(x,t)\eta(x,t)dx + \int\limits_{\Gamma_t}\left(-y(x,t)\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial t}\right)dxdt + \ell_t(y(x,t),\eta(x,t)) = \\ = \int\limits_\Gamma \varphi(x)\eta(x,0)dx + \int\limits_{\Gamma_t} f(x,t)\eta(x,t)dxdt\end{gathered} \tag{6}$$

для любых $t\in[0,T]$ и при любой $\eta(x,t)\in W^1_{2,0}(a,\Gamma_T)$; $\ell_t(y,\eta)$ — билинейная форма, определенная соотношением

$$\ell_t(\mu(x,t),\nu(x,t)) = \int\limits_{\Gamma_t}\left(a(x)\frac{\partial\mu(x,t)}{\partial x}\frac{\partial\nu(x,t)}{\partial x} + b(x)\mu(x,t)\nu(x,t)\right)dxdt.$$

Теорема 1 [1]. *Задача* (3)–(5) *однозначно разрешима в пространстве* $V_{2,0}^{1,0}(a,\Gamma_T)$*, слабое решение непрерывно зависит от исходных данных* $f(x,t)$*,* $\varphi(x)$*.*

Задача оптимального управления. Пусть $B : \mathbb{U} \to L_2(\Gamma_T)$ — линейный непрерывный оператор (в силу леммы 2 $Bv \in L_{2,1}(\Gamma_T), \forall v \in \mathbb{U}$) и пусть f и φ — заданные элементы пространств $L_{2,1}(\Gamma_T)$ и $L_2(\Gamma)$, соответственно; $y(v)(x,t) \in V_{2,0}^{1,0}(a,\Gamma_T)$ (*состояние системы* (3)–(5)) — слабое решение задачи (3)–(5) с правой частью в уравнении (3), равной $f + Bv$ ($v(x,t) \in \mathbb{U}$). Соотношение (6) трансформируется к виду:

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Gamma} y(x,t)\eta(x,t)dx + \int\limits_{\Gamma_t}\left(-y(x,t)\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial t}\right)dxdt + \ell_t(y(x,t),\eta(x,t)) = \\ = \int\limits_{\Gamma}\varphi(x)\eta(x,0)dx + \int\limits_{\Gamma_t} f(x,t)\eta(x,t)dxdt + \int\limits_{\Gamma_t} Bv(x,t)\eta(x,t)dxdt\end{gathered} \tag{7}$$

для любых $t \in [0,T]$ и при любой $\eta(x,t) \in W_{2,0}^{1}(a,\Gamma_T)$.

Пусть $C : V_{2,0}^{1,0}(a,\Gamma_T) \to L_2(\Gamma_T)$ — линейный непрерывный оператор (*оператор наблюдения*); $N : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ — линейный непрерывный эрмитов оператор, $(Nv,v)_{\mathbb{U}} \geq \varsigma\|v\|_{\mathbb{U}}$ ($\varsigma > 0$ — фиксированная постоянная); $J(v)$ — функционал, требующий минимизации на выпуклом замкнутом множестве $\mathbb{U}_\partial \subset \mathbb{U}$ (*функция стоимости*):

$$J(v) = \|Cy - z_0\|^2_{L_2(\Gamma_T)} + (Nv,v)_{\mathbb{U}};$$

где $z_0(x,t)$ — заданное наблюдение.

Заменим в правой части (3) f на $f+Bv$ ($v \in \mathbb{U}$), прямым следствием теоремы 1 является следующее утверждение:

Теорема 2. *Задача* (3)–(5) (*для* $f+Bv$*,* $v \in \mathbb{U}$) *однозначно слабо разрешима в* $V_{2,0}^{1,0}(a,\Gamma_T)$ *и имеет место непрерывность линейного отображения* $v \to y(v)$ *пространства* $\mathbb{U}$ *в* $V_{2,0}^{1,0}(a,\Gamma_T)$*.*

Задача оптимального управления системой (3)–(5) (*для* $f + Bv$*,* $v \in \mathbb{U}$) *состоит в том, чтобы отыскать* $\inf\limits_{v\in\mathbb{U}_\partial} J(v)$*.*

Теорема 3. *Задача оптимального управления системой* (3)–(5) (*для* $f+Bv$*,* $v(x,t) \in \mathbb{U}$) *имеет единственное решение* $v^* \in \mathbb{U}_\partial$*, т.е.*

$$J(v^*) = \inf_{v\in\mathbb{U}_\partial} J(v).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу утверждения теоремы 2 линейное отображение $v \to y(v)$ пространства управлений $\mathbb{U}$ в пространство состояний $V_{2,0}^{1,0}(a,\Gamma_T)$ непрерывно. Функционал $J(v)$ определяется с помощью двух операторов: 1) оператора $v \to y(v)$ перехода от управления v к состоянию $y(v)$, 2) оператора $y(v) \to Cy(v)$ перехода от состояния к наблюдению.

Преобразуем функционал $J(v)$ к следующему виду:

$$J(v) = \|C(y(v) - y(0)) + Cy(0) - z\|^2_{L_2(\Gamma_T)} + (Nv,v)_{\mathbb{U}} =$$

$$= \pi(v,v) - 2\ell(\nu) + \|Cy(0) - z\|^2_{L_2(\Gamma_T)},$$

где

$$\pi(u,v) = (C(y(u) - y(0)), C(y(v) - y(0)))_{L_2(\Gamma_T)} + (Nu,v)_{\mathbb{U}},$$

$$\ell(v) = (z - Cy(0), C(y(v) - y(0)))_{L_2(\Gamma_T)}.$$

Доказательство завершается применением утверждения теоремы 1.1 [6, с. 13], при этом учитывается очевидное неравенство $\|Cy(0) - z\|^2_{L_2(\Gamma_T)} \geq 0$.

Соотношения, определяющие оптимальное управление. Дальнейшие рассуждения напрямую используют идеи работы [1]. Предварительно докажем следующее вспомогательное утверждение:

Лемма 3. *Для любых $v, u \in \mathbb{U}_\partial$ имеет место соотношение*

$$y'(u)(v-u) = y(v) - y(u) \tag{8}$$

(здесь $y'(u)$ — производная по управлению и функции состояния $y(u)$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из соотношения (7) для произвольных фиксированных $v, u \in \mathbb{U}_\partial$ вытекает

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Gamma} \left(y(v)(x,t) - y(u)(x,t)\right)\eta(x,t)dx + \int\limits_{\Gamma_t} \left(-\left(y(v)(x,t) - y(u)(x,t)\right)\tfrac{\partial\eta(x,t)}{\partial t}\right)dxdt + \\ +\ell_t(\left(y(v)(x,t) - y(u)(x,t)\right), \eta(x,t)) = \int\limits_{\Gamma_t} B\left(v(x,t) - u(x,t)\right)\eta(x,t)dxdt\end{gathered} \tag{9}$$

для любых $t \in [0,T]$ и при любой $\eta(x,t) \in W^1_{2,0}(a, \Gamma_T)$. С другой стороны, соотношение (7) дает

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Gamma} \left(y(u+\theta(v-u))(x,t) - y(v)(x,t)\right)\eta(x,t)dx + \\ + \int\limits_{\Gamma_t} \left(-\left(y(u+\theta(v-u))(x,t) - y(v)(x,t)\right)\tfrac{\partial\eta_t(x,t)}{\partial t}\right)dxdt + \\ +\ell_t(\left(y(u+\theta(v-u))(x,t) - y(v)(x,t)\right), \eta(x,t)) = \theta\int\limits_{\Gamma_t} B\left(v(x,t) - u(x,t)\right)\eta(x,t)dxdt\end{gathered}$$

для любых $t \in [0,T]$ и при любой $\eta(x,t) \in W^1_{2,0}(a, \Gamma_T)$. Деля обе части полученного соотношения на θ и вычисляя предел при $\theta \to 0$, приходим к соотношению

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Gamma} y'(u)(x,t)\left(v(x,t) - u(x,t)\right)\eta(x,t)dx + \\ + \int\limits_{\Gamma_t} \left(-y'(u)(x,t)\left(v(x,t) - u(x,t)\right)\tfrac{\partial\eta(x,t)}{\partial t}\right)dxdt + \\ +\ell_t(y'(u)(x,t)\left(v(x,t) - u(x,t)\right), \eta(x,t)) = \int\limits_{\Gamma_t} B\left(v(x,t) - u(x,t)\right)\eta(x,t)dxdt,\end{gathered} \tag{10}$$

для любых $t \in [0,T]$ и при любой $\eta(x,t) \in W^1_{2,0}(a, \Gamma_T)$.

Сравнивая левые части соотношений (9) и (10), учитывая принадлежность $y'(u)(x,t)$ пространству $W^1_{2,0}(a, \Gamma_T)$, плотность $W^1_{2,0}(a, \Gamma_T)$ в пространстве $L_2(\Gamma_T)$ (лемма 1), а также произвольность $t \in [0,T]$ и $\eta(x,t) \in W^1_{2,0}(a, \Gamma_T)$, получаем соотношение (8). Лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть множество $\mathbb{U}_\partial$ ограничено. Для того чтобы элемент $u(x,t) \in \mathbb{U}_\partial$ был оптимальным управлением, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись следующие соотношения*

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Gamma} y(u)(x,t)\eta(x,t)dx + \int\limits_{\Gamma_t} \left(-y(u)(x,t)\tfrac{\partial\eta_t(x,t)}{\partial t}\right)dxdt + \\ +\ell_t(y(u)(x,t), \eta(x,t)) = \int\limits_{\Gamma} \varphi(x)\eta(x,0)dx + \int\limits_{\Gamma_t} f(x,t)\eta(x,t)dxdt + \\ + \int\limits_{\Gamma_t} Bu(x,t)\eta(x,t)dxdt \quad (\forall t \in [0,T],\ \forall\eta(x,t) \in W^1_{2,0}(a, \Gamma_T)),\end{gathered} \tag{11}$$

$$\int\limits_{\Gamma_T} (Cy(u) - z_0)C(y(v) - y(u))dxdt + (Nu, v-u)_{\mathbb{U}} \geq 0 \quad (\forall v \in \mathbb{U}_\partial), \tag{12}$$

где $y(u) \in V^{1,0}_{2,0}(a, \Gamma_T)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В соответствии с утверждением теоремы 1.3 [6, с. 18] требуется показать, что неравенство (12) равнозначно неравенству $J'(u)(\nu-u) \geq 0$ для любого $\nu \in \mathbb{U}_\partial$. Исходя из представления функционала $J(v)$, получим

$$J(u+\theta(v-u)) - J(u) = (Cy(u+\theta(v-u)) - z_0, Cy(u+\theta(v-u)) - z_0)_{L_2(\Gamma_T)}+$$
$$+(N(u+\theta(v-u)), u+\theta(v-u))_{\mathbb{U}} - -(Cy(u) - z_0, Cy(u) - z_0)_{L_2(\Gamma_T)} - (Nu, u)_{\mathbb{U}},$$

откуда вытекает

$$J(u+\theta(v-u)) - J(u) = (Cy(u+\theta(v-u)) + Cy(u), C(y(u+\theta(v-u)) - y(u)))_{L_2(\Gamma_T)}-$$
$$-2(z_0, C(y(u+\theta(v-u)) - y(u)))_{L_2(\Gamma_T)} - 2(Nu, v-u)_{\mathbb{U}}.$$

Деля последнее соотношение на θ, переходя к пределу при $\theta \to 0$ и учитывая соотношение (8) утверждения леммы, получаем

$$J'(u)(\nu - u) = 2(Cy(u) - z_0, C(y(u) - y(v)))_{L_2(\Gamma_T)} - 2(Nu, v-u)_{\mathbb{U}},$$

что и доказывает неравенство (12); соотношение (11) очевидно. Теорема доказана.

Неравенство (12) можно преобразовать с помощью сопряженного состояния системы (3)–(5), учитывая симметричность формы $\ell_t(\mu,\eta)$ ($t \in [0,T]$). Сделаем это для случая $C: L_2(\Gamma_T) \to L_2(\Gamma_T)$, тогда неравенство (12) можно переписать в виде

$$(C^*(Cy(u) - z_0), y(v) - y(u))_{L_2(\Gamma_T)} + (Nu, v-u)_{\mathbb{U}} \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{U}_\partial \tag{13}$$

(здесь $C^*: L_2(\Gamma_T) \to L_2(\Gamma_T)$ — сопряженный к C оператор).

Обозначим через $\ell_T(\mu,\nu)$ билинейную форму $\ell_t(\mu,\nu)$ при $t = T$. Для управления v сопряженное состояние $\omega(v) \in W^1_{2,0}(a,\Gamma_T)$, $\omega(v)(x,T) = 0$ (сопряженное состояние $\omega(v)$ определено в пространстве, отличном от $V^{1,0}_{2,0}(a,\Gamma_T)$, где определяется состояние $y(v)$), определим соотношением

$$\begin{gathered}-\int\limits_{\Gamma_T} \tfrac{\partial\omega(v)(x,t)}{\partial t}\zeta(x,t)dxdt + \ell_T(\omega(v)(x,t), \zeta(x,t)) = \\ = \int\limits_{\Gamma_T} C^*(C\omega(v)(x,t) - z_0(x,t))\zeta(x,t)dxdt \quad (\forall \zeta(x,t) \in W^{1,0}_{2,0}(a,\Gamma_T)).\end{gathered} \tag{14}$$

Пусть $y(v)(x,t)$ — решение (7), $y(u)(x,t)$ — решение (7) при $v = u$. Положим в (14) $v = u$ и $\zeta(x,t) = y(v)(x,t) - y(u)(x,t)$ (последнее возможно, т.к. $V^{1,0}_{2,0}(a,\Gamma_T) \subset W^{1,0}_{2,0}(a,\Gamma_T)$), получим, учитывая $\zeta(x,0) = 0$,

$$\begin{gathered}-\int\limits_{\Gamma_T} \tfrac{\partial\omega(u)(x,t)}{\partial t}(y(v)(x,t) - y(u)(x,t))dxdt + \ell_T(\omega(u)(x,t), y(v)(x,t) - y(u)(x,t)) = \\ = \int\limits_{\Gamma_T} C^*(C\omega(u)(x,t) - z_0(x,t))(y(v)(x,t) - y(u)(x,t))dxdt.\end{gathered} \tag{15}$$

С другой стороны из соотношения (11) при $t = T$ и $\eta(x,t) = \omega(u)(x,t)$ ($\omega(u)(x,T) = 0$) вытекает соотношение

$$\begin{gathered}-\int\limits_{\Gamma_T} \tfrac{\partial\omega(u)(x,t)}{\partial t}\left(y(v)(x,t) - y(u)(x,t)\right)dxdt+ \\ +\ell_T(y(v)(x,t) - y(u)(x,t), \omega(u)(x,t)) = \int\limits_{\Gamma_T} B\left(v(x,t) - u(x,t)\right)\omega(u)(x,t)dxdt.\end{gathered} \tag{16}$$

Пусть $B^* : L_2(\Gamma_T) \to \mathbb{U}'$ — оператор, сопряженный к B, причем $\mathbb{U}' = L_2(\Gamma_T)$ в силу сделанного выше предположения $\mathbb{U} = L_2(\Gamma_T)$. Т.к. $\omega(u)(x,t) \in W^1_{2,0}(a,\Gamma_T) \subset L_2(\Gamma_T)$, $B^*\omega(u)(x,t) \in L_2(\Gamma_T)$, то

$$\int\limits_{\Gamma_T} B\left(v(x,t) - u(x,t)\right)\omega(u)(x,t)dxdt = \int\limits_{\Gamma_T} B^*\omega(u)(x,t)\left(v(x,t) - u(x,t)\right)dxdt.$$

Отсюда, сравнивая в (15), (16) стоящие справа выражения и учитывая симметричность формы $\ell_T(y,\eta)$, приходим к равенству

$$\int\limits_{\Gamma_T} C^*(C\omega(u)(x,t) - z_0(x,t))(y(v)(x,t) - y(u)(x,t))dxdt = \int\limits_{\Gamma_T} B^*\omega(u)(x,t)\left(v(x,t) - u(x,t)\right)dxdt,$$

из которого вместе с (13) вытекает неравенство

$$\int\limits_{\Gamma_T} \left(B^*\omega(u)(x,t) + Nu(x,t)\right)\left(v(x,t) - u(x,t)\right)dxdt \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{U}_\partial, \tag{17}$$

эквивалентное неравенству (13). Остаются справедливыми утверждения теоремы 4, где соотношение (12) заменено на соотношение (14) при $\omega(v) \in W^1_{2,0}(a,\Gamma_T)$, $\omega(v)(x,T) = 0$ и неравенство (17). Таким образом, имеет место

Теорема 5. *Пусть множество $\mathbb{U}_\partial$ ограничено. Для того чтобы элемент $u \in \mathbb{U}_\partial$ был оптимальным управлением, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись следующие соотношения*

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Gamma} y(v)(x,t)\eta(x,t)dx + \int\limits_{\Gamma_t}\left(-y(v)(x,t)\frac{\partial\eta_t(x,t)}{\partial t}\right)dxdt + \ell_t(y(v),\eta) = \\ = \int\limits_{\Gamma}\varphi(x)\eta(x,0)dx + \int\limits_{\Gamma_t} f(x,t)\eta(x,t)dxdt + \int\limits_{\Gamma_t} Bv(x,t)\eta(x,t)dxdt \\ (\forall t \in [0,T],\ \forall\eta(x,t) \in W^1_{2,0}(a,\Gamma_T)),\end{gathered} \tag{18}$$

$$\begin{gathered}-\int\limits_{\Gamma_T}\frac{\partial\omega(v)(x,t)}{\partial t}\zeta(x,t)dxdt + \ell_T(\omega(v),\zeta) = \int\limits_{\Gamma_T} C^*(Cy(v)(x,t) - z_0(x,t))\zeta(x,t)dxdt \\ (\forall\zeta(x,t) \in W^{1,0}_{2,0}(a,\Gamma_T)),\end{gathered} \tag{19}$$

$$\int\limits_{\Gamma_T} \left(B^*\omega(u)(x,t) + Nu(x,t)\right)\left(v(x,t) - u(x,t)\right)dxdt \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{U}_\partial, \tag{20}$$

где $y(u) \in V^{1,0}_{2,0}(a,\Gamma_T)$, $\omega(u) \in W^1_0(a,\Gamma_T)$, $\omega(u)(0,T) = 0$.

4. Синтез оптимального управления, уравнение Риккати. Остановимся в дальнейших рассуждениях на случае, когда $\mathbb{U}_\partial$ совпадает с $\mathbb{U}$ (на управление не наложено никаких ограничений), оператор N отличен от нулевого. Тогда неравенство (20) превращается в равенство, а значит, оптимальное управление $u(x,t)$ удовлетворяет соотношению

$$B^*\omega(u)(x,t) + Nu(x,t) = 0.$$

Исключая отсюда $u(x,t)$ и положив в (18), (19) $A_1 = BN^{-1}B^*$, $A_2 = C^*C$, $g = -C^*z_0$, приходим к выводу, что оптимальное управление определяется из решения системы интегральных тождеств относительно $\{y,\omega\}$:

$$\begin{gathered}(y(x,t),\eta(x,t)+\int\limits_0^t(-y(x,\tau),\tfrac{\partial\eta(x,\tau)}{\partial\tau})dt+\ell(y,\eta)=\\=(y_0(x),\eta(x,t))+\int\limits_0^t(A_1\omega(x,\tau),\eta(x,\tau)d\tau+\int\limits_0^t(f(x,\tau)\eta(x,\tau)d\tau\\(\forall t\in[0,T],\ \forall\eta(x,t)\in W^1_{2,0}(a,\Gamma_T)),\\-\int\limits_{\Gamma_T}\tfrac{\partial\omega(x,t)}{\partial t}\zeta(x,t)dxdt+\ell_T(\omega,\zeta)=\int\limits_{\Gamma_T}A_2y(x,t)\zeta(x,t)dxdt+\int\limits_{\Gamma_T}g(x,t)\zeta(x,t)dxdt,\\(\forall\zeta(x,t)\in W^{1,0}_{2,0}(a,\Gamma_T)),\\y(x,0)=y_0(x),\ \omega(x,T)=0,\end{gathered}\tag{21}$$

где $y\in V_0^{1,0}(a,\Gamma_T)$, $\omega\in W_0^1(a,\Gamma_T)$, $y_0(x)\in L_2(\Gamma)$, и имеет вид

$$u(x,t)=-N^{-1}B^*\omega(x,t)\tag{22}$$

Для дальнейшего анализа системы (21) в области $\Gamma_{s,T}=\Gamma_T\times[s,T]$, $s\in(0,T)$ рассмотрим систему

$$\begin{gathered}(\widetilde{y}(x,t),\eta(x,t)+\int\limits_s^t(-\widetilde{y}(x,\tau),\tfrac{\partial\eta(x,\tau)}{\partial\tau})dt+\ell(\widetilde{y},\eta)=\\=(h(x),\eta(x,s))+\int\limits_s^t(A_1\widetilde{\omega}(x,\tau),\eta(x,\tau)d\tau+\int\limits_s^t(f(x,\tau)\eta(x,\tau)d\tau\\(\forall t\in[0,T],\ \forall\eta(x,t)\in W^1_{2,0}(a,\Gamma_T)),\\-\int\limits_{\Gamma_T}\tfrac{\partial\widetilde{\omega}(x,t)}{\partial t}\zeta(x,t)dxdt+\ell_T(\widetilde{\omega},\zeta)=\int\limits_{\Gamma_T}A_2\widetilde{y}(x,t)\zeta(x,t)dxdt+\int\limits_{\Gamma_T}g(x,t)\zeta(x,t)dxdt\\(\forall\zeta(x,t)\in W^{1,0}_{2,0}(a,\Gamma_T)),\end{gathered}\tag{23}$$

относительно $\{\widetilde{y},\widetilde{\omega}\}$; здесь $\widetilde{y}\in V_0^{1,0}(a,\Gamma_{s,T})$, $\widetilde{\omega}\in W_0^1(a,\Gamma_{s,T})$, $h(x)\in L_2(\Gamma)$, $\widetilde{y}(x,s)=h(x)$, $\widetilde{\omega}(x,T)=0$.

Предварительно докажем следующее утверждение.

Лемма 4. *Система* (23), *где* $h(x)$ *– данный элемент пространства* $L_2(\Gamma)$, *имеет единственное решение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Соотношения (23) можно рассматривать как задачу оптимального управления для системы, состояние $\widetilde{y}(v)$ которой определяется слабым решением $\widetilde{y}(v)(x,t)$ в пространстве $V_0^{1,0}(a,\Gamma_{s,T})$ начально-краевой задачи

$$\begin{gathered}\frac{\partial\widetilde{y}(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial\widetilde{y}(x,t)}{\partial x}\right)+b(x)\widetilde{y}(x,t)=f(x,t)+Bv(x,t),\\\widetilde{y}\mid_{t=s}=h(x),\quad\widetilde{y}\mid_{\partial\Gamma}=0.\end{gathered}\tag{24}$$

Функционал $J_s^h(v)$ при этом имеет вид

$$J_s^h(v)=\int\limits_s^T\|C\widetilde{y}_m(v)(\cdot,t)-z_0(\cdot,t)\|^2_{L_2(\Gamma)}dt+\int\limits_s^T(Nv,v)_{L_2(\Gamma)}dt,\tag{25}$$

где $v\in\mathbb{U}_s=L_2(\Gamma_{s,T})$.

Действительно, сопряженное состояние $\widetilde{\omega}(v)$ определяется слабым решением $\widetilde{\omega}(v)(x,t)$ в пространстве $W_0^1(a,\Gamma_{s,T})$ начально-краевой задачи

$$\frac{\partial\widetilde{\omega}(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial\widetilde{\omega}(x,t)}{\partial x}\right)+b(x)\widetilde{\omega}(x,t)=C^*(C\widetilde{y}(v)-z_0),$$
$$\widetilde{\omega}\mid_{t=T}=0,\quad \widetilde{\omega}\mid_{\partial\Gamma}=0.$$

Управление u является оптимальным тогда и только тогда, когда $B^*\widetilde{\omega}+Nu=0$. Исключая отсюда u, получаем соотношения (23). Лемма доказана.

Лемма 5. *Отображение* $h\to\{\widetilde{y},\widetilde{\omega}\}$ ($\{\widetilde{y},\widetilde{\omega}\}$ *– слабое решение задачи* (23)) *является непрерывным отображением* $L_2(\Gamma)\to V_0^{1,0}(a,\Gamma_{s,T})\times W_0^1(a,\Gamma_{s,T})$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно показать непрерывность линейной части отображения $h\to\{\widetilde{y},\widetilde{\omega}\}$, т.е. рассмотреть случай однородной задачи (23) ($f=g=0$). Пусть $\widetilde{y}_n(v)$ – состояние системы, определяемое как слабое решение начально-краевой задачи (24) при $\widetilde{y}(v)=h_n$. Для фиксированного управления v при $h_n\to h$ получаем $\widetilde{y}_n(v)\to\widetilde{y}(v)$ в $V_0^{1,0}(a,\Gamma_{s,T})$ (теорема 1 о непрерывности слабого решения задачи (3)–(5) по исходным данным). Обозначим через u_n (соответственно u) — оптимальное управление, отвечающее функционалу $J_s^{hn}(v)$ (соответственно $J_s^h(v)$). Тогда

$$J_s^{hn}(u_n)=\inf_{v\in\mathbb{U}_s}J_s^{hn}(v)\le J_s^h(u)$$

и $J_s^{hn}(u)\to J_s^h(u)$ в силу (25) ($v=u$). Следовательно,

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\,J_s^{hn}(u_n)\le J_s^h(u)=\inf_{v\in\mathbb{U}_s}J_s^h(v). \tag{26}$$

Но $J_s^{hn}(u)\ge\varsigma\int_s^T\|u_n\|_E^2dt$ и это вместе с соотношением (26) означает, что последовательность $\{u_n\}$ при $h_n\to h$ ограничена в $\mathbb{U}_s$. Таким образом, существует подпоследовательность $\{u_{n_k}\}$, слабо сходящаяся к ϱ в $\mathbb{U}_s$. Тогда $\widetilde{y}_{n_k}(u_{n_k})\to\widetilde{y}(\varrho)$ слабо сходится в $V_0^{1,0}(a,\Gamma_{s,T})$ и потому $\underline{\lim}_{k\to\infty}J_s^{hn_k}(u_{n_k})\ge J_s^h(\varrho)$, что вместе с (26) дает $J_s^h(\varrho)\le J_s^h(u)$. Значит, $\varrho=u$ и имеет место

1) $u_n\to u$ слабо в $\mathbb{U}_s$,
2) $\widetilde{y}_n(u_n)\to\widetilde{y}(u)$ слабо в $V_0^{1,0}(a,\Gamma_{s,T})$,
3) $\widetilde{\omega}_n(u_n)\to\widetilde{\omega}(u)$ слабо в $W_0^1(a,\Gamma_{s,T})$.

Отсюда вытекает непрерывность линейной части отображения $h\to\{\widetilde{y},\widetilde{\omega}\}$ пространства $L_2(\Gamma)$ в $V_0^{1,0}(a,\Gamma_{s,T})\times W_0^1(a,\Gamma_{s,T})$.

Лемма 6. *В условиях леммы 5 отображение* $h\to\widetilde{\omega}(\cdot,s)$ *является непрерывным отображением* $L_2(\Gamma)\to L_2(\Gamma)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отображение $h\to\widetilde{\omega}(\cdot,s)$ являет собой композицию отображений $h\to\{\widetilde{y},\widetilde{\omega}\}$ и $\{\widetilde{y},\widetilde{\omega}\}\to\widetilde{\omega}(\cdot,s)$. Непрерывность отображения $\{\widetilde{y},\widetilde{\omega}\}\to\widetilde{\omega}(\cdot,s)$ вытекает из свойств элементов пространств $V_0^{1,0}(a,\Gamma_{s,T})$ и $W_0^1(a,\Gamma_{s,T})$ по переменной t.

Лемма 7. *Отображение* $h\to\widetilde{\omega}(\cdot,s)$ *единственным образом представляется в виде*

$$\widetilde{\omega}(x,s)=P(s)h+r(x,s), \tag{27}$$

где $P(s):L_2(\Gamma)\to L_2(\Gamma)$ *– линейный непрерывный оператор,* $r(x,s)$ *– элемент* $L_2(\Gamma)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение леммы является прямым следствием утверждений лемм 5 и 6.

Теорема 6. *Пусть* $\{y,\omega\}$ *– решение системы* (21). *Тогда*

$$\omega(x,t)=P(t)y(x,t)+r(x,t),\quad \forall t\in(0,T), \tag{28}$$

где оператор $P(t)$ определяется из соотношения $P(s)h = \widetilde{\omega}$ по решению однородной задачи (21) ($f = g = 0$), *а функция $r(x,t)$ определяется из соотношения $r(x,s) = \widetilde{\omega}(x,s)$ по решению неоднородной задачи* (21).

Доказательство. Рассмотрим задачу (23) при $h = y(x,s)$. Через y_s и ω_s обозначим сужения на интервал (s,T) функций y и ω, соответственно. Функции y_s, ω_s удовлетворяют системе (23), тогда $\widetilde{y} = y_s$, $\widetilde{\omega} = \omega_s$ на (s,T) и значит, $\widetilde{\omega}(x,s) = \omega_s(x,s) = \omega(x,s)$. Отсюда и из (27) следует $\omega(x,s) = P(s)y(x,s) + r(x,s)$, а из произвольности s следует (28). Теорема доказана.

Решение системы (21) вместе с тождеством (28) определяют соотношения

$$\mathbb{F}P = F, \;\; \mathbb{G}r = G \tag{29}$$

(нелинейные операторы $\mathbb{F}, \mathbb{G}$ и правые части F, G определяются аналогично [6, с.149]) для получения оператора $P(t)$ и функции $r(x,t)$. Первое соотношение (29) назовем эволюционным нелинейным уравнением типа Риккати по аналогии с [6, с.149].

Заключение. Оператор $P(t)$ и функция $r(x,t)$ оптимальное управление позволяют осуществить синтез оптимального управления (обратную связь): оптимальное управление $u(x,t)$ в силу (29) определяется через состояние $y(x,t)$ системы (3)–(5) с правой частью, равной $f + Bv$, по формуле

$$u(x,t) = -N^{-1}B^*[P(t)y(x,t) + r(x,t)].$$

Тем самым получено развитие классических результатов Калмана для конечномерного случая на ограниченные операторы для эволюционных систем с распределенными параметрами на графе. При этом следует отметить аналогичные подходы при анализе устойчивости и стабилизации решений в задачах управления прикладного характера [7–10].

Литература

1. Провоторов В. В. Оптимальное управление параболической системой с распределенными параметрами на графе // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2014. Вып. 3. С. 154-163.

2. Подвальный С. Л., Провоторов В. В. Стартовое управление параболической системой с распределенными параметрами на графе // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. Вып. 3. С. 126-142.

3. Волкова А. С., Провоторов В. В. Обобщенные решения и обобщенные собственные функции краевых задач на геометрическом графе // Известия высших учебных заведений. Математика. 2014. № 3. С. 3-18.

4. Provotorov V. V. “Boundary control of a parabolic system with distributed parameters on a graph in the class of summable functions” // Automation and Remote Control. 2015. Vol. 76. No. 2. 318-322.

5. Провоторов В. В., Волкова А. С. Начально-краевые задачи с распределенными параметрами на графе. Воронеж: Научная книга, 2014. 188 с.

6. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными (J.-L. Lions Controle optimal de sistemes gouvernes par des eqations aux derivees partielles) / пер. с фр. Н. Х. Розова; под ред. Р. В. Гамкрелидзе. М.: Мир, 1972. 414 с.

7. Александров А. Ю., Жабко А. П. Об асимптотической устойчивости решений нелинейных систем с запаздыванием // Сибирский математический журнал. 2012. Т. 53, № 3. С. 495-508.

8. Веремей Е. И., Сотникова М. В. Стабилизация плазмы на базе прогноза с устойчивым линейным приближением // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2011. Вып. 1. С. 116-133.

9. Карелин В. В. Штрафные функции в задаче управления процессом наблюдения // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2010. Вып. 4. С. 109-114.

10. Kamachkin A. M., Yevstafyeva V. V. Oscillations in a relay control system at an external disturbance // Control Applications of Optimization 2000: Proceedings of the 11th IFAC Workshop. 2000. Vol. 2. P. 459-462.

MSC 70G05

The Riccati-type equation in the optimal control synthesis problem for a differential system with distributed parameters on the graph

V.V. Provotorov

Voronezh State University

Abstract: There is synthesis with distributed parameters perfomed on the graf (inverse relationship) for solving the problem of optimal distributed control of parabolic system with distributed parameters: the optimal control is determined through the state of the system. The state of the system is determined by the weak solution of the initial-boundary value problem for the parabolic equation, the control effect on the system and the observation of its state are performed throughout the graph and the entire time interval. Generalization of the Kalman results, known for the finite-demensional case, was obtained on bounded operators for evolution systems with distributed parameters showing on the graph. The used methods are fundamental for the study of optimal control problems in the dynamics of laminar flows of multiphase media.

Keywords: parabolic system with distributed parameters on the graph, weak solutions, optimal control synthesis problem

References

1. Provotorov V. V. Optimal'noe upravlenie parabolicheskoi sistemoi s raspredelennymi parametrami na grafe [Optimal control of parabolic systems with distributed parameters on the graph] // Vestnik Sankt-Petersburgskogo Universiteta. Seriya 10. Prikladnaya mathematica. Informatika. Processi upravleniya [Vestnik of Saint Petersburg State University. Series 10. Applied mathematics. Computer science. Control processes]. 2014. V. 3. P. 154-163.

2. Podvalny S. L., Provotorov V. V. Startovoe upravlenie parabolicheskoi sistemoi s raspredelennymi parametrami na grafe [Start control of parabolic systems with distributed parameters on the graph] // Vestnik Sankt-Petersburgskogo Universiteta. Seriya 10. Prikladnaya mathematica. Informatika. Processi upravleniya [Vestnik of Saint Petersburg State University. Series 10. Applied mathematics. Computer science. Control processes]. 2015. V. 3, P. 126-142/

3. Volkova A. S., Provotorov V. V. Obobshonnie reshenija i obobshonnie sobstvennie funkcii kraevih zadach na geometricheskom grafe [Generalized solutions and generalized eigenfunctions of the boundary value problems on a geometric graph] // Izvestiya vysshih uchebnih zavedenij. Mathematika [IIzv. vyssh. ucheb. zavedenij. Mathematica]. 2014. No. 3. P. 3-18.

4. Provotorov V. V. Boundary control of a parabolic system with distributed parameters on a graph in the class of summable functions. Automation and Remote Control. 2015. V. 76, No. 2. P. 318-322.

5. Provotorov V. V., Volkova A. S. Nachal'no-kraevie zadachi s raspredelennimi parametrami na grafe [Initial-boundary value problems with distributed parameters on the graph]. Voronezh: Nauchnaya kniga, 2014. 188 p.

6. Lions J.-L. *Controle optimal de sistemes gouvernes par des eqations aux derivees partielles* [*Optimum control of the systems described by the equations with private derivative*]. Paris, Dunod Gauthier-Villars, 1968, 402 p. (Rus. end: Lions J.-L. Optimal'noe upravlenie sistemami, opisyvaemymi uravnenijami s chastnymi proizvodnymi. Moscow: Mir, 1972. 414 p.).

7. Aleksandrov A. Yu., Zhabko A. P. Ob asimptoticheskoi ustoichivosti reshenii nelineinyh sistem s zapazdyvaniem [On asymptotic stability of solutions of nonlinear systems with delay] // Sibirskii Mathematicheskii Journal [Siberian Mathematical Journal]. 2012. V. 53. No. 3, P. 495-508.

8. Veremey E. I., Sotnikova M. V. Stabilizacija plazmy na baze prognoza s ustojchivym linejnym priblizheniem [Plasma stabilization on the basis of the forecast with steady linear approach] // Vestnik Sankt-Petersburgskogo Universiteta. Seriya 10. Prikladnaya mathematica. Informatika. Processi upravleniya [Vestnik of Saint Petersburg State University. Series 10. Applied mathematics. Computer science. Control processes]. 2011. V. 1. P. 116–133.

9. Karelin V. V. Shtrafnye funkcii v zadache upravlenija processom nabljudenija [Penal functions in a problem of management of supervision process)] // Vestnik Sankt-Petersburgskogo Universiteta. Seriya 10. Prikladnaya mathematica. Informatika. Processi upravleniya [Vestnik of Saint Petersburg State University. Series 10. Applied mathematics. Computer science. Control processes]. 2010. V. 4. P. 109–114.

10. Kamachkin A. M., Yevstafyeva V. V. Oscillations in a relay control system at an external disturbance. Control Applications of Optimization 2000: Proceedings of the 11th IFAC Workshop. 2000. V. 2. P. 459-462.