XIII Международная научная конференция "Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании", Саранск, 12-16 июля 2017.
XIII International scientific conference "Differential equations and their applications in mathematical modeling", Saransk, July 12-16, 2017.

УДК 532.5:517.9

Исследование струйных течений методом малого параметра

П.А. Вельмисов [1], У.Д. Мизхер [1], Е.П Семенова [1]

Ульяновский государственный технический университет [1]

Аннотация: Построены асимптотические разложения и получены асимптотические локальные уравнения для осесимметричных течений вязкого несжимаемого газа со слабой закруткой W, отличающиеся от аналогичных уравнений пограничного слоя для течений с конечной закруткой. На основе решений этих уравнений построены "внутренние"течения в центре свободных слабозакрученных струй. Проведено сравнение с результатами для струй с конечной закруткой.

Ключевые слова: аэрогидродинамика, струя, вязкость, асимптотическое разложение.

Осесимметричные течения вязкого несжимаемого газа описываются системой уравнения [1,2]:

$$u_t + uu_x + vu_r = -\frac{1}{\rho}P_x + \nu(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + u_{xx}), v_t + uv_x + vv_r - \frac{1}{r}W^2 = -\frac{1}{\rho}P_r + \nu N(v),$$
$$W_t + uW_x + vW_r + \frac{vW}{r} = \nu N(W), v_r + \frac{v}{r} + u_x = 0, N(f) \equiv f_{rr} + \frac{1}{r}f_r - r^{-2}f + f_{xx}. \tag{1}$$

Здесь u,v,W - компоненты скорости, P - давление, ρ - плотность, $\nu = \mu\rho^{-1}$- кинематическая вязкость, x, r - цилиндрические координаты, t - время. Введем для зависимых и независимых переменных следующие локальные разложения :

$$u = u_1 + \epsilon u_2 + \epsilon^2 u_3 + ..., v = \epsilon(v_1 + \epsilon v_2 + \epsilon^2 v_3 + ...), W = W_1 + \epsilon W_2 + \epsilon^2 W_3 + ...,$$
$$P - P_0 = P_1 + \epsilon P_2 + \epsilon^2 P_3 = ..., \nu = \epsilon^2\nu^*, r = \epsilon r^*, \nu^*; r^* \sim 1; \epsilon \ll 1. \tag{2}$$

Здесь функции $u_k, v_k, W_k, P_k (k \geq 1)$ имеют порядок единицы и зависят от $t, x, r^*; P_0$-давление в покоящемся газе ; ϵ - малый постоянный параметр. Тогда первое приближение - известная система уравнений пограничного слоя [1,2] (звездочку у переменной r здесь и далее опускаем):

$$u_{1t} + u_1 u_{1x} + v_1 u_{1r} = -\frac{1}{\rho}P_{1x} + \nu^*(u_{1rr} + \frac{1}{r}u_{1r}), r^{-1}W_1^2 = \rho^{-1}P_{1r},$$
$$W_{1t} + u_1 W_{1x} + v_1(W_{1r} + \frac{1}{r}W_1) = \nu^* M(W_1), v_{1r} + \frac{1}{r}v_1 + u_{1x} = 0, \tag{3}$$
$$M(f) \equiv f_{rr} + \frac{1}{r}f_r - r^{-2}f.$$

Разложение (2) и уравнения (3) описывают течения в узкой области $r = 0$ при предположении ,что продольная скорость и закрутка потока конечны, а поперечная скорость мала. Систему уравнений (3) можно использовать для описания течения в центре незакрученной ($W_1 = 0$) струи [1,2] (действительно ,физические условия течения в центре струи соответствуют математическим предположениям (2)).Однако известно [2],что нельзя получить автомодельное решение системы (3) ,описывающее течение в центре закрученной струи, обладающей постоянными импульсом и кинетическим моментом (постоянства указанных характеристик требует сама система(3)).

В работах [3,4] было построено приближенное решение системы (3) для центра закрученной струи по обратным степеням координаты x. Это решение в первом приближении для u, v (в смысле разложений [3,4]) построено при постоянном давлении и нулевой закрутке, так как первые члены u_1, v_1 разложений [3,4] для u, v, определяются из первого и последнего уравнений (3) в предположении, что член P_{1x} в первом уравнении (3) отсутствует (т.е. этот член , а значит и W_1 , не участвуют в определении u_1, v_1). Но с учетом высших приближений разложения [3,4] описывают закрученную струю с непостоянным давлением, и в высших приближениях закрутка влияет на распределение скоростей u, v, .

Попытаемся решить аналогичную задачу с помощью разложений (2), исходя не из (3), а из точной системы уравнений (1) .

Предположим, что закрутка потока мала. Зададим $u, v, (P - P_0)$ в виде (2), а для W введем разложение

$$W = \epsilon^n (W_1 + \epsilon W_2 + \epsilon^2 W_3 + ...). \tag{4}$$

Параметр n определяет порядок величины закрутки.

Подставив (2), (4) в (1) и исследуя полученные системы уравнений для u_k, v_k, P_k, W_k мы пришли к выводу, что наиболее интересные результаты получаются дл $n = 1$ и $n = \frac{1}{2}$.

В случае $n = 1$ из второго уравнения системы (1) следует (этого требует порядок величины закрутки) : $P_1 = P_1(x, t), P_2 = P_2(x, t)$. Будем считать, что давление в струе в первом приближении определяется постоянным давлением P_0 окружающего струю покоящегося воздуха и пренебрежем градиентами давлений $\partial P_1/\partial x, \partial P_2/\partial x$ (положим $P_1 = P_2 = 0$, т.е. $W = \epsilon W_1 + ..., P - P_0 = \epsilon^2 P_3 + ...$). Тогда в первом приближении из системы (1) получим:

$$\begin{gathered}
u_{1t} + u_1 u_{1x} + v_1 u_{1r} = \nu^* (u_{1rr} + \tfrac{1}{r} u_{1r}),\\
v_{1t} + u_1 v_{1x} + v_1 v_{1r} - \tfrac{1}{r} W_1^2 = \nu^* M(v_1) - \tfrac{1}{\rho} P_{3r},\\
W_{1t} + u_1 W_{1x} + v_1 (W_{1r} + \tfrac{1}{r} W_1) = \nu^* M(W_1),\\
v_{1r} + \tfrac{1}{r} v_1 + u_{1x} = 0.
\end{gathered} \tag{5}$$

Система уравнений (5) отличается от (3) дополнительными членами во втором уравнении. Во втором приближении имеем:

$$\begin{gathered}
u_{2t} + (u_1 u_2)_x + v_1 u_{2r} + v_2 u_{1r} = \nu^* (u_{2rr} + \tfrac{1}{r} u_{2r}),\\
v_{2t} + u_1 v_{2x} + u_2 v_{1x} + (v_1 v_2)_r - \tfrac{2}{r} W_1 W_2 = \nu^* M(v_2) - \tfrac{1}{\rho} P_{4r},\\
W_{2t} + u_1 W_{2x} + u_2 W_{1x} + v_1 W_{2r} + v_2 W_{1r} + \tfrac{1}{r}(v_1 W_2 + v_2 W_1) = \nu^* M(W_2),\\
v_{2r} + \tfrac{1}{r} v_2 + u_{2x} = 0.
\end{gathered} \tag{6}$$

Уравнения третьего приближения будут выглядеть так:

$$\begin{gathered}
L_1(u_3, u_2, u_1, v_3, v_2, v_1) = -\tfrac{1}{\rho} P_{5x} + \nu^* u_{1xx},\\
L_2(u_3, u_2, u_1, v_3, v_2, v_1, W_3, W_2, W_1) = -\tfrac{1}{\rho} P_{5r} + \nu^* v_{1xx},\\
L_3(u_3, u_2, u_1, v_3, v_2, v_1, W_3, W_2, W_1) = \nu^* W_{1xx}, v_{3r} + \tfrac{1}{r} v_3 + u_{3x} = 0.
\end{gathered} \tag{7}$$

Интегрирование систем уравнений (5), (6) можно производить с следующем порядке: из первого и последнего уравнений этих систем найти u_1, v_1, u_2, v_2 , затем найти W_1, W_2, из третьих уравнений; члены для давления P_3, P_4, определяются простым интегрированием из вторых уравнений. Интегрирование системы (7) значительно сложнее вследствие появления свободных членов со вторыми производными.

В работах [3,4] решение системы (3), описывающее закрученную стационарную струю, задавалось в виде (эти решения обозначим индексом 0)

$$\begin{gathered} u_1^0 = x^{-1}f_1 + x^{-2}f_2 + x^{-3}f_3 + ..., v_1^0 = x^{-1}g_1 + x^{-2}g_2 + x^{-3}g_3 + ..., \\ W_1^0 = x^{-2}h_1 + x^{-3}h_2 + x^{-4}h_3 + ..., P_1^0 = x^{-4}H_1 + x^{-5}H_2 + x^{-6}H_3 + ... \end{gathered} \tag{8}$$

Здесь f_k, g_k, h_k, H_k- функции переменной $\eta = r^*x^{-1}$.

Несложно показать, что системы уравнений (5), (6) для $u_k, v_k, W_k (k = 1, 2)$ имеют аналогичные решения:

$$\begin{gathered} u_k = x^{-k}f_k(\eta), u = x^{-1}f_1 + \epsilon x^{-2}f_2 + ..., \\ v_k = x^{-k}g_k(\eta), v = \epsilon(x^{-1}g_1 + \epsilon x^{-2}g_2 + ...), \\ W_k = x^{-k-1}h_k(\eta), W = \epsilon x^{-2}(h_1 + \epsilon x^{-1}h_2 + ...). \end{gathered} \tag{9}$$

Но помним:разложения(8)записаны по степеням (x^{-1}), разложения (9) – по степеням ϵ. Однако выражения для давлений не совпадают. Из вторых уравнений (5), (6) находим

$$P_3 = x^{-4}H_1(\eta) + x^{-2}H_1^*(\eta), P_4 = x^{-5}H_2(\eta) + x^{-3}H_2^*(\eta). \tag{10}$$

Тогда для P имеем

$$P - P_0 = \epsilon^2[\tfrac{1}{x^4}H_1(\eta) + \tfrac{1}{x^2}H_1^*(\eta)] + \epsilon^3[\tfrac{1}{x^5}H_2(\eta) + \tfrac{1}{x^3}H_2^*(\eta)] + ... \tag{11}$$

Первые члены в выражениях для P_3, P_4 в (10), возникающие вследствие закрученности потока, совпадают с соответствующими членами в (8) из[3,4], однако имеются добавочные члены с H_1^*, H_2^* . Они появляются вследствие того, что во вторые уравнения систем (5), (6), кроме членов с закруткой и давлением $(r^{-1}W_1^2, P_{3r}, 2r^{-1}W_1W_2, P_{4r})$, которые входят и в уравнения (3), входят еще дополнительно u_1, v_1, u_2, v_2 . Эти дополнительные члены во вторых уравнениях (5), (6) возникают потому, что при малой закрутке ($W \sim \epsilon$) они становятся того же порядка, что и перечисленные выше члены с W_k, P_{kr} Если же исходить из системы (3), то этих дополнительных членов второе уравнение системы (3) не содержит заранее. Первые члены разложений (2), (4) для $n = 1$ имеют вид

$$\begin{gathered} u = u_1 + ... = 2\nu^*\gamma^2x^{-1}(1 + \tfrac{1}{4}\gamma^2\eta^2)^{-2} + ..., \eta = r^*x^{-1}, \gamma = const, \\ v = \epsilon v_1 + ... = \epsilon\nu^*\gamma^2\eta x^{-1}(1 - \tfrac{1}{4}\gamma^2\eta^2)(1 + \tfrac{1}{4}\gamma^2\eta^2)^{-2}, \\ W = \epsilon W_1 + ... = \epsilon\gamma L\nu^*x^{-2}\eta(1 + \tfrac{1}{4}\gamma^2\eta^2)^{-2} + ..., L = const, \tfrac{1}{\rho}(P - P_0) = \epsilon^2P_3 + ... = \\ = \epsilon^2[-\tfrac{2}{3}\nu^{*2}L^2x^{-4}(1 + \tfrac{1}{4}\gamma^2\eta^2)^{-3} + 2\nu^{*2}\gamma^2x^{-2}(1 - \tfrac{1}{4}\gamma^2\eta^2)(1 + \tfrac{1}{4}\gamma^2\eta^2)^{-2}] + ... \end{gathered} \tag{12}$$

Первый член в выражении для давления определяется закруткой потока. Если струя незакрученная, то $L = 0$, и тогда давление определяется только вторым членом, при этом $P - P_0 \sim \epsilon^2 \ll 1$, что согласуется с предположением о постоянстве давления в незакрученной струе [1] в первом приближении (т.е. мы определили порядок и значение давления для незакрученной струи). Члены второго приближения выписывать не будем (это сделать несложно, взяв результаты из [3,4]). Итак, исходя из точной системы уравнений (1), мы произвели уточнение в первых двух приближениях формулы для давления в случае малой интенсивности закрутки. Выражения для скоростей $u_k, v_k, W_k (k = 1, 2)$ такие же, как в [3,4] . Различие с [3,4] для u, v, W будет иметь место, начиная с u_3, v_3, W_3 , так как в уравнения (7) для этих функций входят вторые производные $u_{1xx}, v_{1xx}, W_{1xx}$ которые не могут появиться, если исходить из (3), а не из (1).

Рассмотрим теперь значение $n = \frac{1}{2}$ в (4), разложения для u, v, W по-прежнему зададим в виде (2). Из второго уравнений (1) вследствие малости закрутки получим $P_1 = P_1(x, t)$. Пренебрегая в первом приближении (как и для $n = 1$) градиентом давления P_{1x}, положим $P_1 = 0$. Тогда в первом приближении из (1) получим

$$u_{1t} + u_1 u_{1x} + v_1 u_{1r} = \nu^*(u_{1rr} + \tfrac{1}{r} u_{1r}), r^{-1} W_1^2 = \rho^{-1} P_{2r},$$
$$W_{1t} + u_1 W_{1x} + v_1 W_{1r} + \tfrac{1}{r} v_1 W_1 = \nu^* M(W_1), v_{1r} + \tfrac{1}{r} v_1 + u_{1x} = 0. \tag{13}$$

Система уравнений для второго приближения имеет вид

$$u_{2t} + (u_1 u_2)_x + v_1 u_{2r} + v_2 u_{1r} = -\tfrac{1}{\rho} P_{2x} + \nu^*(u_{2rr} + \tfrac{1}{r} u_{2r}),$$
$$v_{2t} + u_1 v_{1x} + v_1 v_{1r} - \tfrac{2}{r} W_1 W_2 = -\tfrac{1}{\rho} P_{3r} + \nu^* M(v_2),$$
$$W_{2t} + u_1 W_{2x} + u_2 W_{1x} + v_1 W_{2r} + v_2 W_{1r} + \tfrac{1}{r}(v_1 W_2 + v_2 W_1) = \nu^* M(W_2), \tag{14}$$
$$v_{2r} + \tfrac{1}{r} v_2 + u_{2x} = 0.$$

Решение для систем (13),(14) можно искать в той же последовательности, что и для систем (5), (6) . Система уравнений (13), отличающаяся от системы (3) отсутствием члена с давлением в первом уравнении, имеет решение вида (9), при этом $P_2 = x^4 H_1(\eta)$. Таким образом, при интенсивности закрутки $W \sim \sqrt{\nu}$ (большей по порядку, чем для $n = 1$), разложения (2), (4) для (1) дают в первом приближении тот же результат (в том числе и для давления), что и разложения (8) из [3,4] для (3). Решения системы (13) имеет вид (12), где в выражении для P нужно задать порядок ϵ и отбросить последний член, т.е. градиент давления в первом приближении, в отличие от случая с $n = 1$, создается только закруткой. Кроме того, в (12) $W = \sqrt{\epsilon} W_1$.

Однако в том случае с $n = \frac{1}{2}$ функции u_2, v_2 (а следовательно и W_2) из (9) не удовлетворяют системе (14) для второго приближения вследствие появления в первом уравнении этой системы свободного члена $\rho^{-1} P_{2x}$. Давление P_3 также будет отличаться от $P_3 = x^{-5} H_2(\eta)$ (8) вследствие несовпадения W_2 и появления во втором уравнении (14) дополнительных членов с u_1, v_1 . Найти решение системы (14) не удалось. Получить решение (14) представляет интерес, так как уже во втором приближении имеет место влияние закрутки W_1 на распределение скоростей u_2, v_2 (в отличие от случая с $n = 1$ и в отличие от [3,4], для которых влияние закрутки начинается в более высоких приближениях).

Сделаем ряд замечаний. Внутреннее разложение, описывающее течение в центре струи, в общем случае можно задать в виде

$$u = u_1 + f(\epsilon) u_2 + ..., v = \epsilon[v_1 + f(\epsilon) v_2 + ...],$$
$$W = L(\epsilon)[W_1 + f(\epsilon) W_2 + ...], \tag{15}$$
$$P - P_0 = L^2(\epsilon)[P_1 + f(\epsilon) P_2 + ...], r = \epsilon r^*, \nu = \epsilon^2 \nu^*.$$

Функции u_k, v_k, W_k, P_k зависят от x, r^*, t . Разложение для $(P - P_0)$ можно задать в виде $P - P_0 = P_1 + f(\epsilon) P_2 + ...$, при этом $W \sim L(\epsilon)$, но тогда все функции P_k вплоть до порядка $L^2(\epsilon)$ окажутся зависимыми только от x, t . Для разложений (2), (4) функция сравнения

$f(\epsilon) = \epsilon$. Функция $L(\epsilon)$ должна быть значительно больше , чем $\epsilon(L \gg \epsilon)$, или равна $\epsilon(L = \epsilon)$, иначе из второго уравнения (1) получим уравнение без членов $r^{-1}W^2, \rho^{-1}P_2$, и это уравнение не удовлетворится (для u_1, v_1 будем иметь тогда переопределенную систему трех уравнений). Если $\epsilon \ll L(\epsilon) \ll 1$, то в первом приближении получим систему уравнений (13); если имеем предельное значение $L(\epsilon) = \epsilon$, то в первом приближении получим уравнения (5), т.е. исходя из (15), мы будем иметь в первом приближении или уравнения (5) $(L = \epsilon)$, или (13) $(L \gg \epsilon)$, или (13) $(L = 1)$, других быть не может. Исследование показало, что в случае разложения по малому параметру наиболее интересными являются разложения (2), (4), т.е. когда

$f(\epsilon) = \epsilon, L(\epsilon) = \epsilon, L(\epsilon) = \sqrt{\epsilon}$.

Как отмечалось, для разложений (2), (4) при $n = \frac{1}{2}$ отличие от результатов [3,4] для всех параметров имеет место во втором приближении, в первом приближении результаты совпадают. В случае $n = 1$ имеем различие для давления уже в первом приближении, разложения для u, v, W совпадают с точностью до второго порядка включительно. Оказывается, что мы получим совпадение с точностью до четвертого порядка включительно (а если нужно, то и выше) решений, полученных на основе (15), и решений [4], если закрутка в (15) "не очень мала при этом функции сравнения $f(\epsilon)$ должна быть достаточно малой, т.е. функции L, f можно подобрать так, что с нужной точностью (например, с точностью до четвертого порядка включительно) решением соответствующих уравнений для (15) будут решения [4] (например , $f = L = \epsilon^{\frac{1}{3}}$).Однако в высших приближениях различие обязательно возникает . Это различие уже в первом приближении (как для $f = L(\epsilon) = \epsilon$) или в высших приближениях (как, например для $f = \epsilon, L = \sqrt{\epsilon}$) возникает оттого, что уже в первом приближении для достаточно слабой закрутки $(n = 1)$ или в высших приближениях для более сильной закрутки (но при этом $W \ll 1$) члены, отброшенные при выводе уравнений пограничного слоя (3), становятся одного порядка с оставленными членами, и их необходимо учесть.

Заметим, что в настоящей работе и в работах [3,4] рассматривались разложения разных типов и для разных уравнений ,т.е. решались вобщем-то различные (как в математическом ,так и физическом смыслах) струйные задачи. Однако сравнение с [3,4] помогало более глубоко уяснить смысл разложений по малому параметру ,более четко представить полученные результаты. Различие с точки зрения физики явления заключается в том, что в [3,4] проводились исследования для струи с конечной интенсивностью закрутки, в настоящей работе рассматривается струя с малой закруткой.

Таким образом, получены асимптотические локальные уравнения для осесимметричных течений вязкого несжимаемого газа со слабой закруткой W. Решения этих уравнений используются для построения "внутренних"течений в центре свободных слабозакрученных струй. Проведено сравнение с результатами для струй с конечной закруткой.

Литература

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М. 1969.
2. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М. 1970.
3. Лойцянский Л. Г. Распространение закрученной струи в безграничном пространстве, затопленном той же жидкостью.-ПММ. 1953. Т.117. вып.1.
4. Фалькович С. В.Распространение закрученной струи в безграничном пространстве, затопленном той же жидкостью.-ПММ. 1967. Т.32. вып.1.

MSC 76D05 35B40

Investigation of jet flows by the small parameter method

P.A. Velmisov [1], U.J. Mizher [1], E.P. Semenova [1]
Ulyanovsk State Technical University [1]

Abstract: Asymptotic expansions are constructed and asymptotic local Obtained for axisymmetric flows of a viscous incompressible gas with a weak twist W, which differ from the analogous boundary-layer equations for flows with The final twist. Based on the solutions of these equations, "internal"flows are Constructed in the center of free weakly twisted jets. A comparison is made with the Results for jets with a finite twist.

Keywords: aerohydrodynamics, stream, viscosity, asymptotic expansion

References

1. Schlichting G. The theory of the boundary layer. M. 1969.
2. Loitsyansky L. G. Mechanics of fluid and gas. M. 1970.
3. Loitsyansky L. G. Distribution of a swirling jet in an infinite space flooded with the same fluid. -PMM. 1953. V.117. No.1. 2014. V. 16. No 4. P. 33-40.
4. Falkovich S. V. Distribution of a swirling jet in an infinite space flooded with the same fluid.-PMM, 1967. V.32. No. 1.