XIII Международная научная конференция "Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании", Саранск, 12-16 июля 2017.
XIII International scientific conference "Differential equations and their applications in mathematical modeling", Saransk, July 12-16, 2017.

УДК 519.624

Восстановление потенциала специального вида по собственным частотам колебаний *

И.М. Утяшев [1]

Институт механики им. Р.Р.Мавлютова УНЦ РАН, Уфа[1]

Аннотация: Рассматривается задача определения потенциала $q(x)$ специального вида по собственным частотам колебаний. В частности, рассматривается потенциал вида $q(x) = q_1 + q_2 x$, который описывает линейное изменение коэффициента упругости среды. Показано, что коэффициенты q_1 и q_2, характеризующие линейное изменение коэффициента упругости среды, однозначно определяются по трем собственным частотам струны, колеблющейся в этой среде.

Ключевые слова: спектральная задача, идентификация, потенциал, собственные значения.

1. Введение

Рассматривается обратная задача Штурма-Лиувилля по определению потенциала специального вида $q(x) = q_1 + q_2 x$ по собственным частотам колебаний. Потенциал данного вида описывает линейное изменение коэффициента упругости среды. Рассматривается численное решение данной задачи с помощью степенных рядов. Первые работы в этой области появились в сороковых годах двадцатого века. Толчком к развитию этого направления стали работы В.А. Амбурцумяна и Г. Борга. Значительный вклад в становление этого направления внесли советские ученые А.Н. Тихонов, Б.М. Левитан, В.А. Марченко, В.А. Садовничий, В.А. Юрко и другие. Под влиянием этих ученых в настоящее время сложились крупные центры изучения обратных спектральных задач. Основное отличие от работ других авторов состоит в том, что в данной работе для определения потенциала используется конечное число собственных значений краевой задачи.

2. Постановка задачи

Рассматривается задача Штурма—Лиувилля следующего вида:

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \tag{1}$$

$$U_1(y) = y'(0) - hy(0) = 0, \tag{2}$$

$$U_2(y) = y'(1) + Hy(1) = 0, \tag{3}$$

где потенциал $q(x)$ аналитична всюду в области определения и имеет следующий вид:

$$q(x) = q_1 + q_2 x. \tag{4}$$

Требуется определить коэффициенты q_1, q_2 по конечному числу собственных значений.

3. Метод решения

С помощью метода описанного в работе [1] построим характеристическое уравнение в виде степенного ряда.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 16-31-00077-мол_а).

Общее решение уравнения (1) будем искать в виде:

$$y(x,\lambda) = C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{5}$$

где y_1, y_2 — фундаментальная система решений дифференциального уравнения (1). Линейно независимые функции y_1, y_2 будем строить в виде ряда

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{6}$$

где y_1 удовлетворяет условию

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0, \tag{7}$$

а y_2 удовлетворяет

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1. \tag{8}$$

После подстановки ряда (6) в уравнение (1), и удовлетворив условиям (7)–(8), функции y_1, y_2 примут вид:

$$y_1 = 1 + (q_1 - \lambda)\,\tfrac{x^2}{2} + q_2 \tfrac{x^3}{6} + \left(\tfrac{1}{2}q_1^2 - q_1\lambda + \tfrac{1}{2}\lambda^2\right)\tfrac{x^4}{12} + q_2(q_1-\lambda)\tfrac{x^5}{30} + \ldots \tag{9}$$

$$y_2 = x + (q_1 - \lambda)\,\tfrac{x^3}{6} + q_2\tfrac{x^4}{12} + (q_1-\lambda)^2\,\tfrac{x^5}{120} + (q_1 q_2 - \lambda q_2)\,\tfrac{x^6}{120} + \ldots \tag{10}$$

Чтобы найти константы C_1, C_2 воспользуемся краевыми условиями (2)–(3). Уравнения частот получают из условия существования ненулевого решения для C_1, C_2. Ненулевое решение для констант $C_i, i = 1, 2$ существует тогда и только тогда, когда равен нулю характеристический определитель

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} U_1(y_1(\lambda,x)) & U_1(y_2(\lambda,x)) \\ U_2(y_1(\lambda,x)) & U_2(y_2(\lambda,x)) \end{vmatrix} \tag{11}$$

соответствующей системы (см. [2]). Преобразуя (11), получим

$$\Delta(\lambda) = f_{13}(\lambda) + Hf_{14}(\lambda) + hf_{23}(\lambda) + hHf_{24}(\lambda), \tag{12}$$

где коэффициенты f_{ij} вычисляются по формулам:

$$f_{13}(\lambda) = y_1'(0)y_2'(1) - y_2'(0)y_1'(1), \qquad f_{14}(\lambda) = y_1'(0)y_2(1) - y_2'(0)y_1(1),$$

$$f_{23}(\lambda) = y_2(0)y_1'(1) - y_1(0)y_2'(1), \qquad f_{24}(\lambda) = y_2(0)y_1(1) - y_1(0)y_2(1).$$

Причем y_1, y_2 являются целыми функциями по λ при каждом фиксированном x.

Пусть λ_k являются собственными значениями краевой задачи (1)–(3). Тогда λ_k — корни характеристического уравнения (12) [2]. Подставляя значения λ_k в (12), получаем систему уравнений для отыскания неизвестных q_1, q_2:

$$\Delta(\lambda_k) = f_{13}(\lambda_k) + Hf_{14}(\lambda_k) + hf_{23}(\lambda_k) + hHf_{24}(\lambda_k). \tag{13}$$

Рассмотрим пример нахождения коэффициентов q_1, q_2 потенциала $q(x)$.

Пример 1. Пусть известны две собственные частоты $\lambda_1 = 2.695412885$, $\lambda_2 = 13.63759072$ задачи (1)–(3) при $h = 0.2$, $H = 0.7$. Подставив их в (13), при этом используя только 20 членов в сумме рядов (9)–(10), получим систему двух уравнений:

$$f_{13}(\lambda_1) + Hf_{14}(\lambda_1) + hf_{23}(\lambda_1) + hHf_{24}(\lambda_1) = 0,$$

$$f_{13}(\lambda_2) + Hf_{14}(\lambda_2) + hf_{23}(\lambda_2) + hHf_{24}(\lambda_2) = 0.$$

С помощью математического пакета Maple получено 53 набора решений данной системы, 7 наборов решений которого принадлежат вещественной плоскости, остальные наборы комплексные. Приведем только вещественные корни:

$$\{q_1 = 0.9999998363, q_2 = 2.000000368\}; \{q_1 = 4.961061701, q_2 = -5.989549022\};$$

$$\{q_1 = -32.53592452, q_2 = 32.75768412\}; \{q_1 = -40.52336519, q_2 = 33.38414342\};$$

$$\{q_1 = -47.93371861, q_2 = 11.69284765\}; \{q_1 = -58.46219623, q_2 = -16.05477406\};$$

$$\{q_1 = -66.75141756, q_2 = 10.35790636\};$$

Возникает вопрос: сколько собственных частот нужно взять для однозначного решения поставленной задачи?

Авторами в работе [3] установлено, что требуется решить несколько систем уравнений с числом уравнений, совпадающим с числом неизвестных, а затем найти пересечение этих решений.

Пример 2.Пусть известно третье собственное значение $\lambda_3 = 43.09767243$ из приведенного выше примера. Решив систему используя первое и третье собственное значение снова получаем 53 набора решений, из которых 11 вещественных:

$$\{q_1 = 1.000002573, q_2 = 1.999994134\}; \{q_1 = 4.185346710, q_2 = -4.560177166\};$$

$$\{q_1 = 11.72110176, q_2 = -197.2999809\}; \{q_1 = 51.31850445, q_2 = -56.58796793\};$$

$$\{q_1 = -8.252207686, q_2 = 32.54627927\}; \{q_1 = -14.00204040, q_2 = -52.23258237\};$$

$$\{q_1 = -15.90604422, q_2 = 12.22937252\}; \{q_1 = -30.76361468, q_2 = -16.41785052\};$$

$$\{q_1 = -47.69927417, q_2 = 11.57335390\}; \{q_1 = -48.73930975, q_2 = -22.59850587\};$$

$$\{q_1 = -54.17368672, q_2 = 12.56878220\};$$

Сравнивая найденные решения из примера 1 и 2 видим, что первое решение является общим (с точностью до 5 знаков после запятой) и это решение является сутью решения поставленной задачи (точное решение $q_1 = 1$, $q_2 = 2$). При сравнении наборов решений были использованы также и комплексные наборы, но совпадений среди них не обнаружено. Аналогичный результат получается при использовании второго и третьего собственного значения. Отсюда следует вывод, что для однозначного нахождения коэффициентов q_1, q_2 потенциала вида $q(x) = q_1 + q_2 x$ достаточно 3-х собственных значений.

4. Заключение

В работе предложен численный метод решения задачи восстановления потенциала специального вида. Приведен пример показывающий, что для однозначной идентификации коэффициентов потенциала двух собственных чисел недостаточно.

Литература

1. Утяшев И. М., Ахтямов А. М. Идентификация краевых условий струны по собственным частотам колебаний // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2016. Т. 11. С. 38-–52.

2. Неймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука. 1969. 526 с.

3. Ахтямов А. М., Урманчеев С. Ф. Об определении параметров твердого тела, прикрепленного к одному из концов балки // Сибирский журнал индустриальной математики. 2008. Т. 11, № 4. С. 19–24.

MSC 35C11

Restoration of the potential of a special type with respect to natural frequencies of oscillations

I.M. Utyashev [1]

Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa Branch of the Russian Academy of Sciences [1]

Abstract: The problem of determining the potential $q(x)$ of a special type with respect to natural frequencies of oscillations is considered. In particular, we consider a potential of the form $q(x) = q_1 + q_2 x$, which describes a linear change in the elasticity coefficient of the medium. It is shown that the coefficients q_1 and q_2 characterizing the linear change in the elasticity coefficient of the medium are uniquely determined by the three natural frequencies of the string vibrating in this medium.

Keywords: Spectral problem, identification, potential, eigenvalues.

References

1. Utyashev I. M., Akhtyamov A. M. Identifikatciya kraevykh usloviy struni po sobstvennym chastotam kolebaniy [Identification of the string boundary conditions using natural frequencies] // Trudy Instituta mehaniki im. R.R. Mavliutova Ufimskogo nauchnogo centra RAN [Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa]. 2016. V. 11. P. 38-–52.

2. Neiymark M. A. Leeneynie differentcial'nie operatory [Linear differential operators]. Moscow, Publishing of the "Nauka", 1969. 526 p.

3. Akhtyamov A. M., Urmancheev S. F. Ob opredelenii parametrov tverdogo tela, prikreplennogo k odnomu iz kontcov balki [On the determination of the parameters of a rigid body attached to one of the ends of a beam] // Sibirskiy zhurnal industrialnoy matematiki [Journal of Applied and Industrial Mathematics]. 2008. V. 11, № 4. P. 19–24.