XIII Международная научная конференция "Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании", Саранск, 12-16 июля 2017.
XIII International scientific conference "Differential equations and their applications in mathematical modeling", Saransk, July 12-16, 2017.

УДК 517.9

Асимптотическая эквивалентность разностных схем для решения задачи Коши

С.М. Мурюмин [1], О.С. Язовцева [1]

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва[1]

Аннотация: В статье представлены определения асимптотической эквивалентности разностных схем для решения задачи Коши. Также показано наличие эквивалентности при использовании метода регуляризации для получения абсолютно устойчивой разностной схемы. Приведены примеры эквивалентных и неэквивалентных разностных схем для задач Коши, приведено численное решение задачи Коши с использованием параметра регуляризации.

Ключевые слова: задача Коши, асимптотическая эквивалентность, разностная схема, метод регуляризации.

Пусть Θ – множество дифференциальных уравнений вида

$$\frac{df}{dt} = f(t, x), \tag{1}$$

где $f \in C([T, +\infty) \times R^n, R^n)$. Допустим $x(t : t_0, x_0)$ – решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным данным (t_0, x_0). Предположим, на множестве Θ определены группа и полугруппа преобразований с единицей (G_1, Θ) и (G_2, Θ) соответственно. Тогда они индуцируют отношения эквивалентности ρ_1 и ρ_0 на множестве Θ.

Пусть отношение ρ_1 равносильно следующему требованию: для эквивалентных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f_1(t, x) \tag{2}$$

и

$$\frac{dy}{dt} = f_2(t, y), \tag{3}$$

при $\forall t \geq T_1 \geq T$ существует биекция $P : R^n \to R^n$, показывающая что

$$x(t : t_0, x_0) = y(t : t_0, Py_0) + o(\mu(t)), \tag{4}$$

$$y(t : t_0, y_0) = x(t : t_0, P^{-1}x_0) + o(\mu(t)), \tag{5}$$

при $t \to +\infty$ для всех решений $x(t : t_0, x_0)$ и $y(t : t_0, y_0)$, определенных при всех $t \geq t_0$; $\mu : [T, +\infty) \to [0, +\infty)$ – фиксированная функция для всего множества Θ.

В этом случае отношения эквивалентности ρ_1 назовем эквивалентностью Левинсона относительно функции μ, а уравнения (2) и (3) – асимптотически эквивалентными по Левинсону относительно функции μ.

Если дополнительно P – гомеоморфизм, то ρ_1 – эквивалентность Немыцкого относительно функции μ, уравнения (2) и (3) здесь асимптотически эквивалентны по Немыцкому относительно функции μ.

Допустим, отношение эквивалентности ρ_0 равносильно требованию: для эквивалентных уравнений (2) и (3) при $\forall t_0 \geq T_1 \geq T$ существуют два отображения $P_1 : R^n \to R^n$ и $P_2 : R^n \to R^n$, показывающие что

$$x(t : t_0, x_0) = y(t : t_0, P_2 y_0) + o(\mu(t)), \tag{6}$$

$$y(t:t_0,y_0) = x(t:t_0,P_1x_0) + o(\mu(t)), \tag{7}$$

при $t \to +\infty$ для всех решений $x(t:t_0,x_0)$ и $y(t:t_0,y_0)$, определенных при всех $t \geq t_0$; $\mu : [T,+\infty) \to [0,+\infty)$ – фиксированная функция для всего множества Θ.

В этом случае отношения эквивалентности ρ_0 назовем эквивалентностью Брауера относительно функции μ, а уравнения (2) и (3) – асимптотически эквивалентными по Брауеру относительно функции μ.

Определение асимптотической эквивалентности разностных схем.[4]

Рассмотрим разностные схемы

$$L_1^h u^h = f_1(h), \tag{8}$$

$$L_2^h u^h = f_2(h), \tag{9}$$

на сетке $D_h = \{ih, i = 0,1,2,...,N; h = 1/N\}$.

Будем говорить, что разностные схемы (8) и (9) асимптотически эквивалентны относительно шага h, если существует $P : R^n \to R^n$ отображение такое, что для начальных условий u_0 и v_0 и выполняются соотношения

$$u^{(h)}(u_0) = v^{(h)}(Pv_0) + O(h^k), \tag{10}$$

$$v^{(h)}(v_0) = u^{(h)}(P^{-1}u_0) + O(h^k), \tag{11}$$

где $k \geq 1$. Причем, если P – линейное отображение, то разностные схемы эквивалентны по Ляпунову, если P – биекция, то по Левинсону.

Если существуют отображения P_1 и P_2 такие, что

$$u^{(h)}(u_0) = v^{(h)}(P_2v_0) + O(h^k), \tag{12}$$

$$v^{(h)}(v_0) = u^{(h)}(P_1u_0) + O(h^k), \tag{13}$$

то будем говорить об асимптотической эквивалентности по Брауеру.

Условия (10) - (13) выполнены в узлах x_i, где $s \leq i, S \geq 0$.

Из этих определений следует, что из сходимости одной из разностных схем вытекает сходимость асимптотически эквивалентной схемы, причем порядок аппроксимации будет определяться $min\{k_1,k_2,k\}$, где k_1,k_2 – порядки аппроксимации соответствующих разностных схем (8) и (9).

Определим условие асимптотической эквивалентности для канонических разностных схем

$$y_{n+1} = R_h^{(1)}y_n + h\rho_n^{(1)} \tag{14}$$

и

$$z_{n+1} = R_h^{(2)}z_n + h\rho_n^{(2)}, \tag{15}$$

где y_0 и z_0 – заданы.

Пусть выполнены условия

$$||\rho_n^{(1)} - \rho_n^{(2)}|| \leq Ch^k,$$

$$z_0 = P_1y_0, \quad y_0 = P_2z_0.$$

Тогда при условии согласования норм, условие асимптотической эквивалентности

$$||R_h^{(1)^n} - R_h^{(2)^n}P_2|| \leq Ch^l, \tag{16}$$

$$||R_h^{(1)^n}P_1 - R_h^{(2)^n}|| \leq Ch^l, \tag{17}$$

где $l \geq 1$.

Определение асимптотической эквивалентности разностных краевых задач

$$L_1^{(h)}u^h = f_1^{(h)}, \quad u_0 = \varphi_1, \quad u_n = \psi_1, \tag{18}$$

$$L_2^{(h)}u^h = f_2^{(h)}, \quad v_0 = \varphi_2, \quad v_n = \psi_2, \tag{19}$$

на сетке $D_h = \{ih, i = 0, 1, 2, ..., N; h = 1/N\}$.

Пусть существуют $P, Q : R^n \to R^n$ такие, что

$$u^{(h)}(u_0, u_n) = v^{(h)}(Pv_0, Qv_n) + O(h^k), \tag{20}$$

$$v^{(h)}(v_0, v_n) = u^{(h)}(Pu_0, Qu_n) + O(h^k), \tag{21}$$

эквивалентность по Ляпунову, Левинсону и Брауеру вводится аналогично (10)-(13). Эти условия выполняются в узлах x_i, где $S_1 \leq i \leq N - S_2$, где $S_1, S_2 \geq 0$.

Из определений следует, что из сходимости разностной краевой задачи следует сходимость асимптотически эквивалентной разностной задачи при выполнении условий гладкости коэффициентов. [4] Коэффициентная устойчивость следует из асимптотической эквивалентности соответствующих разностных краевых задач. [2]

Рассмотрим задачу Коши

$$y' = Ay, \tag{22}$$

где y_0 – задано.

Данную задачу Коши мы можем решить как одношаговым, так и многошаговым методами. Соответственно, при применении разных методов, мы получаем различные разностные схемы. Наша задача состоит в том, чтобы проверить полученные разностные схемы на асимптотическую эквивалентность. Для проверки используем формулу (16).

Проверим на асимптотическую эквивалентность разностную схему, полученную при решении задачи одношаговым методом (а точнее методом Эйлера), и схему, полученную при решении данной задачи многошаговым методом:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = Ay_n \quad \Rightarrow \quad y_{n+1} = (1 + Ah)y_n, \tag{23}$$

$$\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} = Ay_n \quad \Rightarrow \quad y_{n+1} = 2hAy_n + y_{n-1} \tag{24}$$

или

$$\begin{pmatrix} y_{n+1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + Ah & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_n \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_{n+1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2Ah & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_n \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

Пусть $P = E$:

$$\left\| \begin{pmatrix} (1 + Ah)^n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (4A^2h^2)^n & (2Ah)^n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} (1 + Ah)^n - (4A^2h^2)^n & -(2Ah)^n \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\| \approx$$

$$\approx 1 + nAh \tag{25}$$

Из (25) видно, что схемы неэквивалентны.

Проверим на эквивалентность схему, полученную в результате применения метода Эйлера к (22), и схему, полученную в результате применения метода Рунге-Кутта.

Пусть $P = E$:

$$\left\|(1+Ah)^n - ((1+Ah) + \tfrac{(Ah)^2}{2})^n\right\| = \tag{26}$$

$$= \left\|(1+Ah)^n - (1+Ah)^n - C_n^1(1+Ah)^{n-1}\tfrac{(Ah)^2}{2} - \dots + \tfrac{(Ah)^{2n}}{2^n}\right\| \le Ch. \tag{27}$$

Из (26) видно, что данные схемы асимптотически эквивалентны.

Аналогично можно проверить схемы Рунге-Кутта второго и четвертого порядка точности, они так же будут являться эквивалентными.

Рассмотрим идею регуляризации на примере задачи Коши, имеющий вид:

$$y' = Ay, \tag{28}$$

где y_0 – задано.

Запишем для нее простейшую явную разностную схему:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = Ay_n \quad \Rightarrow \quad y_{n+1} = (1+Ah)y_n, \tag{29}$$

Хорошо известно, что эта схема устойчива при достаточно малых шагах. Принцип регуляризации используется для того, чтобы на основе явной схемы (29) построить абсолютно устойчивые разностные схемы. Регуляризация основана на переходе от исходной разностной схемы к некоторой другой (возмущенной) схеме. Схему с параметром регуляризации для (29) запишем в виде:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = Ay_n + \alpha y_n \quad \Rightarrow \quad y_{n+1} = (1+(A+\alpha)h)y_n, \tag{30}$$

где α – параметр регуляризации (возмущения).

Теперь проверим на асимптотическую эквивалентность разностную схему, полученную в результате применения параметра регуляризации, относительно схемы, полученной в результате применения метода Эйлера:

$$\begin{aligned}
& ||(1+Ah)^n - (1+Ah+\alpha h)^n|| \le ||(1+Ah-1-\alpha h)((1+Ah)^{n-1}) + \\
+ \quad & (1+Ah)^{n-2}(1+Ah+\alpha h) + \dots + (1+Ah+\alpha h)^{n-1}|| = \\
= \quad & ||\alpha h((1+Ah)^{n-1} + (1+Ah)^{n-2}(1+Ah+\alpha h) + \\
+ \quad & (1+Ah)^{n-3}(1+Ah+\alpha h)^2 + \dots + (1+Ah)^{n-k}(1+Ah+\alpha h)^k + \\
+ \quad & (1+Ah+\alpha h)^{n-1})|| = \{h = \frac{1}{n}\} = ||\alpha((1+Ah)^{n-1} + \alpha((1+Ah)^{n-2}\frac{(n-1)(n-2)}{2!n^2} + \\
+ \quad & \dots + \alpha^k((1+Ah)^{n-k}\frac{(n-1)...(n-k)}{k!n^k} + \dots + \\
+ \quad & \alpha^{n-1}n(1+Ah)^0)|| \le ||\alpha(1+Ah)^{n-1}(1+\alpha+\alpha^2+\dots+\alpha^{n-1})|| \le \\
\le \quad & \alpha max_{1\le k\le n-1}(1+Ah)^k(1+\alpha+\alpha^2+\dots+\alpha^{n-1}) \le \\
\le \quad & \alpha max_{1\le k\le n-1}(1+Ah)^k\frac{1}{1-\alpha} \le \frac{1}{1-\alpha}e^{|A|}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$||(1+Ah)^n - (1+Ah+\alpha h)^n|| \le \frac{1}{1-\alpha}e^{|A|} \to 0,$$

при $n \to 0, h \to 0$.

Мы видим, что от выбора параметра регуляризации зависит, будет ли схема асимптотически эквивалентна или нет.

Если

$$||\alpha|| \le h^k, \quad k > 0,$$

то соответствующая разностная схема будет являться асимптотически эквивалентной, в противном случае – нет.

Для численной реализации представленной методики была решена следующая задача. Решить дифференциальное уравнение

$$y' = y(1-x)$$

на отрезке $[0;1]$ с начальным условием $y(0) = 1$ и шагом $h = 0,1$ методом регуляризации. Параметр регуляризации равен $\alpha = 1$;$\alpha = h^{1/2}$;$\alpha = h$;$\alpha = h^{3/2}$;$\alpha = h^2$. Найти точное решение дифференциального уравнения.

Начнем с того, что получим (для последующего сопоставления результатов) аналитическое решение уравнения $y' = y(1-x)$.

При заданных начальных условиях это решение выглядит так:

$$y = e^{(x - \frac{1}{2}x^2)}.$$

Пользуясь этой формулой можно получить таблицу «точного» решения заданного уравнения.

Решение данной задачи с различными значениями регуляризатора выглядит так:

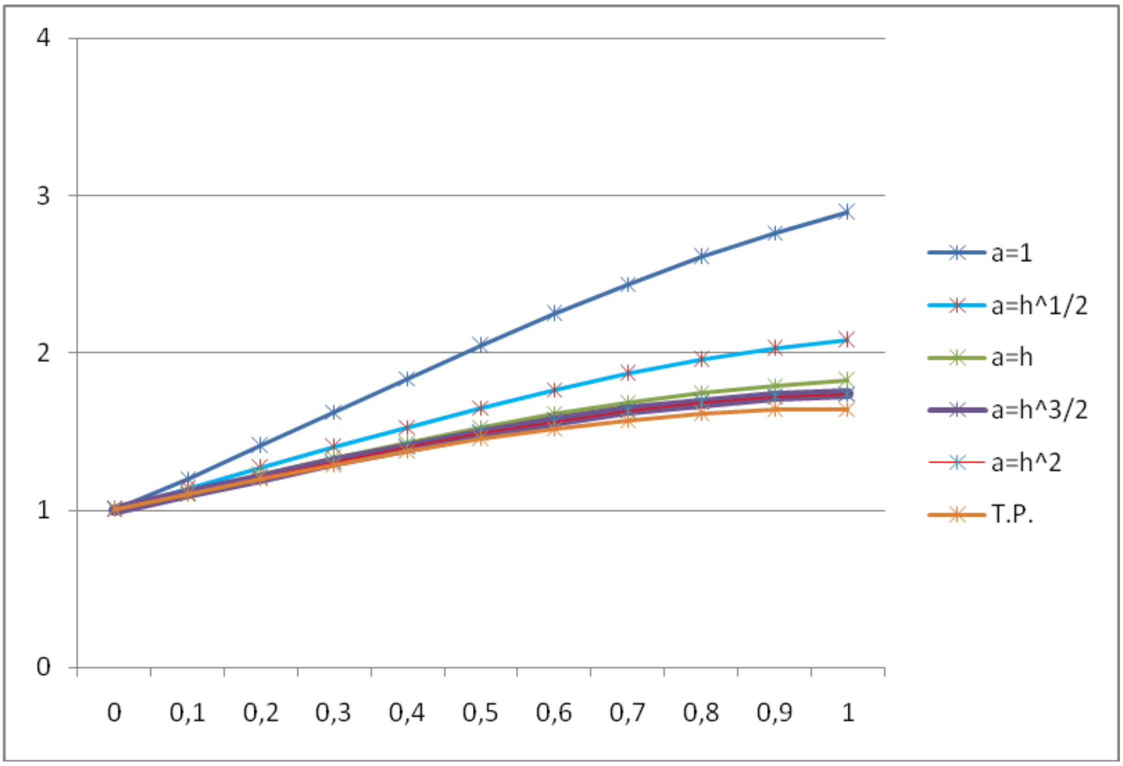

Рис. 1. Решение задачи с различными значениями регуляризатора

Оценим погрешность:

$$max|y_0^i - y^i| = 1.245907981,$$

$$max|y_1^i - y^i| = 0.434063548,$$

$$max|y_2^i - y^i| = 0.177379186,$$

$$max|y_3^i - y^i| = 0.096170998,$$

$$max|y_1^i - y^i| = 0.094010998.$$

Итак, мы видим, что задача решена корректно при $|\alpha| \leq h$.

Литература

1. Воскресенский Е.В. Методы сравнения в нелинейном анализе. Саранск: Изд-во Сарат. Ун-та. Сарат. Фил. 1990. 224 с.

2. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: «Наука». 1977. 656 с.

3. Годунов, С.К., Рябенький, В.С. Введение в теорию разностных схем. М.: Физматгиз, 1962. 340 с.

4. Мурюмин, С.М. Асимптотическая эквивалентность разностных схем // Труды Средневолжского математического общества. 2002. Т. 3-4. № 1. 348-349 с.

5. Лапчик, М.П., Рагулина, М.И., Хеннер, Е.К. Численные методы. М.: Academia, 2000. 384 с.

6. Мурюмин С. М. Асимптотическая эквивалентность разностных схем Рунге-Кутта // Журнал Средневолжского математического общества. 2005. Т. 7. № 1. С. 403-404.

MSC 34G10 58D25

Asymptotic equivalence of difference schemes for solving Cauchy problem

S.M. Muryumin [1], O.S. Yazovtseva [1]

National Research Ogarev Mordovia State University [1]

Abstract: The articles states definitions of asymptotic equivalence of difference schemes for solving Cauchy problem. There is shown equivalence for generate of absolutely stable difference scheme by application of regularization method. There is examples equivalent and non-equivalent difference schemes for solving Cauchy problem, numerical solving for Cauchy problem with using regularization parameter.

Keywords: Cauchy problem, Asymptotic equivalence, difference scheme, regularization method.

References

1. Voskresenskiy E.V. Metody sravneniya v nelineynom analize [Comparison method in nonlinear analisys] Saransk: Saratov University publishing house. 1990. 224 p.

2. Samarskiy A.A. Teoriya raznostnyh shem [Theory of differences schemes] Moscow: Nauka. 1977. 656 p.

3. Godunov S.K., Ryabenkiy V.S. Vvedenie v teoriyu raznostnyh shem [Introduction in theory of differences schemes] Moscow: Fizmatgis. 1962. 340 p.

4. Muryumin S.M. Asimptoticheskaya ekvivalentnost raznostnyh schem [Asymptotic equivalence of differences schemes]. // Trudy srednevolzhskogo matematicheskogo obschestva. 2002. V. 3-4. No 1. 348-349 p.

5. Lapchik M.P., Ragulina M.I., Henner E.K. Chislennye metody. Moscow: Academia, 2000. 384 p.

6. Muryumin S.M. Asimptoticheskaya ekvivalentnost raznostnyh schem Runge-Kutta [Asymptotic equivalence of Runge-Kutta differences schemes] // Zhurnal Srenevolzhskogo matematicheskogo obshchestva [Journal of the Middle-Volga mathematical society]. 2005. V. 7. No 1. P. 403-404.