УДК 517.392

Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода с особенностями второго порядка *

И.В. Бойков [1], А.И. Бойкова [1]

Пензенский государственный университет[1]

Аннотация: Важность исследования аналитических и численных методов решения гиперсингулярных интегральных уравнений обусловлена многочисленными приложениями в физике и технологиях. В течение последнего столетия, с тех пор как Гильберт и Пуанкаре ввели в математику сингулярные интегральные уравнения, наблюдается исследовательский бум в области сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений и их приложений. Краевая задача Римана, сингулярные и гиперсингулярные интегральные уравнения широко используются в качестве основных методов математического моделирования в физике (квантовая теория поля, теория близкого и дальнего взаимодействия, теория солитонов), теории упругости и термоупругости, аэродинамике и электродинамике и многих других областях. Решение сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений в замкнутом виде возможно только в особых случаях. Поэтому исключительную важность играют приближенные методы решения сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений. Основные численные методы и обширные обзоры литературы по численным методам решения сингулярных интегральных уравнений проведены в [1–4]. Методы решения гиперсингулярного интегральных уравнений менее разработаны [5], [6]. В настоящей работе предлагается метод решения гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода. Исследуются вопросы разрешимости уравнений и строятся численные методы. Работа является продолжением статьи [7].

Ключевые слова: Гиперсингулярные интегральные уравнения, коллокации, механические квадратуры

1. Определение гиперсингулярных интегралов

В работе [8] Ж. Адамар ввел новый тип особых интегралов.
Определение 1.1 [8], [9]. Интеграл вида

$$\int\limits_a^b \frac{A(x)\,dx}{(b-x)^{p+\alpha}}$$

при целом p и $0<\alpha<1$ определяет величину ("конечную часть") рассматриваемого интеграла как предел при $x\to b$ суммы

$$\int\limits_a^x \frac{A(t)\,dt}{(b-t)^{p+\alpha}}+\frac{B(x)}{(b-x)^{p+\alpha-1}},$$

если предположить, что $A(x)$ имеет p производных в окрестности точки b. Здесь $B(x)-$ любая функция, на которую налагаются два условия:

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 16-01-00594.

а) рассматриваемый предел существует;

б) $B(x)$ имеет, по крайней мере, p производных в окрестности точки $x = b$.

Произвольный выбор $B(x)$ никак не влияет на значение получаемого предела: условие а) определяет значения $p-1$ первых производных от $B(x)$ в точке b, так что произвольный добавочный член в числителе есть бесконечно малая величина, по меньшей мере порядка $(b-x)^p$.

Замечание. В книге [10] Ж. Адамар увлекательно рассказывает о различных сторонах творческого процесса при решении математических проблем и, в частности, останавливается (с. 104) на открытии им гиперсингулярных интегралов.

В работе Л. А. Чикина [11] дано определение интеграла типа Коши – Адамара, обобщающее понятия интеграла в смысле главного значения Коши и интеграла в смысле Адамара.

Определение 1.2 [11]. Интегралом

$$\int_a^b \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-c)^p}, \quad a<c<b,$$

в смысле главного значения Коши – Адамара будем называть следующий предел:

$$\int_a^b \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-c)^p} = \lim_{v\to 0}\left[\int_a^{c-v} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-c)^p} + \int_{c+v}^b \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-c)^p} + \frac{\xi(v)}{v^{p-1}}\right],$$

где $\xi(v)$ – некоторая функция, выбранная так, чтобы указанный предел существовал.

Наряду с определениями гиперсингулярных интегралов, приведенными в [12], и определением 1.2 дадим, следуя [13], еще одно определение, удобное в приложениях, особенно при решении гиперсингулярных интегральных уравнений на весовых классах функций.

Рассмотрим гиперсингулярный интеграл

$$\int_{-1}^1 \frac{\omega(\tau)\varphi(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau, \tag{1.1}$$

где $\omega(\tau)$– весовая функция, $\omega(t)=1$, $\omega(t)=(1-t^2)^{\pm 1/2}$, $\omega(t)=\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{\pm 1/2}$.

Регуляризация интеграла (1.1) проводится по формуле

$$\int_{-1}^1 \frac{\omega(\tau)\varphi(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau = \int_{-1}^1 \left[\varphi(\tau)-\varphi(t)-\frac{\varphi'(t)}{1!}(\tau-t)\right]\frac{\omega(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau +$$

$$+\varphi(t)\int_{-1}^1 \frac{\omega(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau + \varphi'(t)\int_{-1}^1 \frac{\omega(\tau)}{(\tau-t)}d\tau, -1<t<1. \tag{1.2}$$

Замечание. Отметим, что подобная регуляризация ранее была описана в книге [14].

2. Гладкость гиперсингулярных интегралов

В монографии [12] проведено детальное исследование гладкости одномерных и многомерных гиперсингулярных интегралов видов

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^p}, \int_{-1}^1\int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{q/2}}, \quad p=2,3,...,q=3,4,...,$$

в предположении, что функции $\varphi(t)$ и $\varphi(t_1,t_2)$ принадлежат классам гладких функций, определенных соответственно на [-1,1] и $[-1,1]^2$.

Решения гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода ищутся на специфических классах функций. Естественно исследовать гладкость гиперсингулярных интегралов на этих классах.

2.1. Рассмотрим интеграл $(Hx)(t)=\int\limits_{-1}^{1}\frac{x(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}$, где $x(t)=\sqrt{1-t^2}\varphi(t)$, $\varphi(t)\in W^1H_\alpha(M)$. Исследуем гладкость интеграла $(Hx)(t)$.

По определению 1.2 имеем при $-1<t<1$

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\tau^2}\varphi(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau=-\int\limits_{-1}^{1}\frac{\tau\varphi(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t)}+\int\limits_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\tau^2}\varphi'(\tau)}{\tau-t}d\tau=J_1(t)+J_2(t).$$

Вначале исследуем гладкость интеграла $J_2(t)$. Функция $\psi(t)=(1-t^2)^{1/2}\varphi'(t)\in H_\gamma$, $\gamma=\min(\alpha,1/2)$. Сегмент [-1,1] может быть продолжен замкнутой гладкой ограниченной кривой L. Так как $\psi(\pm1)=0$, то функция $\psi(t)$ может быть продолжена с сегмента [-1,1] на кривую L нулем. Доопределенную таким образом функцию обозначим через $\psi(t)$.

Из теоремы Привалова [15] следует, что функция $\int\limits_{L}\frac{\psi(\tau)d\tau}{\tau-t}\in H_\gamma$. Следовательно, $J_2(t)\in H_\gamma$.

Рассмотрим функцию $J_1(t)$. Возьмем две произвольные, достаточно близкие точки t_1 и $t_2, t_2>t_1, (|t_1-t_2|=h)$ и рассмотрим разность

$$J_1(t_2)-J_1(t_1)=\int\limits_{-1}^{1}\left[\frac{a(\tau)-a(t_2)}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t_2)}-\frac{a(\tau)-a(t_1)}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t_1)}\right]d\tau,\ a(t)=t\varphi(t).$$

Напомним, что

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t)}=0,-1<t<1. \tag{2.1}$$

Из точки t_1 опишем окружность радиуса ρ так, чтобы точка t_2 была внутри окружности. Часть сегмента [-1,1], находящуюся внутри окружности, обозначим через l. Пусть $\rho=k|t_1-t_2|$, где $k-$ константа, $2\geq k>1$.

Представим разность $J_1(t_2)-J_1(t_1)$ в виде

$$J_1(t_2)-J_1(t_1)=\int\limits_{l}\frac{a(\tau)-a(t_2)}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t_2)}d\tau-\int\limits_{l}\frac{a(\tau)-a(t_1)}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t_1)}d\tau+$$

$$+\int\limits_{[-1,1]\setminus l}\frac{a(t_1)-a(t_2)}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t_1)}d\tau-\int\limits_{[-1,1]\setminus l}\frac{(a(\tau)-a(t_2))(t_2-t_1)}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t_1)(\tau-t_2)}d\tau=I_1+I_2+I_3+I_4.$$

Оценим модуль каждого из этих интегралов в отдельности.

Так как $|I_1|$ и $|I_2|$ оцениваются одинаково, то ограничимся рассмотрением первого интеграла. Пусть $t_1\in(-1,0]$.

Очевидно,

$$|I_1|\leq\left|\int\limits_{l}\frac{M}{\sqrt{1-\tau^2}}d\tau\right|\leq C|t''-t'|^{1/2}=Ch^{1/2}.$$

Здесь t' и $t''-$ точки пересечения окружности $R(t_1,\rho)$ радиуса ρ с центром в точке t_1 с сегментом [-1,1].

Через C здесь и ниже обозначаются константы, величины которых нетрудно оценить.

Оценим интеграл I_3. Здесь нужно рассмотреть два случая: 1) точка $-1 \in B(t_1, \rho)$; 2) точка $-1 \notin B(t_1, \rho)$. Через $B(t_1, \rho)$ обозначен круг радиуса ρ с центром в точке t_1.

Вначале рассмотрим первый случай. В этом случае

$$|I_3| = \left| \int\limits_{t''}^{1} \frac{a(t_1) - a(t_2)}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau - t_1)} d\tau \right| \leq Ch^{1/2} \left| \int\limits_{t''}^{1} \frac{d\tau}{\tau - t_1} \right| \leq Ch^{1/2} \ln h = Ch^{1/2-\varepsilon},$$

где $\varepsilon (\varepsilon > 0)-$ как угодно малое положительное число.

Рассмотрим второй случай. Для простоты обозначений будем полагать, что $n = 2/h$, причем $n-$ целое число. Кроме того будем считать, что $t' = n_1 h, t'' = (n_1 + 1)h, \rho = 2h$. Из дальнейшего будет видно, что эти предположения не влияют на общность рассуждений.

Очевидно,

$$|I_3| \leq \sum_{k=0}^{n_1-3} \left| \int\limits_{\Delta_k} \frac{a(t_1) - a(t_2)}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau - t_1)} d\tau \right| + \sum_{k=n_1+2}^{n-1} \left| \int\limits_{\Delta_k} \frac{a(t_1) - a(t_2)}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau - t_1)} d\tau \right| = I_{31} + I_{32},$$

где $\Delta_k = [v_k, v_{k+1}], k = 0, 1, ..., n-1; v_k = -1 + kh, k = 0, 1, ..., n.$

Для оценки I_{31} заметим, что

$$I_{31} \leq Ch \sum_{k=0}^{n_1-3} \int\limits_{\Delta_k} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau - t_1)} \leq Ch \sum_{k=0}^{n_1-3} \frac{1}{(n_1 - k - 1)h} \int\limits_{\Delta_k} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} \leq$$

$$\leq C \sum_{k=0}^{n_1-3} \frac{1}{n_1 - k - 1} h^{1/2} = Ch^{1/2} \ln n_1 \leq Ch^{1/2} \ln n \leq Ch^{1/2} |\ln h|.$$

Аналогично оценивается I_{32}.

Следовательно, $I_3 \leq Ch^{1/2} |\ln h|$.

Приступим к оценке $|I_4|$.

Здесь также нужно рассмотреть два случая: 1) точка $-1 \in B(t_1, \rho)$, 2) точка $-1 \notin B(t_1, \rho)$.

В первом случае

$$|I_4| = \left| \int\limits_{t_1+\rho}^{1} \frac{(a(\tau) - a(t_2))(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau - t_1)(\tau - t_2)} d\tau \right| \leq$$

$$\leq C \int\limits_{t_1+\rho}^{0} \frac{|t_2 - t_1|}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau - t_1)} d\tau + C \int\limits_{0}^{1} \frac{|t_2 - t_1|}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau - t_1)} d\tau = I_{41} + I_{42}.$$

Очевидно,

$$I_{41} \leq Ch^{1/2} \int\limits_{t_1+\rho}^{0} \frac{d\tau}{\tau - t_1} = Ch^{1/2} |\ln t_1 - \ln \rho| = Ch^{1/2} |\ln h|;$$

$$I_{42} \leq Ch |\ln(1 - t_1) - \ln t_1| = Ch |\ln h|.$$

Поэтому в первом случае $|I_4| \leq Ch^{1/2} |\ln h|$.

Рассмотрим второй случай. Здесь, как и при оценке $|I_3|$, сделаем несколько упрощающих выкладки предположений: $n = 2/h, n-$ целое число, $t_1 = n_1 h, t_2 > t_1, t_2 - t_1 = h$.

Тогда

$$|I_4| \leq \sum_{k=0}^{n_1-3} \left| \int\limits_{\Delta_k} \frac{(a(\tau)-a(t_2))(t_2-t_1)}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t_1)(\tau-t_2)} d\tau \right| +$$

$$+ \sum_{k=n_1+2}^{n-1} \left| \int\limits_{\Delta_k} \frac{(a(\tau)-a(t_2))(t_2-t_1)}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t_1)(\tau-t_2)} d\tau \right| = I_{43} + I_{44}.$$

Очевидно,

$$I_{43} \leq Ch \sum_{k=0}^{n_1-3} \int\limits_{\Delta_k} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t_1)} \leq C \sum_{k=0}^{n_1-3} \frac{1}{n_1-k-1} \int\limits_{\Delta_k} \frac{d\tau}{(1+\tau)^{1/2}} \leq Ch^{1/2}|\ln h|.$$

Аналогично оценивается I_{44} и, следовательно, $I_4 \leq Ch^{1/2}|\ln h|$.

Собирая полученные оценки, приходим к заключению, что $(Hx)(t) \in H_\gamma$, где $\gamma < \min(\alpha, 1/2)$.

Таким образом, гиперсинулярный интеграл $(Hx)(t)$, отображает множество функций $x(t) = \sqrt{1-\tau^2}\varphi(t)$, $\varphi(t) \in W^1H_\alpha(M)$, в множество функций H_γ, $\gamma < \min(\alpha, 1/2)$.

Введем пространство X функций $x(t) = \sqrt{1-\tau^2}\varphi(t)$, $\varphi(t) \in W^1H_\alpha(M)$ с нормой $||x(t)|| = \max\limits_{-1\leq t\leq 1}|\varphi(t)| + \max\limits_{-1\leq t\leq 1}|\varphi'(t)| + \sup\limits_{t_1\neq t_2}\frac{|\varphi'(t_1)-\varphi'(t_2)|}{|t_1-t_2|^\alpha}$ и пространство Y функций $y(t) \in H_\gamma, \gamma < \min(\alpha, 1/2)$ с нормой $||y(t)|| = \max\limits_{-1\leq t\leq 1}|y(t)| + \sup\limits_{t_1\neq t_2}\frac{|y(t_1)-y(t_2)|}{|t_1-t_2|^\gamma}$.

Теорема 2.1. Пусть $x(t) = (1-t^2)^{1/2}\varphi(t)$, $\varphi(t) \in W^1H_\alpha(M)$. Оператор Hx отображает пространство X в пространство Y, причем $\|Hx\|_Y \leq K\|x\|_X$, $K = \|H\|$.

2.2. Рассмотрим интеграл $(Hx)(t) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{x(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}$, где $x(t) = \frac{\varphi(t)}{\sqrt{1-t^2}}$.

Воспользовавшись формулой (1.2), представим этот интеграл в виде

$$(Hx)(t) = \int\limits_{-1}^{1} [\varphi(\tau) - \varphi(t) - \frac{\varphi'(t)}{1!}(\tau-t)] \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t)^2} d\tau +$$

$$+\varphi(t) \int\limits_{-1}^{1} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t)^2} + \varphi'(t) \int\limits_{-1}^{1} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t)} =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \left[\varphi(\tau) - \varphi(t) - \frac{\varphi'(t)}{1!}(\tau-t)\right] \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t)^2},$$

т.к. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t)^2} = 0$, $\int\limits_{-1}^{1} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t)} = 0$.

Возьмем две произвольные достаточно близкие точки t_1 и $t_2 (t_2 > t_1, |t_2 - t_1| = h)$. Из точки t_1 опишем окружность радиуса ρ так, чтобы точка t_2 была внутри окружности. Часть сегмента [-1,1], находящуюся внутри окружности, обозначим через l. Пусть $\rho = k|t_2 - t_1|$, где $k-$ константа, $1 < k \leq 2$.

Представим разность $(Hx)(t_2) - (Hx)(t_1)$ в виде

$$(Hx)(t_2) - (Hx)(t_1) = \int\limits_{-1}^{1} \left[\varphi(\tau) - \varphi(t_2) - \frac{\varphi'(t_2)}{1!}(\tau - t_2)\right] \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t_2)^2} -$$

$$-\int\limits_{-1}^{1}\left[\varphi(\tau)-\varphi(t_1)-\frac{\varphi'(t_1)}{1!}(\tau-t_1)\right]\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t_1)^2}=$$

$$=\int\limits_{-1}^{1}\left[\varphi(\tau)-\varphi(t_2)-\frac{\varphi'(t_2)}{1!}(\tau-t_2)-\frac{\varphi''(t_2)}{2!}(\tau-t_2)^2\right]\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t_2)^2}-$$

$$-\int\limits_{-1}^{1}\left[\varphi(\tau)-\varphi(t_1)-\frac{\varphi'(t_1)}{1!}(\tau-t_1)-\frac{\varphi''(t_1)}{2!}(\tau-t_1)^2\right]\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^1}(\tau-t_1)^2}+$$

$$+\frac{\pi}{2!}[\varphi''(t_2)-\varphi''(t_1)]=$$

$$=\int\limits_{[-1,1]}\frac{[\varphi(\tau)-\varphi(t_2)-\frac{\varphi'(t_2)}{1!}(\tau-t_2)-\frac{\varphi''(t_2)}{2!}(\tau-t_2)^2]((\tau-t_1)^2-(\tau-t_2)^2)}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t_1)^2(\tau-t_2)^2}d\tau+$$

$$+\int\limits_{[-1,1]}\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}\left[(\varphi(\tau)-\varphi(t_2)-\frac{\varphi'(t_2)}{1!}(\tau-t_2)-\frac{\varphi''(t_2)}{2!}(\tau-t_2)^2)-\right.$$

$$\left.-(\varphi(\tau)-\varphi(t_1)-\frac{\varphi'(t_1)}{1!}(\tau-t_1)-\frac{\varphi''(t_1)}{2!}(\tau-t_1)^2)\right]\frac{d\tau}{(\tau-t_1)^2}+$$

$$+\frac{\pi}{2}[\varphi''(t_2)-\varphi'(t_1)]=$$

$$=\int\limits_{l}\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}(\varphi(\tau)-\varphi(t_2)-\frac{\varphi'(t_2)}{1!}(\tau-t_2)-\frac{\varphi''(t_2)}{2!}(\tau-t_2)^2)\frac{d\tau}{(\tau-t_2)^2}-$$

$$-\int\limits_{l}\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}(\varphi(\tau)-\varphi(t_2)-\frac{\varphi'(t_2)}{1!}(\tau-t_2)-\frac{\varphi''(t_2)}{2!}(\tau-t_2)^2)\frac{d\tau}{(\tau-t_1)^2}+$$

$$+\int\limits_{l}\frac{[\varphi(\tau)-\varphi(t_2)-\frac{\varphi'(t_2)}{1!}(\tau-t_2)-\frac{\varphi''(t_2)}{2!}(\tau-t_2)^2]((\tau-t_1)^2-(\tau-t_2)^2)}{(\sqrt{1-\tau^2})(\tau-t_1)^2(\tau-t_2)^2}d\tau+$$

$$+\int\limits_{[-1,1]\backslash l}\frac{[\varphi(\tau)-\varphi(t_2)-\frac{\varphi'(t_2)}{1!}(\tau-t_2)-\frac{\varphi''(t_2)}{2!}(\tau-t_2)^2]((\tau-t_1)^2-(\tau-t_2)^2)}{(\sqrt{1-\tau^2})(\tau-t_1)^2(\tau-t_2)^2}d\tau+$$

$$+\int\limits_{[-1,1]}\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}\left[\left(\varphi(\tau)-\varphi(t_2)-\frac{\varphi'(t_2)}{1!}(\tau-t_2)-\frac{\varphi''(t_2)}{2!}(\tau-t_2)^2\right)-\right.$$

$$\left.-(\varphi(\tau)-\varphi(t_1)-\frac{\varphi'(t_1)}{1!}(\tau-t_1)-\frac{\varphi''(t_1)}{2!}(\tau-t_1)^2)\right]\frac{d\tau}{(\tau-t_1)^2}+$$

$$+\frac{\pi}{2}[\varphi''(t_2)-\varphi'(t_1)]=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5.$$

Оценим каждое из слагаемых $I_1\div I_5$ в отдельности.

Выражения I_1 и I_2 оцениваются одинаково. Поэтому остановимся на оценке I_1. Для определенности предположим, что $t_1\in[-1,0]$. Нужно рассмотреть два случая: 1) точка $-1\in B(t_1,\rho)$, 2) точка $-1\notin B(t_1,\rho)$.

Рассмотрим первый случай. Очевидно,

$$|I_1| \leq \int\limits_l \left|\varphi(\tau) - \varphi(t_2) - \frac{\varphi'(t_2)}{1!}(\tau - t_2) - \frac{\varphi''(t_2)}{2!}(\tau - t_2)^2\right| \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau - t_2)^2} =$$

$$= \int\limits_l |\varphi''(\xi) - \varphi''(t_2)| \frac{d\tau}{2\sqrt{1-\tau^2}} \leq Ch^{\alpha+1/2}.$$

Рассмотрим второй случай:

$$|I_1| \leq \int\limits_l |\varphi''(\xi) - \varphi''(t_2)| \frac{d\tau}{2\sqrt{1-\tau^2}} =$$

$$= Ch^{\alpha} \left[\int\limits_{t_1-\rho}^{t_1} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \int\limits_{t_1}^{t_1+\rho} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}\right] \leq Ch^{\alpha+1/2}.$$

Приступим к оценке выражения I_3. Здесь также нужно рассмотреть два случая: 1) точка $-1 \in B(t_1, \rho)$, 2) точка $-1 \notin B(t_1, \rho)$.

В первом случае

$$|I_3| \leq Ch \int\limits_{t_1+\rho}^{1} |\varphi''(\xi) - \varphi''(t_2)| \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}|\tau - t_1|^2} \leq$$

$$\leq Ch \int\limits_{t_1+\rho}^{1} |\xi - t_2|^{\alpha} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}|\tau - t_1|^2} \leq$$

$$\leq Ch \int\limits_{t_1+\rho}^{1} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}|\tau - t_1|^{2-\alpha}} \leq Ch \int\limits_{t_1+\rho}^{1} \frac{d\tau}{|\tau - t_1|^{2{,}5-\alpha}} = Ch^{\alpha-1/2}.$$

Во втором случае

$$|I_3| \leq Ch \left[\int\limits_{-1}^{t_1-\rho} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}|\tau - t_1|^{2-\alpha}} + \int\limits_{t_1+\rho}^{1} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}|\tau - t_1|^{2-\alpha}}\right] \leq$$

$$\leq Ch \left[\sum_{k=0}^{n_1-2} \int\limits_{\Delta_k} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}|\tau - t_1|^{2-\alpha}} + \sum_{k=n_1+2}^{n-1} \int\limits_{\Delta_k} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}|\tau - t_1|^{2-\alpha}}\right] \leq$$

$$\leq Ch \left[\sum_{k=0}^{n_1-2} \frac{1}{(n_1 - 2 - k)^{2-\alpha} h^{2-\alpha}} \int\limits_{\Delta_k} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=n_1+2}^{n-1} \frac{1}{(k-n)^{2-\alpha} h^{2-\alpha}} \int\limits_{\Delta_k} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}\right] \leq Ch^{\alpha-1/2}.$$

Из последних двух оценок следует, что $|I_3| \leq Ch^{\alpha-1/2}$.

Приступим к оценке выражения I_4. Очевидно,

$$|I_4| = \left| \int\limits_{[-1,1]} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} (\frac{\varphi''(t_1)}{2!}(\tau - t_1)^2 - \frac{\varphi''(t_2)}{2!}(\tau - t_2)^2) \frac{d\tau}{(\tau - t_1)^2} \right| \leq$$

$$\leq \left| \int\limits_{[-1,1]} \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} (\varphi''(t_1) - \varphi''(t_2)) d\tau \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_{[-1,1]} \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \varphi''(t_2)((\tau - t_1)^2 - (\tau - t_2)^2) \frac{d\tau}{(\tau - t_1)^2} \right| \leq$$

$$\leq Ch^\alpha + \left| \int\limits_{[-1,1]} \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \varphi''(t_2)(2\tau(t_2 - t_1) + (t_1^2 + t_2^2)) \frac{d\tau}{(\tau - t_1)^2} \right| = Ch^\alpha.$$

Замечание. Здесь использована формула (2.1).

Собирая полученные оценки, убеждаемся, что в предположении, что $x(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\varphi(t)$, $\varphi(t) \in W^2 H_\alpha(M)$, интеграл $(Hx)(t) \in H_\gamma, \gamma < \alpha - 1/2$.

Введем пространство X_1 функций $x(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}\varphi(t)$, $\varphi(t) \in W^2 H_\alpha(M), \alpha > 1/2$ с нормой $||x(t)|| = \max\limits_{-1 \leq t \leq 1} |\varphi(t)| + \max\limits_{-1 \leq t \leq 1} |\varphi'(t)| + \max\limits_{-1 \leq t \leq 1} |\varphi''(t)| + \sup\limits_{t_1 \neq t_2} \frac{|\varphi''(t_1) - \varphi''(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\alpha}$ и пространство Y функций $y(t) \in H_\gamma, \gamma < \min(\alpha - 1/2)$ с нормой $||y(t)|| = \max\limits_{-1 \leq t \leq 1} |y(t)| + \sup\limits_{t_1 \neq t_2} \frac{|y(t_1) - y(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\gamma}$.

Теорема 2.2. Пусть $x(t) = (1-t^2)^{-1/2}\varphi(t),\ \varphi(t) \in W^2 H_\alpha(M), \alpha > 1/2$. Оператор Hx отображает пространство X_1 в пространство Y, причем $\|Hx\|_Y \leq K\|x\|_{X_1}$, $K = \|H\|$.

3. О разрешимости гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода

В данном разделе исследуется вопрос о разрешимости гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода. Рассматриваются гиперсингулярные интегральные уравнения с особенностями второго порядка, т.к. известные в настоящее время приложения гиперсингулярных интегральных уравнений в физике и технологиях описываются, в основном, уравнениями такого вида.

Обозначим через $T_n(t)$ ортонормальные с весом $(1-t^2)^{-1/2}$ полиномы Чебышева первого рода: $T_0(t) = \frac{1}{\pi^{1/2}}$, $T_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n \arccos t), n = 1, 2, ...$

Обозначим через $U_n(t)$ ортонормальные с весом $\sqrt{1-t^2}$ полиномы Чебышева второго рода:

$$U_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin[(n+1)\arccos t]}{\sqrt{1-t^2}}, n = 0, 1, ...$$

Рассмотрим характеристическое гиперсингулярное интегральное уравнение

$$K^0 x \equiv \int\limits_{-1}^{1} \frac{x(\tau)d\tau}{(\tau - t)^2} = f(t). \tag{3.1}$$

Будем исследовать разрешимость уравнения (3.1) в предположении, что его решение $x(t)$ имеет вид: а) $x(t) = \sqrt{1-t^2}\varphi(t)$, б) $x(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\varphi(t)$.

Вначале рассмотрим случай, когда $x(t) = \sqrt{1-t^2}\varphi(t)$. Предположим, что функция $\varphi(t)$ разлагается в сходящийся ряд

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k U_k(t). \tag{3.2}$$

Найдем условия, которые достаточно наложить на функцию $\varphi(t)$ для того, чтобы при $t \in (-1, 1)$ выполнялось равенство

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-\tau^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k U_k(\tau)}{(\tau - t)^2} d\tau =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-\tau^2} U_k(\tau)}{(\tau - t)^2} d\tau = -\pi \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (k+1) U_k(t). \tag{3.3}$$

Прежде всего определим условия, при которых ряд в правой части предыдущей формулы сходится при $-1 < t < 1$.

Известно [16], что

$$|U_n(t) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, t \in (-1, 1), n = 0, 1, 2, ... \tag{3.4}$$

$$U_n(\pm 1) = (\pm 1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} (n+1), n = 0, 1, ... \tag{3.5}$$

Пусть $\varphi(t) \in W^2 H_\alpha(M)$.

Тогда коэффициенты α_k разложения (3.2) оцениваются неравенством

$$|\alpha_k| \leq \frac{C}{k^{2+\alpha}}. \tag{3.6}$$

В самом деле,

$$|\alpha_k| = \left| \int_{-1}^{1} \varphi(t) U_k(t) \sqrt{1-t^2} dt = \right.$$

$$= \left| \int_{-1}^{1} \varphi(t) \sin[(k+1)\arccos t] dt = \left| \int_{0}^{\pi} \varphi(\cos\theta) \sin(k+1)\theta \sin\theta d\theta \right| \leq \right.$$

$$\leq \left| \frac{1}{2} \int_{0}^{\pi} \varphi(\cos\theta) \cos(k\theta) d\theta \right| + \left| \frac{1}{2} \int_{0}^{\pi} \varphi(\cos\theta) \cos(k+2)\theta d\theta \right| = I_1 + I_2. \tag{3.7}$$

Тогда как оба интеграла оцениваются одинаково, остановимся на оценке первого из них. Интегрируя по частям, имеем

$$I_1 = \left| \frac{1}{k} \int_{0}^{\pi} \varphi'(\cos\theta) \sin\theta \sin(k\theta) d\theta \right| = \left| \frac{C}{k^2} \int_{0}^{\pi} \varphi''(\cos\theta) \cos(k\theta) d\theta \right|. \tag{3.8}$$

Оценим интеграл $I_{11} = \int\limits_0^\pi \varphi''(\cos\theta) \cos n\theta d\theta$. Очевидно

$$I_{11} = \int_{-\pi/n}^{\pi-\pi/n} \varphi''\left(\cos(v + \frac{\pi}{n})\right) \cos(nv + \pi) dv = -\int_{-\pi/n}^{\pi-\pi/n} \varphi''\left(\cos(v + \frac{\pi}{n})\right) \cos nv dv.$$

Тогда

$$|I_{11}| = \frac{1}{2}\left|\int_0^{\pi} \varphi''(\cos\theta)\cos n\theta d\theta - \int_{-\pi/n}^{\pi-\pi/n} \varphi''(\cos(\theta+\frac{\pi}{n}))\cos n\theta d\theta\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_{-\pi/n}^{0} \varphi''\left(\cos(\theta+\frac{\pi}{n})\right)\cos n\theta d\theta\right| + \left|\int_{\pi-\pi/n}^{\pi} \varphi''(\cos\theta)\cos\theta d\theta\right| +$$

$$+\left|\int_0^{\pi-\pi/n} (\varphi''(\cos\theta)-\varphi''(\cos(\theta+\frac{\pi}{n})))\cos n\theta d\theta\right| \leq \frac{C}{n^{\alpha}}. \tag{3.9}$$

Из неравенств (3.7)–(3.9) следует неравенство (3.6).

Аналогичным образом доказывается, что если $\varphi(t) \in W^r H_\alpha(M), r = 2, 3, \ldots,$ то $|\alpha_k| \leq \frac{C}{k^{r+\alpha}}$.

Из неравенств (3.4), (3.6) следует, что при любых t, $-1 < t < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|(k+1)|U_k(t)| \leq \frac{C}{\sqrt{1-t^2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\alpha}} = \frac{C}{\sqrt{1-t^2}},$$

т.е. ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k(k+1)U_k(t)$ абсолютно сходится и правая часть формулы является функцией равномерно непрерывной на сегменте $[-1+\delta, 1-\delta]$ при любом $0 < \delta < 1$.

Исследуем условия при которых справелива формула (3.3).

Приведем следующее неравенство, принадлежащее С.Н. Бернштейну.

Теорема [16]. Если полином $P_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k t^n$ с вещественными коэффициентами на сегменте $[a, b]$ удовлетворяет неравенству $|P(t)| \leq M$, то его производная на интервале (a, b) удовлетворяет неравенству $|P'(t)| \leq Mn/\sqrt{(b-t)(t-a)}$.

Обозначим $S_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k U_k(t)$, $\widetilde{S}_n(t) = -\pi \sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k(k+1)U_k(t)$.

Очевидно,

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-\tau^2}S_n(\tau)}{(\tau-t)^2} d\tau = \widetilde{S}_n(t).$$

Пусть $\varphi(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k U_k(t)$. Обозначим через $\widetilde{\varphi}(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} -\pi\alpha_k(k+1)U_k(t)$.

Покажем, что

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-\tau^2}\varphi(\tau)}{(\tau-t)^2} d\tau = \widetilde{\varphi}(t).$$

Рассмотрим условия при которых возможна регуляризация в левой части равенства (3.3). Для использования формулы (1.2) необходима сходимость при $-1 < t < 1$ рядов $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k U_k(t)$ и $\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k U_k(t)\right)'$.

Из предположения, что $\varphi(t) \in W^6 H_\alpha(M)$ следует, что ряды $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k U_k(t)$ и $\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k U_k(t)\right)'$ сходятся.

Сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k U_k(t)$ очевидна. Пусть $t \in [c, d] \subset (a, b)$. Докажем равномерную сходимость ряда $\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k U'_k(t)\right)$ в сегменте $[c, d]$.

Из неравенства Бернштейна следует, что

$$|U'(t)| \leq k(\max_{c\leq t\leq d}|U_k(t)|)/\sqrt{(d-t)(t-c)}.$$

Так как $|U_k(t)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, а $|\alpha_k| \leq \frac{C}{k^{6+\alpha}}$, то

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k U_k'(t)\right) \leq \frac{C}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{(d-t)(t-c)}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{5+\alpha}}.$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\alpha_k U_k'(t)$ равномерно сходится на сегменте $[c,d]$ и на этом сегменте

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k U_k(t)\right)' = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k U_k'(t).$$

Осталось проверить существование интеграла

$$\left|\int\limits_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\tau^2}}{(\tau-t)^2}(\varphi(\tau)-\varphi(t)-\frac{\varphi'(t)}{1!}(\tau-t)d\tau\right| =$$

$$= \left|\int\limits_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\tau^2}}{(\tau-t)^2}\frac{\varphi''(\xi)(\tau-t)^2}{2!}d\tau\right| \leq \left|\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-\tau^2}\frac{|\varphi''(\xi)|}{2!}d\tau\right|,$$

где $\varphi(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\alpha_k U_k(t)$.

Для сходимости последнего интеграла достаточно потребовать выполнения неравенства $|\varphi''(\xi)| \leq B, B = constant$.

Из неравенств (3.4), (3.5) следует, что $|U_k''(t)| \leq Ck^2 \max\limits_{-1\leq t\leq 1}|U_k'(t)(| \leq Ck^4 \max\limits_{-1\leq t\leq 1}|U_k(t)| \leq ck^5$.

Таким образом, для сходимости ряда $(\sum\limits_{k=0}^{\infty}\alpha_k U_k)''$ достаточно, чтобы $|\alpha_k| \leq \frac{c}{k^{6+\alpha}}, \alpha > 0$.

Для выполнения этого неравенства достаточно, чтобы $\varphi(t) \in W^6H_\alpha(M)$.

Таким образом, на классе функций $W^6H_\alpha(M)$ справедлива формула (3.3).

Весовая функция $\sqrt{1-t^2}$.

Рассмотрим уравнение

$$Hx = \int\limits_{-1}^{1}\frac{x(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} = f(t). \tag{3.10}$$

Будем искать решение уравнения (3.10) в виде функции $x(t) = \sqrt{1-t^2}\varphi(t)$, где $\varphi(t) \in W^6H_\alpha(M)$.

При этом предположении функция $\varphi(t)$ разлагается в ряд по полиномам Чебышева второго рода.

Следовательно, решение уравнения (3.10) будем искать в виде ряда

$$x(t) = \sqrt{1-t^2}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k U_k(t), \tag{3.11}$$

где $U_k(t)-$ полиномы Чебышева второго рода k-го порядка.

Известна [13] формула

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-\tau^2}U_k(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau = -\pi(k+1)U_k(t), k=0,1,.... \tag{3.12}$$

Разложим функцию $f(t)$ в ряд по полиномам Чебышева второго рода

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k U_k(t). \tag{3.13}$$

Подставив (3.13) и (3.11) в уравнение (3.10) и воспользововашись формулой (3.12), имеем

$$-\pi\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\alpha_k U_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k U_k(t).$$

Отсюда имеем

$$\alpha_k = -\frac{f_k}{\pi(k+1)}, k=0,1,....$$

Таким образом, если правая часть уравнения (3.10) достаточно гладкая и разлагается в ряд по полиномам Чебышева второго рода, то уравнение (3.10) имеет единственное решение в классе достаточно гладких функций. Следовательно в этих классах функций оператор H непрерывно обратим и для обоснования численных методов решения гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода может быть использована общая теория приближенных методов [17].

Приближенные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода с весовой функцией $(1-t^2)^{1/2}$ представлены в работе [7].

Весовая функция $(1-t^2)^{-1/2}$**.**

Рассмотрим уравнение (3.1), решение которого будем искать в виде функции $x(t) = (1-t^2)^{-1/2}\varphi(t)$. Будем считать, что правая часть $f(t)$ уравнения (3.1) достаточно гладкая функция и что функция $\varphi(t)$ также обладает гладкостью, достаточной для дальнейшего.

Будем искать решение уравнения (3.1) в виде функции

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k T_k(t). \tag{3.10}$$

Известна формула [13]

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t)^2}d\tau = \left[\frac{\pi}{1-t^2}[-\frac{n-1}{2}U_n(t) + \frac{n+1}{2}U_{n-2}(t)]\right]. \tag{3.11}$$

Подставив (3.10) в левую часть уравнения (3.1) имеем

$$\frac{\pi}{1-t^2}\left[\sum_{n=2}^{\infty}\alpha_n\left(-\frac{n-1}{2}U_n(t) + \frac{n+1}{2}U_{n-2}(t)\right)\right] = f(t). \tag{3.12}$$

Уравнение (3.12) эквивалентно следующему

$$\pi\left[\sum_{n=2}^{\infty}\alpha_n(-\frac{n-1}{2}U_n(t) + \frac{n+1}{2}U_{n-2}(t))\right] = (1-t^2)f(t) = f^*(t). \tag{3.13}$$

Разложим функцию $f^*(t)$ в ряд по полиномам Чебышева второго рода

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k U_k(t). \tag{3.14}$$

Подставив (3.14) в (3.13) и приравнивая коэффициенты у полиномов одного и того же порядка, получаем две рекуррентные формулы

$$\alpha_2 = \frac{2}{3\pi} f_0,\ \alpha_{n+2} = \frac{2}{\pi(n+3)} f_n + \frac{n-1}{n+3}\alpha_n, n = 2, ... \tag{3.15}$$

$$\alpha_3 = \frac{f_1}{2\pi} f_0,\ \alpha_{2n+3} = \frac{1}{\pi(n+2)} f_{2n+1} + \frac{n}{n+4}\alpha_{2n+1}, n = 1, 2, \ldots \tag{3.16}$$

Таким образом, получено решение уравнения (3.1).

Из (3.15), (3.16) следует, что первые два элемента ряда (3.10) могут быть произвольными.

Таким образом, доказано, что если $f(t)$ достаточно гладкая функция, то на классе функций вида $(1-t^2)^{-1/2}\varphi(t)$, оператор H имеет правый обратный оператор. Так как правый оператор не единственный, то необходимо выделить конкретный правый оператор.

Следовательно для получения однозначного решения уравнения (3.1) нужно на него наложить дополнительные условия.

Естественно ввести следующие условия:

$$\int_{-1}^{1} x(t)dt = K_0, K_0 = const.; \int_{-1}^{1} x(t)T_1(t)dt = K_1, K_1 = const.$$

Эти условия эквивалентны тому, что в выражении (3.10) полагаем $\alpha_0 = K_0, \alpha_1 = K_1$.

При этих условиях и в предположении, что функция $f(t)$ достаточно гладкая, уравнение (3.1) однозначно разрешимо.

С учетом этого замечания построение и обоснование коллокационного метода и метода механических квадратур для приближенного решения гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода проводится на базе общей теории приближенных методов [17].

Приближенные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода с весовой функцией $(1-t^2)^{-1/2}$ представлены в работе [7]. В этой работе обоснование приближенных методов проводится в общем виде без выделеия конкретного правого оператора.

Литература

1. Гохберг, И.Ц., Фельдман И.А. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. - М.: Наука. 1971. 352 с. English translation, Transl. Math. Monographs, Vol. 41, Amer. Math. Soc., Providence R.I. 1974.

2. Mikhlin, S.G. Singular Integral Operatoren. S. Prossdorf. Acad.-Verl., Berlin, 1980.

3. Бойков И.В. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений. Издательство ПГУ. 2004. 316 с.

4. Boykov I.V. Numerical methods for solution of singular integral equations, arXiv: 1610.09611[math.NA]. 182 p.

5. Boykov I.V.,Ventsel E.S., Boykova A.I. An approximate solution of hypersingular integral equations// Applied Numerical Mathematics. Volume 60 . Number 6, (2010) P. 607-628.

6. Boykov I.V., Ventsel E.S., Roudnev V.A., Boykova A.I. An approximate solution of nonlinear hypersingular integral equations//Applied Numerical Mathematics. Volume 68, December 2014, Pages 1-21.

7. Бойков И. В., Бойкова А.И., Сёмов М.А. Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико -математические науки. Математика. 2015. № 3. С. 11 -27.

8. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. – М. : Наука, 1978. – 351 с.

9. Hadamard J. Lecons sur la Propagation des Ondes et les Equations de l'Hydrodynamique. Herman. – Paris. 1903. 320 p. (reprinted by Chelsea. - New York. -1949).

10. Адамар Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики. – М. : Советское радио. 1970. 152 с.

11. Чикин, Л. А. Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений // Уч. записки Казан. гос. ун-та. – 1953. – Т. 113. – Кн. 10. – С. 57 – 105.

12. Бойков И.В. Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Часть вторая. Гиперсингулярные интегралы. Пенза: Издательство Пензенского государственного университета. 2009. 252 с.

13. Kaya A. C., Erdogan E. On the solution of integral equations with strongly singular kernels Quatery of applied mathematics. – 1987. – V. 45. – № 1. – P. 105 – 122.

14. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. – М.: ГИФМЛ. – 1958. Вып. 1. – 439 с.

15. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

16. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. – М. ; Л. : ГИФМЛ, 1949. – 688 с.

17. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. – М.: Наука. 1977. 750 с.

MSC 65R20

Approximate solution of some types of hypersingular integral equations

I.V. Boikov [1], A.I. Boikova [1]

Penza State University [1]

Abstract: Importance of solving hypersingular integral equations is justified by numerous applications and intense growth of the field during the last century since Hilbert and Poincare created the theory of singular integral equations. The theory is associated with numerous applications of singular and hypersingular integral equations, as well as with Riemann boundary value problem. The Riemann boundary value problem, singular, and hypersingular integral equations are broadly used as basic techniques of mathematical modeling in physics (quantum field theory, theory of short and long-range interaction, solution theory), theory of elasticity and thermoelasticity, aerodynamics and electrodynamics and many other fields.
A closed-form solution of singular and hypersingular integral equations is only possible in exceptional cases. A comprehensive presentation and an extensive literature survey associated with all methods of solution of singular integral equations of the first and second kinds can be found in [1–4]. The methods of solution of hypersingular integral equations are less elaborated [5], [6] .
In this paper,we study smoothness of solutions of hypersingular integral equations and their solvability.Also we propose an approach to approximate solving hypersingular integral equations. Using the collocation method and the method of mechanical quadrature each of these problems is approximated with systems of algebraic equations.

Keywords: Hypersingular integral equations, collocations, mechanical quadratures.

References

1. Gohberg I.C. and Fel'dman I.A. Convolution Equation and Projection Methods for Their Solution, Nauka, Moscow, 1971; English translation, Transl. Math. Monographs, Vol. 41, Amer. Math. Soc., Providence R.I. 1974.
2. Mikhlin S.G., Prossdorf S. Singular Integral Operatoren, Acad.-Verl., Berlin, 1980.
3. Boikov I.V., Approximate Methods of Solution of Singular Integral Equations, The Penza State University, Penza, 2004 (in Russian).
4. Boykov I.V., Numerical methods for solution of singular integral equations, arXiv: 1610.09611[math.NA]. 182 p.
5. Boykov I.V., Ventsel E.S., Boykova A.I. An approximate solution of hypersingular integral equations// Applied Numerical Mathematics. Volume 60. Number 6, (2010) P. 607-628.
6. Boykov I.V., Ventsel E.S., Roudnev V.A., Boykova A.I. An approximate solution of nonlinear hypersingular integral equations//Applied Numerical Mathematics. Volume 68, December 2014, P. 1-21.
7. Boikov I.V., Boikova A.I., Syomov M.A. Approximate solution of hypersingular integral equations of the first kind/Report of Higher Education Institutions. Physics and Mathematical Science. 2015. № 3. C. 11-27. (in Russian).
8. Hadamard J. Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations, Dover Publ. Inc., New York, 1952.

9. Hadamard J. Lecons sur la Propagation des Ondes et les Equations de l'Hydrodynamique. Herman. – Paris. 1903. 320 p. (reprinted by Chelsea. - New York. -1949).

10. Hadamard J. Investigation of the psychology of the invention process in the field of mathematics. - M.: Soviet radio. 1970. 152 c.

11. Chikin L. A. Special cases of the Riemann boundary value problems and singular integral equations, Scientific Notes of the Kazan State University (10) V. 113 (1953) pp. 53 - 105. (in Russian).

12. Boikov I. V. Approximate methods for evaluation of singular and hypersingular integrals, Part 2, Hypersingular integrals, Penza, State University Press, Penza, 2009. (in Russian).

13. Kaya A. C., Erdogan E. On the solution of integral equations with strongly singular kernels Quatery of applied mathematics. 1987. V. 45. № 1. P. 105 – 122.

14. Gelfand I. M., Shilov G. E. Generalized functions and actions above them. M.: GIFML. 1958.V. 1. 439 p.

15. Gakhov F. D. Boundary value problems, Dover Publication, USA, 1990, 561 p.

16. Natanson I. P. Constructive Function Theory. M.-L. GIFML. 1949. 688 c.

17. Kantorowisch L. V., Akilow G. P. Functional analysis in normed spaces. 1964. Pergamon Press, New York.