

УДК 517.9

О гомоклинических аттракторах в трехмерных системах с постоянной дивергенцией

А.О. Казаков¹, А.Д. Козлов^{1,2}, А.Г. Коротков²

Национальный исследовательский университет Высшая Школа Экономики¹,
Национальный исследовательский университет ННГУ им. Лобачевского².

Аннотация: Для трехмерных потоковых систем вида $\dot{x} = y, \dot{y} = z, \dot{z} = Ax + By + Cz + g(x, y), g(0, 0) = g'_x(0, 0) = g'_y(0, 0) = 0$ исследуется проблема существования гомоклинических аттракторов. Под гомоклиническими аттракторами понимаются странные аттракторы, содержащие ровно одно (седловое) состояние равновесия. При этом тип такого аттрактора определяется собственными числами этого состояния равновесия, которые, в свою очередь, зависят только от параметров A, B, C . Для поиска и классификации аттракторов применяется метод карт седел – двухпараметрических диаграмм, на которых выделены области, соответствующие различным наборам собственных чисел состояния равновесия, совместно с построением карт максимального показателя Ляпунова и карт расстояния от аттрактора до седловой точки (для определения принадлежности седловой точки аттрактору). С помощью предложенного метода удалось обнаружить спиральный аттрактор и аттрактор Шильникова, возникающие за счет петли сепаратрисы к седло-фокусному состоянию равновесия.

Ключевые слова: Странный аттрактор, гомоклиническая траектория, спиральный хоас.

В настоящей работе для трехмерных потоковых систем предложен метод карт седел, позволяющий на плоскости параметров системы определять области, в которых могут возникать различные гомоклинические аттракторы. Под гомоклиническими аттракторами понимаются странные аттракторы, содержащие ровно одно (седловое) состояние равновесия. При этом тип такого аттрактора определяется собственными числами этого состояния равновесия. К гомоклиническим аттракторам относятся многие известные странные аттракторы, например, такие как аттрактор Лоренца [1], спиральный аттрактор, возникающий на основе петли сепаратрисы к седло-фокусному состоянию равновесия с одномерным неустойчивым многообразием (такой, например, как в цепи Чуа [2]), аттрактор Шильникова [3], возникающий на основе петли сепаратрисы к седло-фокусу с двумерным неустойчивым многообразием и некоторые другие. Идея классификации гомоклинических аттракторов по собственным числам состояния равновесия изложена, например, в [4]. В работе [5] эта идея была развита для трехмерных отображений, где с помощью метода карт седел были решены важные вопросы существования гомоклинических аттракторов, содержащих неподвижную точку $O(0, 0, 0)$, в случае ориентируемых (с положительным якобианом) отображений Эно вида $\bar{x} = y, \bar{y} = z, \bar{z} = Bx + Az + Cy + g(y, z)$. В работах [6, 7] данный метод был также успешно применен для поиска аттракторов в трехмерных неориентируемых отображениях Эно.

В настоящей работе метод карт седел применяется к трехмерным потоковым системам $\dot{X} = F(X), x \in \mathbb{R}^3$ вида

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = Ax + By + Cz + g(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

где A, B и C – параметры системы, а функция $g(x, y)$ задает нелинейность, причем $g(0, 0) =$

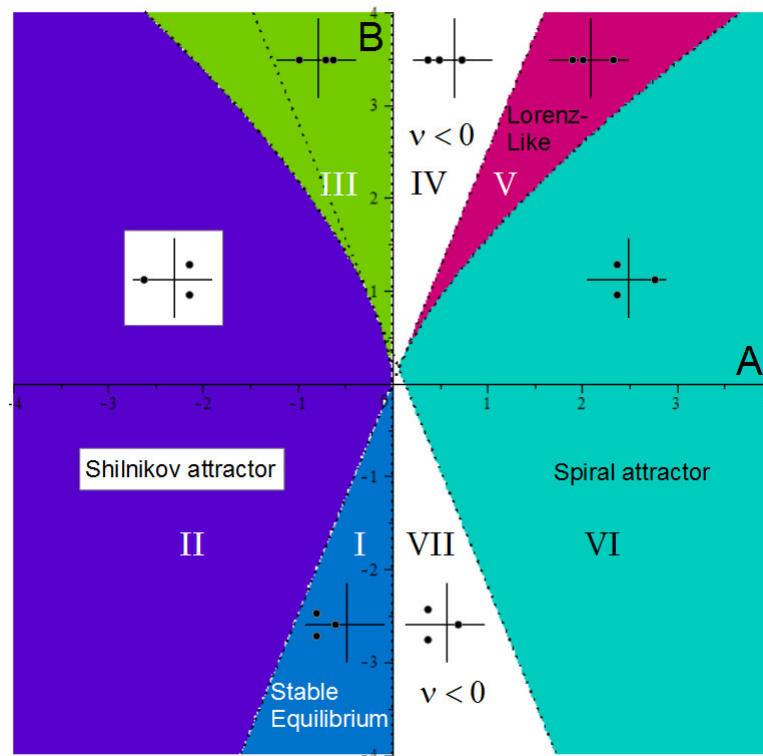


Рис. 1. Карта седел для состояния равновесия $O(0, 0, 0)$ системы (1) при $C = -0.4$.

$$g'_x(0, 0) = g'_y(0, 0) = 0.$$

Заметим, что рассматриваемый класс систем обладает постоянной дивергенцией ($\text{div}F(X) = C = \text{const}$). Также очевидно, что точка $O(0, 0, 0)$ является состоянием равновесия системы, а характеристическое уравнение системы (1), линеаризованной в окрестности этой точки, имеет вид

$$\chi(\lambda) \equiv \lambda^3 - C\lambda^2 - B\lambda - A = 0. \quad (2)$$

Суть метода карт седел для потоковых систем вида (1) состоит в том, что для фиксированного значения дивергенции C на плоскости параметров (A, B) выделяются области, соответствующие различным наборам корней характеристического уравнения (2), определяющим вид возможного гомоклинического аттрактора, содержащего состояние равновесия $O(0, 0, 0)$.

На рисунке 1 изображена карта седел для системы (1) при $C = -0.4$. В области I состояние равновесия $O(0, 0, 0)$ является устойчивым, здесь не может возникнуть гомоклинического аттрактора. В остальных областях состояние равновесие $O(0, 0, 0)$ становится седловым. Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ его собственные значения, а через ν – его седловую величину, определяемую как сумму двух ближайших к мнимой оси собственных значений, одно из которых лежит слева от мнимой оси, а другое – справа и определим необходимые условия для возникновения гомоклинических аттракторов следующих типов:

1. **Спиральный аттрактор.** В данном случае $\lambda_1 > 0, \lambda_{2,3} = \gamma \pm i\omega, \gamma < 0, \omega \neq 0, \nu = \lambda_1 + \gamma > 0$.

Условия возникновения спирального аттрактора: $\Delta < 0, CB + A > 0, A > 0, 2C^3 - BC + A > 0, C < 0$. Здесь и далее $\Delta = -4AC^3 + B^2C^2 - 18ABC + 4B^3 - 27A^2$ - дискриминант характеристического уравнения.

2. **Аттрактор Шильникова.** Здесь $\lambda_1 < 0, \lambda_{2,3} = \gamma \pm i\omega, \gamma > 0, \omega \neq 0, \nu = \lambda_1 + \gamma < 0$.

Условия существования аттрактора Шильникова: $\Delta < 0, CB + A < 0, A < 0, 2C^3 - BC + A < 0, C < 0$.

3. **Аттрактор типа Лоренца.** $\lambda_1 > 0, \lambda_3 < \lambda_2 < 0$. Седловая величина $\nu = \lambda_1 + \lambda_2$ должна быть положительной¹.

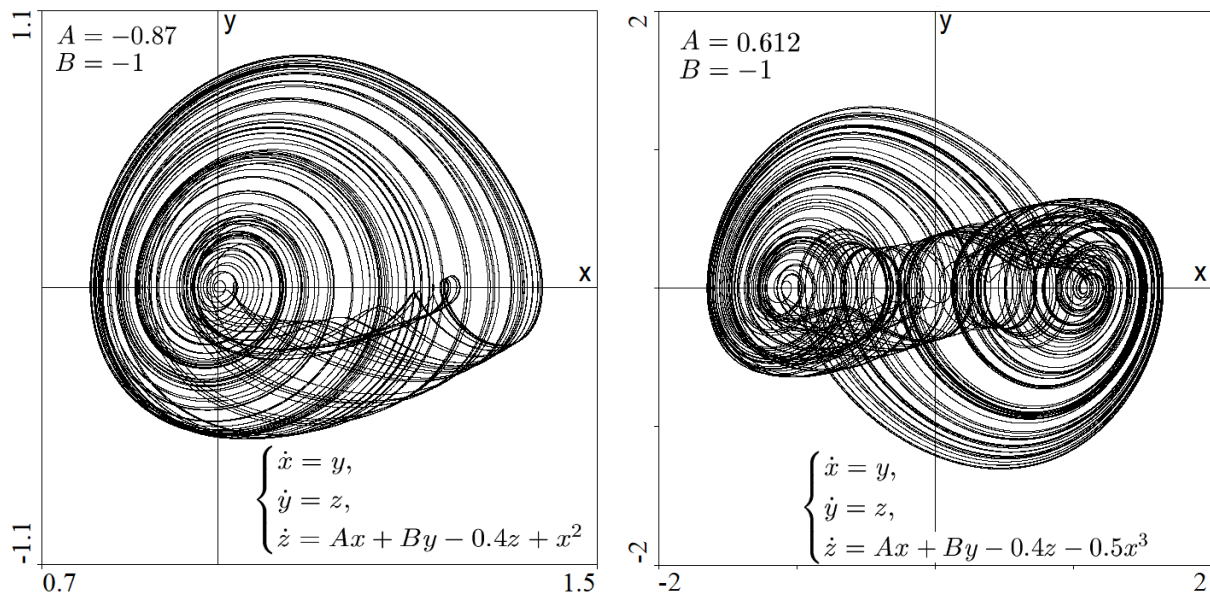
Условия существования аттрактора типа Лоренца: $\Delta > 0, CB + A > 0, A > 0, C < 0$.

4. **Седловой аттрактор Шильникова:** $\lambda_1 < 0, \lambda_3 > \lambda_2 > 0, \nu = \lambda_1 + \lambda_2 < 0$. При переходе из области II в область III может, в принципе, наблюдаться такое явление: седло-фокус становится седлом (переход через беляковскую точку [9]), а гомоклинический аттрактор продолжает существовать, но уже не имеет спиральной структуры. Насколько нам известно, такое явление ранее изучено не было.

Условия существования такого аттрактора: $\Delta > 0, CB + A < 0, A < 0, C < 0$.

5. В областях IV и VII бифуркации гомоклинических петель приводят к возникновению простых аттракторов – устойчивых предельных циклов. При дальнейшем изменении параметров из этих циклов могут возникнуть странные аттракторы, которые, в свою очередь, могут стать гомоклиническими (см., например, [10–12]).

Отметим, что приведенные условия являются лишь необходимыми для возникновения гомоклинического аттрактора того или иного вида. При исследовании конкретных систем типа (1) большое влияние на динамику оказывает вид нелинейности $g(x, y)$. Поэтому для комплексного исследования системы, построенную карту седел нужно совмещать, например, с картой старшего показателя Ляпунова (с помощью которой удобно определять области параметров, соответствующие хаотическим режимам) и с картой расстояния от аттрактора до седловой точки (с помощью которой устанавливается принадлежность седловой точки аттрактору). В областях параметров, где хаотический режим с карты максимального показателя Ляпунова накладывается на одну из описанных выше областей карты седел и при этом расстояние от аттрактора до седловой точки стремится к нулю с увеличением времени счета возникает гомоклинический аттрактор.



а) Аттрактор Шильникова при $A = -0.87, B = -1$ б) Спиральный аттрактор при $A = 0.612, B = -1$

Рис. 2. (а) Аттрактор Шильникова для системы и спиральный аттрактор для систем вида (1)

С помощью изложенного метода обнаружен аттрактор Шильникова (см. рис. 2а) для системы (1) с нелинейностью вида $g(x, y) = x^2$ и спиральный аттрактор (см. рис. 2б) для

¹Заметим, классический аттрактор Лоренца [1] может возникать лишь в системах, обладающих симметрией $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow z$. В системах, не обладающих такой симметрией может возникнуть несимметричный аттрактор Лоренца [8].

системы, в которой $g(x, y) = -0.5x^3$. Для систем вида (1) такие аттракторы были найдены еще в классических работах [13, 14].

Благодарности.

Авторы благодарят С.В. Гонченко и Д.В. Тураева за ценные советы и замечания.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 17-11-01041. Результаты численных экспериментов, связанных с поиском гомоклинических аттракторов, выполнены при поддержке гранта РФФИ 14-12-00811.

Литература

1. Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow // Journal of the atmospheric sciences. 1963. V. 20. No 2. P. 130-141.
2. Chua L., Komuro M., Matsumoto T. The double scroll family // IEEE transactions on circuits and systems. 1986. V. 33. No 11. P. 1072-1118.
3. Шильников Л. П. Теория бифуркаций и турбулентность // Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Межвуз. сб./Е. А. Леонтович (отв. ред.) и др. Горький: ГГУ. 1986. С. 150-163.
4. Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
5. Gonchenko A., Gonchenko S. Variety of strange pseudohyperbolic attractors in three-dimensional generalized Henon maps // Physica D. 2016. V. 337. P. 43-57.
6. Гонченко А. С., Козлов А. Д. О сценариях возникновения хаоса в трехмерных неориентируемых отображениях // Журнал Средневолжского математического общества. 2016. Т. 18. № 4. С. 17-29.
7. Козлов А. Д. Примеры странных аттракторов в трехмерных неориентируемых отображениях // Журнал Средневолжского математического общества. 2017. Т. 19. № 2. С. 62-75.
8. Shilnikov A. L., Shilnikov L. P. On the nonsymmetrical Lorenz model // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1991. V. 1. No 04. P. 773-776.
9. Беляков Л. А. О бифуркационном множестве в системах с гомоклинической кривой седла // Математические заметки. 1980. Т. 28. №. 6. С. 911-922.
10. Turaev D., Shilnikov L. P. On bifurcations of the homoclinic «figure eight» for a saddle with a negative saddle value // Sov. Math., Dokl. 1987. V.34, P. 397-401.
11. Rovella A. The dynamics of perturbations of the contracting Lorenz attractor // Bull. Brazil. Math. Soc. 1993. V. 24. No. 2. P. 233-259.
12. Lyubimov D. V., Zaks M. A. Two mechanisms of the transition to chaos in finite-dimensional models of convection // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1983. V. 9. No. 1-2. P. 52-64.
13. Couillet P., Tresser C., Arneodo A. Transition to stochasticity for a class of forced oscillators // Physics letters A. 1979. V. 72. No. 4-5. P. 268-270.
14. Arneodo A., Couillet P., Tresser C. Oscillators with chaotic behavior: An illustration of a theorem by Shil'nikov // Journal of Statistical Physics. 1982. V. 27. No. 1. P. 171-182.

MSC 34C23, 34D45

On homoclinic attractors in three-dimension systems with constant divergency

A.O. Kazakov¹, A.D. Kozlov^{1,2}, A.G. Korotkov²

National Research University Higher School of Economics¹,
Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod – National Research University².

Abstract: In this paper we focus on the problem of existence of homoclinic attractors in three-dimensional flows $\dot{x} = y, \dot{y} = z, \dot{z} = Ax + By + Cz + g(x, y), g(0, 0) = g'_x(0, 0) = g'_y(0, 0) = 0$. Homoclinic attractors are the strange attractors which contain only one (saddle) equilibrium point. The type of such attractors is defined by eigenvalues of the equilibrium point, which depend only on parameters A, B , and C . A method of saddle charts (two-parameter diagram in which regions with different eigenvalues are drawn with different colors) together with methods of charts of maximal Lyapunov exponent and charts of the distance between an attractor and a saddle point (to verify that a saddle point belongs to the attractor) are used for searching and classifying of homoclinic attractors. Using these methods we found attractors of spiral and also Shilnikov types.

Keywords: Strange attractor, homoclinic trajectory, spiral chaos.

References

1. Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow // Journal of the atmospheric sciences. 1963. V. 20. No 2. P. 130-141.
2. Chua L., Komuro M., Matsumoto T. The double scroll family // IEEE transactions on circuits and systems. 1986. V. 33. No 11. P. 1072-1118.
3. Shilnikov L. P. Teoriya bifurkatsiy i turbulentnost' [The theory of bifurcations and turbulence] // Metody kachestvennoy teorii differentsial'nykh uravneniy: Mezhdvuz. sb./E. A. Leontovich (otv. red.) i dr. Gor'kiy: GGU [Methods of qualitative theory of differential equations. Gorkiy: GGU], 1986. P. 150-163.
4. Shilnikov L. P., Shilnikov A. L., Turaev D. V., Chua L. Metody kachestvennoy teorii v nelineynoy dinamike. Moskva-Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovaniy [Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics. Institute of Computer Researches], 2003.
5. Gonchenko A., Gonchenko S. Variety of strange pseudohyperbolic attractors in three-dimensional generalized Henon maps // Physica D. 2016. V. 337. P. 43-57.
6. Gonchenko A. S., Kozlov A. D. On scenarios of chaos appearance in three-dimensional nonoriented maps [O stsenariyakh vozniknoveniya khaosa v trekhmernykh neorientiruemykh otobrazheniyakh] // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva [Middle-Volga Mathematical Society Journal]. 2016. V. 18. No 4. P. 17-29.
7. Kozlov A. D. Primery strannykh attraktorov v trekhmernykh neorientiruemykh otobrazheniyakh [Examples of strange attractors in three-dimentional] nonoriented maps // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva [Middle-Volga Mathematical Society Journal]. 2017. V. 19. No 2. P. 62-75.
8. Shilnikov A. L., Shilnikov L. P. On the nonsymmetrical Lorenz model // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1991. V. 1. No 04. P. 773-776.

9. Belyakov L. A. O bifurkatsionnom mnozhestve v sistemakh s gomoklinicheskoy krivoy sedla [Bifurcation set in a system with homoclinic saddle curve] // Matematicheskie zametki [Mathematical Notes]. 1980. V. 28. No. 6. P. 910-916.
10. Turaev D., Shilnikov L. P. On bifurcations of the homoclinic «figure eight» for a saddle with a negative saddle value //Sov. Math., Dokl. 1987. V.34, P. 397-401.
11. Rovella A. The dynamics of perturbations of the contracting Lorenz attractor //Bull. Brazil. Math. Soc. 1993. V. 24. No. 2. P. 233-259.
12. Lyubimov D. V., Zaks M. A. Two mechanisms of the transition to chaos in finite-dimensional models of convection //Physica D: Nonlinear Phenomena. 1983. V. 9. No. 1-2. P. 52-64.
13. Coulet P., Tresser C., Arneodo A. Transition to stochasticity for a class of forced oscillators //Physics letters A. 1979. V. 72. No. 4-5. P. 268-270.
14. Arneodo A., Coulet P., Tresser C. Oscillators with chaotic behavior: An illustration of a theorem by Shil'nikov //Journal of Statistical Physics. 1982. V. 27. No. 1. P. 171-182.