XIII Международная научная конференция "Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании", Саранск, 12-16 июля 2017.
XIII International scientific conference "Differential equations and their applications in mathematical modeling", Saransk, July 12-16, 2017.

УДК 517.928.4

Об устойчивости сингулярных однородных систем *

А.А. Косов [1], М.В. Козлов [2]

Институт динамики систем и теории управления имени В.М.Матросова СО РАН, Иркутск, Россия[1], Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва, Саранск, Россия[2]

Аннотация: Рассматриваются сингулярно возмущенные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, правая часть которых содержит однородные функции первого порядка. Результатом исследования являются достаточные условия, при выполнении которых свойства асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения исходной системы является следствием аналогичного свойства нулевого решения систем быстрых и медленных движений, полученных в результате декомпозиции исходной системы.

Ключевые слова: сингулярные системы, однородные функции, устойчивость, декомпозиция.

1. Введение

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым множителем при производных, по-другому называемые сингулярно возмущенными (сингулярными), широко применяются в математическом моделировании систем различной природы, в которых некоторые параметры меняются со скоростью, несравнимо большей, нежели остальные. Основополагающим результатом в теории сингулярных систем является работа А.Н.Тихонова [1], в которой был предложен метод исследования данных систем путем их декомпозиции на систему быстрых и медленных движений [1]. Этот метод изначально использовался для исследования асимптотики о малому параметру в задаче Коши, однако в последствии был развит и на другие задачи.

Во многих приложениях, где используются математические модели в виде сингулярных систем, важную роль играет свойство устойчивости по Ляпунову. Начиная с [2] к анализу устойчивости сингулярных систем успешно применяется второй метод Ляпунова. Анализу устойчивости сингулярных систем в настоящее время уделяется внимание во многих работах (см., например, обзоры [3], [4], где цитируется более 500 работ). В результате приема декомпозиции смысл задачи сводится к тому, чтобы определить условия, при которых при достаточно малых значениях параметра об устойчивости (неустойчивости) положения равновесия исходной системы можно было судить по аналогичному свойству быстрой и медленной систем.

В данной статье изучаются сингулярные системы, правые части которых содержат однородные первого порядка функции, представленные как сумма линейных и нелинейных слагаемых. Рассматривается задача устойчивости по Ляпунову, обоснована возможность ее решения на основе декомпозиции и исследования быстрых и медленных подсистем по отдельности.

---

*Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-08-06680).

2. Теоремы об асимптотической устойчивости и неустойчивости

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений следующего вида

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(x) + A_1 y, \\ &\varepsilon \dot{y} = g(x) + A_2 y, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $y \in R^m$; $f(x)$ и $g(x)$ непрерывные, удовлетворяющие локальному условию Липшица, однородные первого порядка вектор-функции; $A_1 \in R^{n,m}$ — постоянная прямоугольная матрица, $A_2 \in R^{m,m}$ — постоянная квадратная матрица, $\det A_2 \neq 0$. Осуществим декомпозицию данной системы. Для этого, полагая $\varepsilon = 0$, выразим из уравнения $g(x) + A_2 y = 0$ вектор y как $y = -A_2^{-1} g(x)$ и подставим его у первую подсистему. В результате получим две системы

$$\dot{x} = f(x) - A_1 A_2^{-1} g(x), \text{ — система медленных движений,} \tag{2}$$

$$\dot{y} = A_2 y \text{ — система быстрых движений.} \tag{3}$$

Правомерность применения систем (2), (3) для анализа устойчивости (неустойчивости) положения равновесия исходной системы (1) гарантируют следующие теоремы.

Теорема 1. *Если нулевое решение систем (2), (3) асимптотически устойчиво, то существует такое ε_0, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ нулевое решение системы (1) также асимптотически устойчиво.*

Теорема 2. *Если нулевое решение системы (2) неустойчиво, причем это установлено применением первой теоремы Ляпунова о неустойчивости с помощью функции $v(x)$, принимающей отрицательные значения и имеющей отрицательно определенную производную в силу системы (2), а система (3) асимптотически устойчива, то при всех достаточно малых значениях параметра $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ нулевое решение исходной системы (1) также неустойчиво.*

Теорема 3. *Если нулевое решение системы (2) асимптотически устойчиво, а система (3) неустойчива в следствие того, что матрица A_2 имеет вид $A_2 = -DS$, где D и S – соответственно диагональная и симметричная матрицы, причем D положительно определенная, а S отрицательно определенная, то при всех достаточно малых значениях параметра $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ нулевое решение исходной системы (1) также неустойчиво.*

Пример 1. Материальная точка на кубической пружине с переменным коэффициентом жесткости

$$\begin{aligned} &\varepsilon \ddot{x}_i + b\dot{x}_i + k(x) x_i^3 = 0, \\ &i = 1, 2, 3, \\ &k(x) = \frac{k_0}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $\varepsilon, b, k_0 = const > 0$ и порядок однородности равен единице, т.е. система (4) является однородной первого порядка, но при этом не является линейной. Позиционные силы $F_i(x) = -k(x)x_i^3$ являются возвращающими (всегда направлены к равновесию $x_i = 0$), но не являются потенциальными, так как $\partial F_i(x)/\partial x_j \neq \partial F_j(x)/\partial x_i$, поэтому третья теорема Томсона-Тэта-Четаева неприменима. Замена $\dot{x}_i = y_i$ $(i = 1, 2, 3)$ приводит к сингулярной системе

$$\begin{aligned} &\dot{x}_i = y_i, && i = 1, 2, 3, \\ &\varepsilon \dot{y}_i = -\frac{k_0 x_i^3}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} - b y_i, && i = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{5}$$

В результате декомпозиции системы (5), получаем

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= -\frac{k_0 x_i^3}{b\,\|x\|^2}, \quad i = 1,2,3, \\ \dot{y}_i &= -b y_i, \qquad i = 1,2,3. \end{aligned}$$

Теорема 1 гарантирует асимптотическую устойчивость положения равновесия $x_i = 0$, $y_i = 0$ системы (5) при достаточно малых значениях ε.

Пример 2. Линейная система

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1, \\ \dot{x}_2 &= y_2, \\ \varepsilon\dot{y}_1 &= -x_1 + x_2 - y_1 + y_2, \\ \varepsilon\dot{y}_2 &= -x_1 - x_2 - y_1 - y_2. \end{aligned} \tag{6}$$

Теорема 1 гарантирует асимптотическую устойчивость, устанавливаемую методом декомпозиции, при достаточно малых значениях параметра $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Это согласуется с анализом характеристического уравнения

$$\varepsilon^2\lambda^4 + 2\varepsilon\lambda^3 + (2\varepsilon + 2)\lambda^2 + 4\lambda + 2 = 0.$$

Согласно критерию Рауса-Гурвица, корни данного многочлена имеют отрицательную вещественную часть тогда и только тогда, когда $0 < \varepsilon < 2$.

Пример 3. Механическая система с полным набором сил

$$\varepsilon A\ddot{q} + B\dot{q} + (q^T M q)^{-1} C q^3 = 0. \tag{7}$$

Здесь $\varepsilon > 0$, $A = A^T$, $M = M^T$ — положительно определенные матрицы, $B = K + G$, $K = K^T$ — положительно определенная матрица, $G = -G^T$, $C = BSL$, где $S = S^T$, L — диагональная положительно определенная матрица. Порядок однородности в системе (7) равен единице, однако система не является линейной. Вектор $q^3 = (q_1^3, \dots, q_n^3)^T$ есть вектор из степеней координат. В системе (7) присутствуют диссипативные, гироскопические, потенциальные и циркулярные силы, именно в этом смысле говорится о полном наборе сил.

Если матрица S положительно определенная, то по теореме 1 положение равновесия системы (7) асимптотически устойчиво при всех достаточно малых значениях параметра $\varepsilon > 0$.

Если же матрица S отрицательно определенная, то по теореме 2 положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ системы (7) неустойчиво.

Литература

1. Тихонов А. Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Математический сборник. 1948. 22(64):2. С. 193-204.

2. Климушев А. И., Красовский Н. Н. Равномерная асимптотическая устойчивость систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производных // Прикладная математика и механика. 1961. Т. 25, Вып. 4. С. 680-690.

3. Yan Zhang, D. Subbaram Naidu, Chenxiao Cai and Yun Zou. Singular Perturbations and Time Scales in Control Theories and Applications: an overview 2002-2012 // International Journal of Information and Systems Sciences. 2014. V. 9. No. 1. P. 1-36.

4. Yang C., Zhang Q., Zhou L. Stability Analysis and Design for Nonlinear Singular Systems. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2013. 210 p.

MSC 34D15

On the stability of singular homogeneous systems

A.A. Kosov [1], M.V. Kozlov [2]

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences [1], National Research Ogarev Mordovia State University [2]

Abstract: We consider singularly perturbed systems of ordinary differential equations whose right-hand side contains homogeneous first-order functions. The research results are sufficient conditions under which the properties of asymptotic stability and instability of the zero solution of the original system is a consequence of the analogous property of the zero solution of the systems of fast and slow motions obtained as a result of decomposition of the initial system.

Keywords: singular systems, homogeneous functions, stability, decomposition.

References

1. Tikhonov A. N. O zavisimosti resheniy differentsial'nykh uravneniy ot malogo parametra [On Dependence of Solutions of Differential Equations on Small Parameter] // Matematicheskiy sbornik [Sbornik Mathematics] 1948. 28. pp. 193-204.

2. Klimushev A. I., Krasovskiy N. N. Ravnomernaya asimptoticheskaya ustoychivost' sistem differentsial'nykh uravneniy s malym parametrom pri proizvodnykh [Uniform asymptotic stability of systems of differential equations with a small parameter in the derivative terms] // Prikladnaya matematika i mekhanika [J. Appl. Math. Mech.] 1961. V.25. P. 1011-1025.

3. Yan Zhang, D. Subbaram Naidu, Chenxiao Cai and Yun Zou. Singular Perturbations and Time Scales in Control Theories and Applications: an overview 2002-2012 // International Journal of Information and Systems Sciences. 2014. V. 9. No. 1. P. 1-36.

4. Yang C., Zhang Q., Zhou L. Stability Analysis and Design for Nonlinear Singular Systems. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg. 2013. 210 p.