*XIII Международная научная конференция "Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании", Саранск, 12-16 июля 2017.*
*XIII International scientific conference "Differential equations and their applications in mathematical modeling", Saransk, July 12-16, 2017.*

УДК 539.3:533.6:517.9

# Об управлении динамикой трубопровода в случае его динамической неустойчивости*

П.А. Вельмисов[1], А.В. Гладун[2]

Ульяновский государственный технический университет[1], Ульяновский институт гражданской авиации имени Главного маршала авиации Б.П. Бугаева[2]

*Аннотация:* В случае динамической неустойчивости механической системы, представляющей собой полый упругий стержень с протекающей внутри него жидкостью или газом (трубопровод), рассмотрена задача управления. Установлена управляемость системы по линейному приближению и построены управления, обеспечивающие гашение колебаний трубопровода. Приведены результаты численного моделирования поведения механической системы при заданных параметрах под действием построенных управлений.

*Ключевые слова:* упругий трубопровод, динамика, управляемость, управление по линейному приближению, уравнения с частными производными, метод Галеркина

## 1. Введение

Составной частью многих конструкций, приборов, аппаратов, установок и т.д. являются трубопроводы, по которым протекает поток жидкости или газа. Поток, воздействуя на трубопровод, может возбуждать его колебания. Амплитуда, скорость или частота его колебаний могут увеличиваться с течением времени до значений, нарушающих надежность эксплуатации конструкций, вплоть до разрушения конструкций или их элементов. Таким образом, при эксплуатации механических систем с трубопроводами необходимо контролировать их динамику. С одной стороны, при проектировании таких конструкций можно заранее рассмотреть задачу определения параметров механической системы, обеспечивающих динамическую устойчивость и нормальную работу конструкций, не приводящих к их разрушению или возникновению аварийной ситуации. Множество работ посвящено исследованию подобных задач динамической устойчивости трубопровода [1-16]. С другой стороны, можно рассмотреть задачу управления параметрами трубопровода [17], чему и посвящена данная статья. Управление параметрами предполагает активное воздействие на трубопровод с целью погашения возникающих в нем колебаний. В случае, когда система под действием внешних возмущений вышла из области устойчивости, такое управление может вернуть трубопровод в область динамической устойчивости и восстановить рабочее состояние механической системы.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим механическую систему, состоящую из упругого полого стержня длиной $l$ и протекающей внутри него жидкости. На плоскости $xOy$ недеформированному стержню соответствует на оси $Ox$ отрезок $[0, l]$. Скорость жидкости равна $U$ и имеет направление, совпадающее с направлением оси $Ox$. Для описания динамики трубопровода используем

*Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 15-01-08599, № 15-41-02455р_поволжье_а.

уравнение [17]

$$\begin{gathered}(m_0+m_*)\,\ddot{w}+\left(EJw''\left(1-\frac{3}{2}\left(w'\right)^2\right)\right)''+m_*U^2w''\left(1-\frac{3}{2}\left(w'\right)^2\right)+\\ +Nw''\left(1+\frac{1}{2}\left(w'\right)^2\right)+2m_*U\dot{w}'\left(1+\frac{1}{2}\left(w'\right)^2\right)+\alpha\dot{w}''''-\beta\ddot{w}''+f\left(x,t,w,\dot{w}\right)=0\end{gathered}\tag{1}$$

где коэффициенты $m_0$, $m_*$, $J$ вычисляются по формулам:

$$m_0=\rho_0\pi\left(R_*^2-R_0^2\right),\quad m_*=\rho_*\pi R_0^2,\quad J=\frac{\pi}{4}\left(R_*^4-R_0^4\right).$$

Штрих и точка сверху обозначают частные производные по координате $x$ и времени $t$ соответственно. В уравнении (1) $w\left(x,t\right)$– деформация (прогиб) в сечении $x$ в момент времени $t$; $E$ – модуль упругости; $U$, $m_*$, $\rho_*$ – скорость, масса жидкости (газа) на единицу длины и плотность жидкости (газа); $l$ – длина трубы между опорами; $R_*$, $R_0$ – внешний и внутренний радиусы трубопровода; $m_0$, $\rho_0$ – масса металла на единицу длины трубы и плотность металла; $N$ – сжимающая ($N>0$) или растягивающая ($N<0$) сила; $\alpha$ – коэффициент внутреннего демпфирования; коэффициент $\beta$ учитывает инерцию вращения сечений; функция $f\left(x,t,w,\dot{w}\right)$ определяет внешнее управляющее воздействие на трубопровод.

Зададим внешнее управляющее воздействие, как функцию вида

$$f\left(x,t,w,\dot{w}\right)=u_1(t)+u_2(t)\cos\frac{\pi x}{l},\tag{2}$$

где $u_1(t)$, $u_2(t)$ – некоторые непрерывные функции (управления).

Рассмотрим задачу построения управлений, обеспечивающих гашение возникающих колебаний трубопровода в случае, когда значениям исходных параметров системы соответствует состояние динамической неустойчивости.

**Задача.** Найти для случая динамической неустойчивости системы (1) непрерывные (далее допустимые) управления $u_1(t)$, $u_2(t)$, $t\in[t_0,t_1]$, такие, что соответствующее им движение системы под действием управляющего воздействия (2) удовлетворяет условиям

$$\begin{array}{ll} w(x,t_0)=w_0(x), & \dot{w}(x,t_0)=w_1(x),\\ w(x,t_1)=0, & \dot{w}(x,t_1)=0.\end{array}\tag{3}$$

## 3. Исследование управляемости

Для построения решений уравнения (1) методом Галеркина будем задавать функцию $w\left(x,t\right)$ в виде

$$w_M\left(x,t\right)=\sum_{k=1}^{M}v_k\left(t\right)g_k\left(x\right),$$

где $\left\{g_k\left(x\right)\right\}_1^\infty$ – полная на $\left[\,0,l\,\right]$ система базисных функций, соответствующих случаю шарнирного закрепления концов трубопровода

$$w(0,t)=w(l,t)=w''(0,t)=w''(l,t)=0.$$

Как показано в работах [6], [9], при исследовании динамической устойчивости трубопровода, результаты применения метода Галеркина для случая двух ($M=2$) и большего числа приближений ($M=20$) отличаются несущественно. Выберем $g_k\left(x\right)=\sin\frac{k\pi x}{l}$ и ограничимся случаем $M=2$, тогда функция $w\left(x,t\right)$ примет вид

$$w\left(x,t\right)=v_1\left(t\right)\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)+v_2\left(t\right)\sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right).\tag{4}$$

В результате применения процедуры метода Галеркина получаем систему из двух обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $v_1(t)$ и $v_2(t)$

$$\begin{gathered}
Cv_1^3(t)+8Cv_1(t)v_2^2(t)+\frac{2}{3}Kv_1(t)v_2(t)\dot v_1(t)+\frac{1}{3}Kv_1^2(t)\dot v_2(t)-\frac{36}{7}Kv_2^2(t)\dot v_2(t)+\\
+Pv_1(t)+\frac{\pi^4\alpha}{2l^3}\dot v_1(t)+Q\ddot v_1(t)-\frac{8}{3}m_*U\dot v_2(t)+\frac{2l}{\pi}u_1(t)=0,\\
\left(16C-\frac{9\pi^6D}{l^5}\right)v_2^3(t)+\left(8C-\frac{9\pi^6D}{2l^5}\right)v_1^2(t)v_2(t)+\frac{88}{21}Kv_1(t)v_2(t)\dot v_2(t)+\\
+\frac{44}{21}Kv_2^2(t)\dot v_1(t)+Kv_1^2(t)\dot v_1(t)+\left(4P+\frac{6\pi^4D}{l^3}\right)v_2(t)+\frac{8\pi^4\alpha}{l^3}\dot v_2(t)+\\
+\left(Q+\frac{3\pi^2\beta}{2l}\right)\ddot v_2(t)+\frac{8}{3}m_*U\dot v_1(t)+\frac{4l}{3\pi}u_2(t)=0.
\end{gathered}\tag{5}$$

Для упрощения записи системы (5) введены следующие обозначения

$$P=\frac{\pi^4D}{2l^3}-\frac{\pi^2\left(m_*U^2+N\right)}{2l};\quad Q=\frac{\pi^2\beta}{2l}-\frac{l\left(m_0+m_*\right)}{2};$$
$$C=-\frac{3\pi^6D}{16l^5}+\frac{\pi^4\left(3m_*U^2-N\right)}{16l^3};\quad K=\frac{4\pi^2m_*U}{5l^2}.$$

Тогда поставленную задачу можно переформулировать для системы (5) следующим образом.

**Задача.** Найти непрерывные (далее допустимые) управления $u_1(t)$, $u_2(t)$, $t\in[t_0,t_1]$, такие, что соответствующее им движение системы (5) удовлетворяет условиям

$$\begin{array}{llll}
v_1(t_0)=v_1^{(0)}, & v_2(t_0)=v_2^{(0)}, & \dot v_1(t_0)=v_1^{(1)}, & \dot v_2(t_0)=v_2^{(1)},\\
v_1(t_1)=0, & v_2(t_1)=0, & \dot v_1(t_1)=0, & \dot v_2(t_1)=0.
\end{array}\tag{6}$$

Как следует из условий (3) и равенства (4), значения постоянных $v_1^{(0)}$, $v_2^{(0)}$, $v_1^{(1)}$, $v_2^{(1)}$ определяются из уравнений

$$v_1^{(0)}\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)+v_2^{(0)}\sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right)=w_0(x).$$
$$v_1^{(1)}\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)+v_2^{(1)}\sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right)=w_1(x).$$

Для изучения управляемости системы (5) воспользуемся достаточным условием управляемости динамической системы по линейному приближению [18], [20]. Для применения условия управляемости необходимо привести систему уравнений (5) к нормальному виду. Введем новые переменные

$$y_1=v_1(t),\quad y_2=v_2(t),\quad y_3=\dot v_1(t),\quad y_4=\dot v_2(t),$$

и перепишем систему (5) в виде

$$\begin{aligned}
&\dot y_1=y_3,\\
&\dot y_2=y_4,\\
&\dot y_3=\frac{(-1)}{Q}\left[Cy_1^3+8Cy_1y_2^2+\frac{2}{3}Ky_1y_2y_3+\frac{1}{3}Ky_1^2y_4-\frac{36}{7}Ky_2^2y_4+\right.\\
&\qquad\left.+Py_1+\frac{\pi^4\alpha}{2l^3}y_3-\frac{8}{3}m_*Uy_4+\frac{2l}{\pi}u_1(t),\right]\\
&\dot y_4=\frac{(-2)l}{(2Ql+3\pi^2\beta)}\left[\left(16C-\frac{9\pi^6D}{l^5}\right)y_2^3+\left(8C-\frac{9\pi^6D}{2l^5}\right)y_1^2y_2+\frac{88}{21}Ky_1^2y_4+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{44}{21}Ky_2^2y_3+Ky_1^3y_3+\left(4P+\frac{6\pi^4D}{l^3}\right)y_2+\frac{8\pi^4\alpha}{l^3}y_4+\frac{8}{3}m_*Uy_3+\frac{4l}{3\pi}u_2(t)\right]
\end{aligned}\tag{7}$$

Обозначим через

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + B\mathbf{u} \tag{8}$$

систему линейного приближения для (7), записанную в положении равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, где $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$. Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{P}{Q} & 0 & -\frac{\pi^4\alpha}{2Ql^3} & \frac{8m_*U}{3Q} \\ 0 & \frac{(-4)(2Pl^3+3\pi^4 D)}{l^2(2Ql+3\pi^2\beta)} & \frac{(-16)m_*Ul}{3(2Ql+3\pi^2\beta)} & \frac{(-16)\pi^4\alpha}{l^2(2Ql+3\pi^2\beta)} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{2l}{\pi Q} & 0 \\ 0 & -\frac{8l^2}{3\pi(2Ql+3\pi^2\beta)} \end{pmatrix}.$$

Так как при $l \neq 0$

$$det\{B, AB\} = \frac{1024 l^8}{9\pi^4\left(\pi^2\beta + ml^2 + m_0 l^2\right)^2\left(4\pi^2\beta + ml^2 + m_0 l^2\right)^2} \neq 0,$$

то $rank\{B, AB\} = 4$ при $l \neq 0$ и линейная система (8) управляема, а система (7) управляема в окрестности положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ [18].

## 4. Построение управлений

Решение двухточечной задачи (6) с точностью $\varepsilon = 0.0001$ будем искать по формуле [19]

$$\mathbf{u}^{(k)}(t) = \Omega(t)\,\mathbf{p}^{(k)}, \tag{9}$$

$$\Omega(t) = \omega^T(t_1, t)M^{-1}, \quad \omega(t, \xi) = X(t, \xi)B, \quad M = \int_{t_0}^{t_1} \omega(t_1, \xi)\,\omega^T(t_1, \xi)\,d\xi,$$

$$\mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{y}^{(1)} - X(t_1, t_0)\mathbf{y}^{(0)}, \quad \mathbf{p}^{(k)} = \mathbf{p}^{(0)} + \sum_{i=0}^{k-1}\Big(\mathbf{y}^{(1)} - \mathbf{y}_i^n(t_1)\Big), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

$\mathbf{y}_i^n(t_1)$ — точка, в которую попадает нелинейная система (7) под действием допустимого управления $\mathbf{u}^{(i)}(t)$ в момент времени $t_1$; $X(t, \xi)$ — фундаментальная матрица однородной системы уравнений $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$, соответствующей системе линейного приближения (8).

Выберем следующие значения параметров механической системы (1): $E = 210 \cdot 10^9$ — модуль упругости стали; $\rho_* = 1000$ — плотность воды; $\rho_0 = 7000$ — плотность стали; $l = 12$; $U = 53$; $N = 1500$; $R_* = 0.05$; $R_0 = 0.046$; $\alpha = 0.2$; $\beta = 0.5$. Тогда одно из собственных значений матрицы $A$ системы линейного приближения (8) имеет положительную действительную часть:

$$\lambda_1 = 0.747948346, \quad \lambda_2 = -0.747948346, \quad \lambda_{3,4} = -0.000496339 \pm 34.4395\,i,$$

следовательно нелинейная система (7) неустойчива по Ляпунову.

Пусть теперь под воздействием внешних возмущений возникли колебания трубопровода, описываемые равенствами:

$$w(x, t_0) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + \frac{1}{3}\sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right), \; x \in [0, l\,].$$

$$\dot{w}(x, t_0) = \frac{2}{5}\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + \frac{1}{5}\sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right), \; x \in [0, l\,].$$

Построим управления, которые гасят возникшие колебания трубопровода, а значит движение динамической системы (7) на отрезке $t \in [0, 1]$ удовлетворяет условиям

$$\mathbf{y}^{(0)} = (0.5,\, 0.(3),\, 0.4,\, 0.2)^T,$$
$$\mathbf{y}^{(1)} = (0,\, 0,\, 0,\, 0)^T.$$

Компоненты матрицы $\Omega(t)$ при $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ имеют вид

$$\Omega_{ij}(t) = \mathrm{e}^{0.0005\,(t-1)}\Big(a_{ij}\,\cos\left(34.4395(t-1)\right) + b_{ij}\sin\left(34.4395(t-1)\right)\Big) + c_{ij}\,\mathrm{e}^{-0.748(t-1)} + d_{ij}\,\mathrm{e}^{0.748(t-1)}, \qquad (i = 1, 2;\; j = 1, \ldots, 4)\,,$$

Решая двухточечную задачу (6) по рекуррентной формуле (9) с точностью $\varepsilon = 0.0001$, с помощью математического пакета на 3-ом шаге получаем

$$\mathbf{p}^{(0)} = (2.380167414,\, 0.272707249,\, 6.425681617,\, 1.43237687)^T,$$
$$\mathbf{p}^{(3)} = (2.37540924,\, 0.267038872,\, 6.368368597,\, 1.92151637)^T,$$

$$u_1(t) = u_1^{(3)}(t) = 102.7188176\,\mathrm{e}^{-0.748(t-1)} - 73.6217728\,\mathrm{e}^{0.748(t-1)} - \mathrm{e}^{0.0005\,(t-1)}\Big(137.736325\,\cos\left(34.4395(t-1)\right) + 26.7900872\sin\left(34.4395(t-1)\right)\Big),$$
$$u_2(t) = u_2^{(3)}(t) = -0.4875475\,\mathrm{e}^{-0.748(t-1)} - 0.349414\,\mathrm{e}^{0.748(t-1)} - \mathrm{e}^{0.0005\,(t-1)}\Big(59.452732\,\cos\left(34.4395(t-1)\right) - 305.6447878\sin\left(34.4395(t-1)\right)\Big).$$

## 5. Результаты численного моделирования

Поведение переменных $y_1(t)$, $y_2(t)$ нелинейной системы (7) под действием построенных управлений $u_1(t)$, $u_2(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, показано на рис. 1. Переменные $y_3(t)$, $y_4(t)$ ведут себя

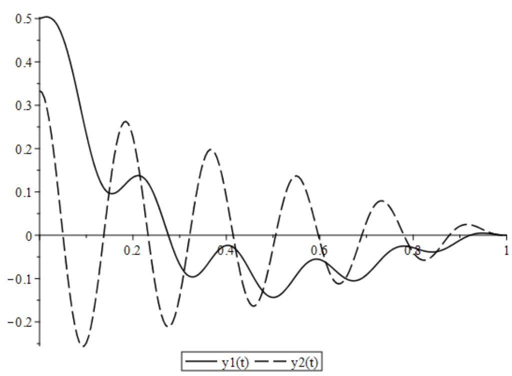


**Рис. 1.** Поведение функций $y_1(t)$ и $y_2(t)$

аналогичным образом. Таким образом в момент времени $t = 1$ функции $v_1(t)$, $v_2(t)$, а также их производные $\dot{v}_1(t)$, $\dot{v}_2(t)$ принимают нулевое значение с заданной степенью точности, следовательно колебания трубопровода затухают. На рис. 2 изображен график функции деформации трубопровода $w(x, t)$ в сечении $x = 6$ при $t \in [0, 1]$. На рис. 3 представлены графики построенных управлений $u_1(t)$, $u_2(t)$, $t \in [t_0, t_1]$.

Полученные результаты показывают, что в случае динамической неустойчивости трубопровода возможно построение управляющих воздействий, обеспечивающих гашение колебаний трубопровода с заданной степенью точности.

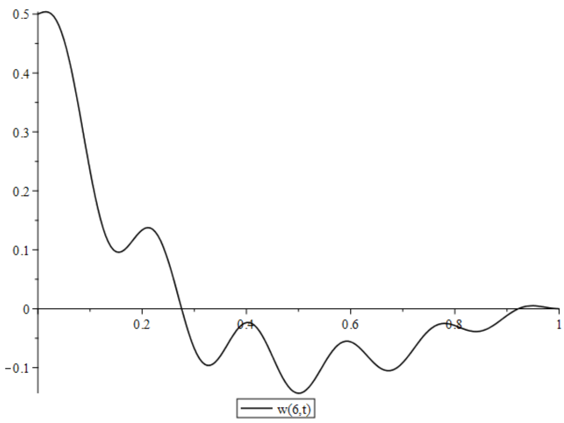


**Рис. 2.** Колебания точки $x = 6$

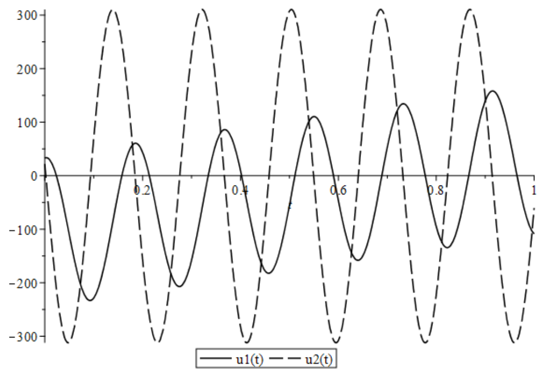


**Рис. 3.** Управления $u_1(t)$, $u_2(t)$

## Литература

1. Paidoussis M.P. Задача о колебаниях трубопровода с протекающей жидкостью и ее связи с другими задачами прикладной механики // J. Sound and Vibr., 3(310) (2008), 462–492.

2. Paidoussis M.P., Issid N.T. Dymanic stability of piped conveying fluid // J. Sound and Vibr., 33 (1974), 267–294.

3. Vel'misov P. A., Garnefska L.V., Milusheva S.D. Investigation of the asymptotic stability of a pipeline in the presence of delay in time // Rev. Mat. Estat., São Paulo, Brasil, 19: 2001. pp. 159–178.

4. Анкилов А.В., Вельмисов П.А., Корнеев А.В. Исследование динамической устойчивости трубопровода с учетом запаздывания внешних воздействий // Вестник Ульяновского государственного технического университета., Ульяновск: УлГТУ, 2014. № 4. С. 29 – 36.

5. Анкилов А.В., Вельмисов П.А. Математическое моделирование в задачах динамической устойчивости деформируемых элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействиию., Ульяновск: УлГТУ, 2013. 322 с.

6. Вельмисов П.А., Корнеев А.В., Киреев С.В. Исследование динамической устойчивости трубопровода // Журнал Средневолжского математического общества, 18:2 (2016), 106-114.

7. Вельмисов П.А., Логинов Б.В., Милушева С.Д. Исследование устойчивости трубопровода // Приложение на математиката в техниката: Сб. доклади и научни съобщения. XXI национальная школа. Болгария, Варна, 1995. С. 299–304.

8. Вельмисов П.А., Покладова Ю.В. Исследование динамики трубопровода с учетом запаздывания внешних воздействий // Вестник Ульяновского государственного технического университета., Ульяновск: УлГТУ, 2004. № 4. С. 26–29.

9. Вельмисов П.А., Корнеев А.В. Математическое моделирование в задаче о динамической устойчивости трубопровода // Автоматизация процессов управления., 2015. № 1(39). С. 63–73.

10. Вельмисов П.А., Корнеев А.В. О динамической устойчивости трубопровода // Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования, ред. А.И. Кириллов, С.А. Розанова. Сборник статей Международной конференции, Российский университет дружбы народов., М., 2015, 205–210.

11. Казакевич М.И. Аэродинамическая устойчивость надземных и висячих трубопроводов. М.: Недра, 1977. 200 с.

12. Мовчан А.А. Об одной задаче устойчивости трубы при протекании через нее жидкости // Прикладная математика и механика. 1965. Вып. 4. С. 760 – 762.

13. Сафина Г.Ф. Исследование зависимостей частот колебаний участка трубопровода от характеристик жидкости // Журнал Средневолжского математического общества. 2014. Т. 16, № 4. С. 59–67.

14. Светлицкий В.А. Механика трубопроводов и шлангов: Задачи взаимодействия стержней с потоком жидкости или воздуха. М.: Машиностроение, 1982. 280 с.

15. Феодосьев В.И. О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости // Инж. сб., Изд-во АН СССР, 1951. Т. 10. С. 169–170.

16. Челомей С.В. О динамической устойчивости упругих систем // Докл. АН СССР. Серия «Механика», 1980. Т. 252, № 2. С. 307–310.

17. Вельмисов П. А., Гладун А. В. Об управлении динамикой трубопровода // Журнал Средневолжского математического общества. 2016. Т. 18. № 4. С. 89-97.

18. Гладун А. В. Об относительной управляемости динамических систем по линейному приближению // Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины. 1998. Т. 2. С. 21-31.

19. Гладун А. В. Управление вращательным движением твердого тела с помощью двух спарок гиродинов // Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины. 1999. Т. 4. С. 44-51.

20. Гладун А. В. Управление вращательным движением твердого тела с помощью спарки гиродинов // Вестник Ульяновского государственного технического университета. Ульяновск: УлГТУ, 2015. № 4. С. 49–52.

MSC 74F10

# On control of dynamic of a pipeline in the case of its dynamic instability

P.A. Velmisov [1], A.V. Gladun [2]

Ulyanovsk State Technical University [1], Ulyanovsk Civil Aviation Institute named after Chief Marshal of Aviation B.P. Bugaev [2]

*Abstract:* The problem of control of a mechanical system, which is a hollow elastic rod with a fluid or gas, flowing inside it (pipeline), is investigated. The case of dynamic instability of a mechanical system is considered. The controllability of the system is determined by linear approximation. The controls are constructed to ensure the damping of the pipeline oscillations. The results of numerical simulation of the behavior of the mechanical system under the action of constructed controls with given parameters are presented.

*Keywords:* elastic pipeline, dynamics, controllability, control, partial differential equations, Galerkin method, a linear approximation

## References

1. Paidoussis M.P. Zadacha o kolebaniyakh truboprovoda s protekayushchey zhidkost'yu i ee svyazi s drugimi zadachami prikladnoy mekhaniki [The problem of oscillations of a pipeline with a flowing fluid and its connection with other problems of applied mechanics.] // J. Sound and Vibr. 2008. Vol. 3 (310). P. 462-492.

2. Paidoussis M.P., Issid N.T. Dymanic stability of piped conveying fluid. J. Sound and Vibr. 1974. Vol. 33. Pp. 267-294.

3. Velmisov P. A., Garnefska L.V., Milusheva S.D. Investigation of the asymptotic stability of a pipeline in the presence of delay in time. Rev. Mat. Estat., S ao Paulo, Brasil, 19: 2001. Pp. 159-178.

4. Ankilov A.V., Velmisov P.A., Korneev A.V. Issledovanie dinamicheskoy ustoychivosti truboprovoda s uchetom zapazdyvaniya vneshnikh vozdeystviy [Investigation of the dynamic stability of the pipeline, taking into account the delay of external influences]. // Vestnik Ulyanovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta [Bulletin of the Ulyanovsk State Technical University]. Ulyanovsk: UlSTU, 2014. No. 4. P. 29 - 36.

5. Ankilov A.V., Velmisov P.A. Matematicheskoe modelirovanie v zadachakh dinamicheskoy ustoychivosti deformiruemykh elementov konstruktsiy pri aerogidrodinamicheskom vozdeystviiyu [Mathematical modeling in problems of dynamic stability of deformable structural elements under aerohydrodynamic influence]. Ulyanovsk: UlSTU, 2013. 322 p.

6. Velmisov P.A., Korneev A.V., Kireev S.V. Issledovanie dinamicheskoy ustoychivosti truboprovoda [Investigation of the dynamic stability of the pipeline]. // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva [Middle-Volga Mathematical Society Journal]. 2016. V.18. No 2. P. 106-114.

7. Velmisov P.A., Loginov B.V., Milusheva S.D. Issledovanie ustoychivosti truboprovoda. [Investigation of the stability of the pipeline]. // Application of mathematics in the technician: Sat. Report and study of the message. XXI National School. Bulgaria. Varna. 1995. P. 299-304.

8. Velmisov P.A., Pokladova Yu.V. Issledovanie dinamiki truboprovoda s uchetom zapazdyvaniya vneshnikh vozdeystviy [Investigation of the pipeline dynamics taking into account the delay of external influences]. // Vestnik Ulyanovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta [Bulletin of Ulyanovsk State Technical University]. Ulyanovsk: UlSTU. 2004. No 4. P. 26-29.

9. Velmisov P.A., Korneev A.V. Matematicheskoe modelirovanie v zadache o dinamicheskoy ustoychivosti truboprovoda [Mathematical modeling in the problem of dynamic stability of a pipeline]. // Avtomatizatsiya protsessov upravleniya [Automation of control processes]. 2015. No. 1 (39). P. 63-73.

10. Velmisov P.A., Korneev A.V. O dinamicheskoy ustoychivosti truboprovoda [About dynamic stability of the pipeline]. // Beskonechnomernyy analiz, stokhastika, matematicheskoe modelirovanie: novye zadachi i metody. Problemy matematicheskogo i estestvennonauchnogo obrazovaniya [Infinite-dimensional analysis, stochastics, mathematical modeling: new problems and methods. Problems of mathematical and natural science education]. Ed. A.I. Kirillov, S.A. Rozanova. Collection of articles of the International Conference, Peoples' Friendship University of Russia. Moscow. 2015. P. 205-210.

11. Kazakevich M.I. Aerodinamicheskaya ustoychivost nadzemnykh i visyachikh truboprovodov [Aerodynamic stability of above-ground and suspended pipelines]. Moscow. Nedra. 1977. 200 p.

12. Movchan A.A. Ob odnoy zadache ustoychivosti truby pri protekanii cherez nee zhidkosti [On a problem of the stability of a tube when a fluid flows through it]. // Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]. 1965. Vol. 4. P. 760-762.

13. Safina G.F. Issledovanie zavisimostey chastot kolebaniy uchastka truboprovoda ot kharakteristik zhidkosti [Investigation of the dependence of the vibration frequencies of the pipeline section on fluid characteristics]. // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva [Middle-Volga Mathematical Society Journal]. 2014. Vol. 16. No 4. P. 59-67.

14. Svetlitsky V.A. Mekhanika truboprovodov i shlangov: Zadachi vzaimodeystviya sterzhney s potokom zhidkosti ili vozdukha [Mechanics of pipelines and hoses: Problems of interaction of rods with a flow of liquid or air]. Moscow: Mashinostroenie, 1982. 280 p.

15. Feodosiev V.I. O kolebaniyakh i ustoychivosti truby pri protekanii cherez nee zhidkosti [On the oscillations and stability of a tube when a liquid flows through it]. Ing. Sat., Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR, 1951. Vol. 10. Pp. 169-170.

16. Chelomei S.V. O dinamicheskoy ustoychivosti uprugikh sistem [On the Dynamic Stability of Elastic Systems]. // Academy of Sciences of the USSR. Series "Mechanics 1980. Vol. 252, no. 2. Pp. 307-310.

17. Velmisov P.A., Gladun A.V. Ob upravlenii dinamikoy truboprovoda [About control of pipeline dynamics]. // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva [Middle-Volga Mathematical Society Journal]. 2016. Vol. 18. No. 4. P. 89-97.

18. Gladun A.V. Ob otnositelnoy upravlyaemosti dinamicheskikh sistem po lineynomu priblizheniyu [On the Relative Controllability of Dynamical Systems in Linear Approximation]. // Trudy Inst. Of Applied Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine. 1998. Vol. 2. P. 21-31.

19. Gladun A. V. Upravlenie vrashchatel'nym dvizheniem tverdogo tela s pomoshch'yu dvukh sparok girodinov [Control of the rotational motion of a solid body with the help of two pairs of gyrodines]. // Proceedings of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine. 1999. Vol. 4. P. 44-51.

20. Gladun A. V. Upravlenie vrashchatel'nym dvizheniem tverdogo tela s pomoshch'yu sparki girodinov [Control of the rotational motion of a solid body with the help of a pair of gyrodynes]. // Vestnik Ulyanovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta [Bulletin of the Ulyanovsk State Technical University]. Ulyanovsk: UlSTU. 2015. No 4. P. 49-52.