XIII Международная научная конференция "Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании", Саранск, 12-16 июля 2017.
XIII International scientific conference "Differential equations and their applications in mathematical modeling", Saransk, July 12-16, 2017.

УДК 517.9

К частичной стабилизации линейных систем

В.И. Никонов [1]

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва[1]

Аннотация: Предложен геометрический подход к решению задачи стабилизации линейных стационарных динамических систем относительно части переменных. Искомое управление представляется в виде суммы двух управлений, одно из которых решает задачу декомпозиции исходной системы, другое решает задачу стабилизации выделенной подсистемы.

Ключевые слова: динамическая система, подсистема, декомпозиция, стабилизация, управление, подпространство.

Рассматривается линейная управляемая стационарная динамическая система вида

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Ay + Bz + Pu, \\ \dot{z} &= Cy + Dz + Qu, \end{aligned} \tag{1}$$

где $y \in R^m, z \in R^p, u \in R^r, A, B, C, D$–матрицы соответствующих размеров.

Постановка задачи. Требуется найти управление вида $u = u_1 + u^*$, где $u_1 = \Gamma z$–управление, решающее задачу декомпозиции системы (1), а $u^* = K_1 y + K_2 z$–управление, решающее задачу стабилизации выделенной подсистемы.

Данная задача рассматривалась в работах В.И. Воротникова [1] , [2], где сформулированы условия решения в терминах существования управления u_1, приводящего исследуемую систему к μ-системе.

В данной работе предлагаются необходимые и достаточные условия существования такого управления и приводится алгоритм его построения. Полученные результаты опираются на исследования, проводимые в работах [3] , [4].

Решение задачи. Предположим, что исходная динамическая система в некотором базисе пространства имеет вид (1). Очевидно, что исследуемые свойства динамической системы не должны зависеть от выбора базиса.

Перейдя от системы (1) с помощью неособого преобразования $z = S\overline{z}$ приходим к системе

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Ay + BS\overline{z} + Pu, \\ \dot{\overline{z}} &= S^{-1}Cy + S^{-1}DS\overline{z} + S^{-1}Qu. \end{aligned} \tag{2}$$

Пусть искомое управление имеет вид

$$u = \overline{\Gamma}\overline{z} + u^*. \tag{3}$$

С учетом (3) приходим к системе

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Ay + (BS + P\overline{\Gamma})\overline{z} + Pu^*, \\ \dot{\overline{z}} &= S^{-1}Cy + S^{-1}(DS + Q\overline{\Gamma})\overline{z} + S^{-1}Qu^*. \end{aligned} \tag{4}$$

В результате решения задачи возникают два вопроса: Существует ли два линейных подпространства $L \subset R^p$ и $U \subset R^r$, такие, что выполнены условия:

$$\forall s \in L \exists \overline{\gamma} \in U : Bs + P\overline{\gamma} = 0 \text{ и } Ds + Q\overline{\gamma} \in L?$$

Если существуют, то как их отыскать?

Покажем какова же связь исходной задачи с выше сформулированной геометрической задачей.

Предположим, что существует управление $u = \overline{\Gamma}\overline{z}$ удовлетворяющее условиям

$$rang\{(B+P\Gamma),(B+P\Gamma)(D+Q\Gamma),\dots,(B+P\Gamma)(D+Q\Gamma)^{p-1}\} < p,$$

которое можно представить в виде:

$$\bigcap_{i=1}^{p} ker(B+P\Gamma)(D+Q\Gamma)^{i-1} \neq 0.$$

Откуда, немедленно приходим к системе уравнений

$$\begin{array}{rcl} (B+P\Gamma)s & = & 0, \\ (B+P\Gamma)(D+Q\Gamma)s & = & 0, \\ \dots & \dots & \dots \\ (B+P\Gamma)(D+Q\Gamma)^{p-1}s & = & 0. \end{array}$$

Введя обозначение $\Gamma s = \gamma$ и учитывая специфику полученной системы линейных алгебраических уравнений получаем систему уравнений

$$L_i s + P_i \gamma = 0,$$

где

$$L_i = \begin{pmatrix} L_{i-1} \\ \Phi_{i-1}^T L_{i-1} D \end{pmatrix}, P_i = \begin{pmatrix} P_{i-1} \\ \Phi_{i-1}^T L_{i-1} Q \end{pmatrix}, i = \overline{1,p}.$$

Таким образом, приходим к основному результату:

Для того, чтобы существовало управление $u = \overline{\Gamma}z$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$rang\{\Phi_{p-1}^T L_{p-1}\} < p.$$

Отметим, что в результате решения поставленной задачи найдены искомые подпространства геометрической задачи:

$$L = ker\{\Phi_{p-1}^T L_{p-1}\}, U = ker\{\Psi^T P_{p-1}\}.$$

где Ψ–фундаментальная матрица решений системы $L_{p-1}^T \psi = 0$.

Наконец, для нахождения искомого управления достаточно выбрать в подпространстве L некоторый базис и решить систему уравнений

$$P_{p-1}\gamma = -L_{p-1} ker\{\Phi_{p-1}^T L_{p-1}\},$$

решения которой и составят матрицу $\overline{\Gamma}$.

С учетом найденного управления система (4) принимает вид

$$\begin{array}{rcl} \dot{y} & = & Ay + B_1\overline{z_1} + Pu^*, \\ \dot{\overline{z_1}} & = & C_1 y + B_1\overline{z_1} + Q_1 u^*, \\ \dot{\overline{z_2}} & = & C_2 y + D_2\overline{z_1} + D_3\overline{z_2} + Q_2 u^*, \end{array}$$

и задача y-стабилизации свелась к задаче стабилизации относительно всех переменных системы

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Ay + B_1\overline{z_1} + Pu^*, \\ \dot{\overline{z}}_1 &= C_1 y + B_1\overline{z_1} + Q_1 u^*. \end{aligned} \tag{5}$$

При этом управление u_1 принимает вид

$$u_1 = \overline{\Gamma} S^{-1} z,$$

где матрица преобразования S строится следующим образом: последние столбцы матрицы представляют собой базис подпространства L, а остальные выбираются произвольно, но так, чтобы $|S| \neq 0$.

Теперь, если предположить, что система (5) стабилизируема по всем переменным управлением u^*, то исходная система (1) будет y-стабилизируема управлением

$$u = \overline{\Gamma} S^{-1} z + u^*.$$

Литература

1. Воротников В. И. О полной управляемости и стабилизации движения относительно части переменных // Автоматика и телемеханика. 1982. № 3. С. 15-21.

2. Воротников В. И. Об устойчивости и стабилизации движения относительно части переменных // ПММ. 1982. Т. 46. № 6. С. 914-923.

3. Никонов В. И. Геометрический аспект устойчивости линейных систем относительно части переменных // Журнал Средневолжского математического общества. 2011. Т. 13. № 2. С. 95-99.

4. Никонов В. И. Необходимые и достаточные условия устойчивости линейных систем относительно заданной части переменных // Журнал Средневолжского математического общества. 2013. Т. 15. № 2. С. 66-69.

MSC 34H05 34H15

On the partial stabilization of linear systems

V.I. Nikonov [1]

National Research Ogarev Mordovia State University [1]

Abstract: Geometrical approach to the decision of the task of stabilizing of the linear stationary dynamic systems relatively is offered parts of variables. Required control is presented in the form of the amount of two controls, one of which solves the problem of decomposition of the initial system, another solves the problem of stabilizing of the selected subsystem.

Keywords: dynamic system, subsystem, decomposition, stabilization, control, subspace.

References

1. Vorotnikov V. I. O polnoy upravlyaemosti i stabilizatsii dvizheniya otnositel'no chasti peremennykh [On complete controllability and stabilization of motion with respect to some of the variables] // Avtomatica i telemechanika [Automation and Remote Control]. 1982. No 3. P. 15-21.

2. Vorotnikov V. I. Ob ustoychivosti i stabilizatsii dvizheniya otnositelno chasti peremennykh [On stability and stabilization of motion with respect to some of the variables] // Prikladnaya Matematika i Mekhanika [Journal of Applied Mathematics and Mechanics]. 1982. V. 46. No 6. P. 914-923.

3. Nikonov V. I. Geometricheskyi aspekt ustoychivosti lineinykh sistem otnositel'no chasti peremennykh [Geometric aspect of partial stability for linear systems] // Zhurnal Srenevolzhskogo matematicheskogo obshchestva [Journal of the Middle-Volga mathematical society]. 2011. V. 13. No 3. P. 95-99.

4. Nikonov V. I. Neobkhodimyi i dostatochnye uslovia ustoychivosti lineinykh sistem otnositel'no zadannoy chasti peremennykh [A necessary and sufficient conditions for a partial stability of linear systems] // Zhurnal Srenevolzhskogo matematicheskogo obshchestva [Journal of the Middle-Volga mathematical society]. 2013. V. 15. No 2. P. 66-69.