XIII Международная научная конференция "Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании", Саранск, 12-16 июля 2017.
XIII International scientific conference "Differential equations and their applications in mathematical modeling", Saransk, July 12-16, 2017.

УДК 51-71

О многозначных решениях двумерных линейных параболических уравнений

В.М. Журавлев[1], В.М. Морозов[2]

Ульяновский государственный университет, Научно-исследовательский технологический институт им. С.П. Капицы[1,2]

Аннотация: В работе рассматривается задача о вычислении решений двумерных линейных уравнений параболического типа. Представлена полная процедура вывода решений и показано появление специфического их вырождения, названного топологическим. Показано, что в двумерном координатном пространстве среди параболических уравнений, обладающих топологическим вырождением, есть уравнение Шредингера для нестационарного квантового гармонического осциллятора, однородного электрического поля и пустого пространства. Приведены примеры конкретных решений.

Ключевые слова: точные решения линейных двумерных параболических уравнений, многозначные решения, двумерный квантовый осциллятор.

1. Введение

В настоящей работе рассматривается задача построения решений двумерных линейных параболических уравнений с потенциалами, функциональный вид которых принадлежит классу комплексных функций, включающему в качестве частного случая важные для прикладных задач вещественные квадратичные по координатам потенциалы, произвольно заисящие от времени. Решения строятся в форме суперпозиции по комплексным экспонентам, зависящим от формального спектрального параметра. Такой подход позволяет свести задачу вычисления решений параболического уравнения к решению системы уравнений, подобной той, которая встречается в теории эйконала [1–3]. Отличием предлагаемого подхода от теории эйконала и аналогичных методов состоит в использовании при построении решений квазилинейных уравнений первого порядка. В результате удается даже для классических задач, связанных с двумерными параболическими уравнениями такими, как уравнение диффузии, квантовый гармонический осциллятор или квантовой частицы в однородном поле, получить новые классы решений, которые представляют собой многозначные функции. Появление квазилинейных уравнений в теории параболических уравнений указывает на существование среди их решений многозначных функций. Этот факт исследуется в работе и демонстрируется на примерах.

2. Задача о вычислении решений линейного параболического уравнения

Рассмотрим d-мерные линейные операторы следующего вида:

$$\hat{L} = \frac{\partial}{\partial t} - D(t)\Delta,$$

где D - комплексная функция переменной t, а Δ - d - мерный оператор Лапласа:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Рассмотрим задачу вычисления решений параболических уравнений:

$$\hat{L}\Psi - U(\mathbf{x},t)\Psi = 0, \tag{1}$$

где $U(\mathbf{x},t)$ - некоторая заданная функция, вообще говоря, комплексная.

Рассмотрим действие оператора $\hat{L}$ на функции $\Psi(\mathbf{x},t)$ следующего общего вида:

$$\Psi(\mathbf{x},t;\lambda) = e^{\theta(\mathbf{x},t)+\lambda\phi(\mathbf{x},t)}, \tag{2}$$

где $\theta(\mathbf{x},t)$ и $\phi(\mathbf{x},t)$ - две вспомогательных функции, которые далее будем называть фазовыми, $\mathbf{x} = (x,y)$, а λ- некоторый формальный спектральный параметр. Подобное представление волновых функций используется в методе ВКБ и теории квазиклассического приближения квантовой теории [4,5]. Однако задачей данной работы будет анализ таких ситуаций, когда функции (2) будут не приближенными, а именно точными решениями линейных уравнений параболического типа.

Имеем:

$$\hat{L}\Psi = \Big[\hat{L}\theta - D\Big(\nabla\theta,\nabla\theta\Big) + \lambda\Big(\hat{L}\phi - 2D(\nabla\theta,\nabla\phi)\Big) - \lambda^2 D\Big(\nabla\phi,\nabla\phi\Big)\Big]\,\Psi = U(\mathbf{x},t;\lambda)\Psi.$$

Здесь и далее вводится скалярное произведение вида:

$$(\nabla f,\nabla h) = (f_x)^2 + (f_y)^2.$$

Рассмотрим задачу о вычислении таких функций $\theta(\mathbf{x},t)$ и $\phi(\mathbf{x},t)$, для которых функция $U(\mathbf{x},t;\lambda)$ в правой части последнего равенства не зависит от λ. Условием выполнения этого требования являются два следующих соотношения:

$$U(\mathbf{x},t) = \hat{L}\theta - D(\nabla\theta,\nabla\theta), \quad \hat{L}\phi - 2D(\nabla\theta,\nabla\phi) = 0, \quad D\Big(\nabla\phi,\nabla\phi\Big) = 0. \tag{3}$$

Первое из этих уравнений является аналогом уравнения переноса в приближении геометрической оптики для гиперболических уравнений, а второе - аналогом уравнения эйконала [2]. В предположении независимости потенциала $U(\mathbf{x},t)$ от λ, решениями уравнения (1) будут все функции вида:

$$\psi(\mathbf{x},t) = e^{\theta(x,t)}\int\limits_{\lambda} e^{\lambda\phi(\mathbf{x},t)}d\lambda = e^{\theta(\mathbf{x},t)}F(\phi(\mathbf{x},t)).$$

Дальнейшей задачей данной работы будет явное вычисление вида функций $\theta(\mathbf{x},t)$ и $\phi(\mathbf{x},t)$, а так же связанного с ними потенциала $U(\mathbf{x},t)$.

3. Условия существования решений

Последнее уравнение в системе (3) можно записать в виде:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 = 0,$$

или

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} \pm i\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0.$$

Общим решением этих уравнений будет произвольная аналитическая функция $\phi(z,t)$ (соответственно, $\phi(\overline{z},t)$) времени t и одного комплексного аргумента $z = x+iy$ ($\overline{z} = x - iy$). В дальнейшем вычисления будут проводиться для варианта $\phi = \phi(z,t)$.

Поскольку:

$$\Delta\phi(z,t) = 4\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial\overline{z}} = 0,$$

первое уравнение в системе (3) теперь приобретает следующий вид:

$$\phi_t - 4D\frac{\partial\theta}{\partial\overline{z}}\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0. \tag{4}$$

Обозначим:

$$v(z,t) = \frac{\phi_t}{4D\phi_z} = \frac{\partial\theta}{\partial\overline{z}}. \tag{5}$$

Тогда решение (4) относительно θ можно представить так:

$$\theta = \overline{z}v(z,t) + g(z,t), \tag{6}$$

где $g(z,t)$ - постоянная интегрирования по $\overline{z}$ является произвольной аналитической функцией аргументов z и t. Подставляя это соотношение для θ в первое соотношение в(3), находим:

$$U(z,\overline{z},t) = \overline{z}M(z,t) + N(z,t), \tag{7}$$

где введены обозначения:

$$\dot{v} - 4D(t)vv' = M(z,t), \quad \dot{g} - 4D(t)vg' - 4D(t)v' = N(z,t). \tag{8}$$

Выбор $M(z,t)$ и $N(z,t)$ может быть произвольным в классе аналитических по z и t функций и определяться постановкой задачи и свойствами среды, для которой задача решается. Совокупность уравнений (8) представляет собой условия существования решений типа (2) уравнений (1) для потенциала $U(\mathbf{x},t)$ общего вида (7). Эти условия следует рассматривать как уравнения для функций $v(z,t)$ и $g(z,t)$, с помощью которых вычисляется решение (2) исходного уравнения.

4. Общий метод построения решений

Общим способом построения решений системы уравнений (8) при заданных функциях $M(z,t)$ и $N(z,t)$, является метод характеристик. Уравнение характеристик системы (8) имеет вид:

$$\frac{dz}{dt} = -4D(t)v. \tag{9}$$

В отличие от классического метода характеристик это уравнение является комплексным, т.е. по сути эквивалентно паре вещественных уравнений, объединенных в одно комплексное уравнение. Это означает, что в реальности уравнения (8) следует рассматривать как систему двумерных квазилинейных уравнений на плоскости x, y с оператором переноса вида:

$$\hat{S} = \frac{\partial}{\partial t} - \hat{Q}, \quad \hat{Q} = 4\Big(\alpha(t)\xi - \beta(t)\eta\Big)\frac{\partial}{\partial x} + 4\Big(\alpha(t)\eta + \beta(t)\xi\Big)\frac{\partial}{\partial y} \tag{10}$$

где введены обозначения: $D(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$ и $v(z,t) = \xi(x,y,t) + i\eta(x,y,t)$, и использованы условия Коши для аналитических функций:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{\partial\eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial\xi}{\partial y} = -\frac{\partial\eta}{\partial x}, \; \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Вводя дополнительно обозначения: $g(z,t) = p(x,y,t) + iq(x,y,t)$, уравнения (8) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} &\xi_t + \hat{Q}\xi = P(x,y,t), \quad \eta_t + \hat{Q}\eta = Q(x,y,t), \\ &p_t + \hat{Q}p - \hat{Q}\xi = K(x,y,t), \quad q_t + \hat{Q}q - \hat{Q}\eta = L(x,y,t), \\ &M(z,t) = P(x,y,t) + iQ(x,y,t), \quad N(z,t) = K(x,y,t) + iL(x,y,t). \end{aligned} \tag{11}$$

Уравнения (8) в этом случае решаются с помощью метода характеристик (вещественных), уравнения которых имеют такой вид:

$$\frac{dx}{dt} = -4\Big(\alpha(t)\xi - \beta(t)\eta\Big), \quad \frac{dy}{dt} = -4\Big(\alpha(t)\eta + \beta(t)\xi\Big), \tag{12}$$

Совокупность этих уравнений эквивалентна (9). Таким образом, уравнения (8) можно рассматривать как компактную форму записи уравнений (11), а уравнение характеристик (8), как компактную форму уравнений (12). Поэтому в дальнейшем мы будем работать непосредственно с уравнениями и их решениями в комплексных переменных.

Для удобства вместо времени t полезно ввести новый параметр $\tau = 4\int D(t)dt$. Тогда на этих характеристиках уравнение для функций v и g примут такой вид:

$$\frac{dv}{d\tau} = m(z,\tau), \quad \frac{dg}{d\tau} = v' + n(z,\tau). \tag{13}$$

Здесь введены обозначения: $m(z,\tau) = M(z,t)/4D(t)$, $n(z,\tau) = N(z,t)/4D(t)$. Подставляя v из (9) в первое уравнение, получаем уравнение для характеристики в комплексной плоскости z:

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} = -m(z,\tau). \tag{14}$$

При произвольном выборе $m(z,\tau)$ это уравнение представляет собой нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка и имеет две постоянные интегрирования I, J, которые с точки зрения метода характеристик [6] представляют собой независимые интегралы движения.

Согласно общей теории метода характеристик, если найдены оба интеграла движения $I(v,z,\tau)$ и $J(v,z,\tau)$ уравнения (9) и первого уравнения (13), то общее решение системы (8) относительно v находится из алгебраического уравнения:

$$H\Big(I(v,z,\tau), J(v,z,\tau)\Big) = 0, \tag{15}$$

где $H(I,J)$ - произвольная комплексная функция своих аргументов. После этого вычисляется решение для $g(z,t)$, которое можно записать в виде:

$$g(z,\tau) = \int\limits_C \Big(v' + n(z,\tau)\Big)d\tau + G(I,J), \tag{16}$$

где интеграл в правой части берется вдоль характеристик, а $G(I,J)$ - произвольная постоянная интегрирования вдоль характеристики, т.е. функция интегралов движения I и J.

После того, как вычислены решения для $v(z,t)$, решение для $\phi(z,t)$, в силу ее определения (5), строится как решение уравнения:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} - 4Dv\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0. \tag{17}$$

Следовательно, полное решение этого уравнения будет иметь такой вид:

$$\phi = P(I,J), \tag{18}$$

где $P(I,J)$ - произвольная функция интегралов движения. Таким образом, справедливо следующее утверждение:

Утверждение 1. Уравнение (1) с потенциалом (7) имеет в качестве решений все функции вида:

$$\Psi = R(I,J)\exp\Big(\overline{z}v(z,\tau) + \int\limits_C (v' + n(z,\tau))d\tau\Big). \tag{19}$$

где функции $v(z,t)$ и $\phi(z,t)$ вычисляются из алгебраических уравнений (15) и (18), а функция $\theta(x,y,t)$ при этом имеет вид (16). Функция $R(I,J) = \exp(G(I,J))$ - произвольная функция интегралов движения.

Решение алгебраического (трансцендентного) уравнения (15) относительно $v(z,t)$ в общем случае не единственно. Множество таких решений может быть конечным в случае, если, например, функция $H\Big(I(v,z,\tau), J(v,z,\tau)\Big)$ в (15) является полиномом конечного порядка относительно v. Поскольку каждое решение уравнения (15) относительно v приводит к новому линейно-независимому решению уравнения (1) с потенциалом (7), то это можно интерпретировать как дополнительное вырождение решений этого уравнения, кроме "естественного" вырождения по спектральному параметру λ. Такое вырождение можно назвать "**топологическим**", поскольку оно связано с топологией комплексной гиперповерхности (15), в случае геометрической интерпретации этого уравнения. В отличие от вырождения по параметру λ топологическое вырождение определяется не общей структурой пространственно-временных симметрий решений, а структурой начальных или граничных условий. Это означает, что в тех областях пространства-времени, где функции $v(z,t)$ имеют больше одного решения, каждому из них будет соответствовать отдельная функция $\Psi(x,y,t|H)$ (2), отвечающая одному и тому же потенциалу $U(x,y,t)$ (7). При этом отдельные решения для $v(z,t)$ могут иметь точки склейки листов между собой, а могут их и не иметь.

Утверждение 2. Решения уравнения (1) для потенциала (7) обладают дополнительным **топологическим** вырождением, которое определяется множеством всех решений алгебраического (трансцендентного) уравнения (15), в котором функция $H(I,J)$ определяется начальным распределением $v(z,0)$. Каждому решению этого уравнения будет соответствовать отдельное линейно-независимое решение $\Psi_a(x,y,t|H),\ a = 1,\ldots$ уравнения (1), где индекс a нумерует все возможные решения, отвечающие заданной функции H. Отдельные функции $\Psi_a(x,y,t|H),\ a = 1,2,\ldots$, отвечающие различным значениям a, могут иметь точки склейки $Z_k = X_k + iY_k,\ k = 1,2\ldots$, перемещающиеся со временем, в которых сами функции непрерывны, а их производные имеют особенности. В этих точках значения отдельных функций $\Psi_a(x,y,t|H)$ и $\Psi_b(x,y,t|H)$ при $a \neq b$ совпадают.

Обратим внимание на то, что в случае $N(z,t) = 0$, уравнение для $W = \exp(g(z,\tau))$ принимает вид дифференциального закона сохранения:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} W - \frac{\partial}{\partial z}\Big(Wv\Big) = 0. \tag{20}$$

Отсюда следует, что существует такая функция ξ, что:

$$\xi_z = W, \quad \xi_t = Wv.$$

Эта функция в силу уравнения (20) удовлетворяет уравнению:

$$W_t - vW' = 0,$$

как и функция ϕ, т.е. является функцией интегралов движения: $W = W(I,J)$.

Замечание. В случае $N(z,t) = 0$, решение параболического уравнения можно представить в следующем общем виде:

$$\Psi = \exp\Big(\overline{z}v(z,\tau)\Big)\frac{\partial W(I,J)}{\partial z}. \tag{21}$$

5. Квадратичный потенциал

Функциональный вид потенциала (7) таков, что при произвольном выборе двух комплексных аналитических функций $M(z,t)$ и $N(z,t)$ он будет, как правило, комплексным.

Такая ситуация встречается в оптике неоднородных активных сред. Однако в других физических приложениях чаще приходится иметь дело с потенциалами, которые либо вещественные, либо чисто мнимые. В частности, в случае, когда оператор $\hat{L}$ имеет форму оператора Шредингера квантовой механики с гамильтонианом нестационарного гармонического осциллятора. Для того, чтобы выражение для $U(x, y, t)$ допускало в качестве варианта исключительно вещественные значения, необходимо, чтобы функции $M(z, t)$ и $N(z, t)$ имели такой вид:

$$M(z,t) = A(t)z + B_1(t), \quad N(z,t) = B_2(t)z + C(t), \tag{22}$$

где функции $A(t),\ B_1(t),\ B_2(t)$ и $C(t)$ - произвольные комплексные функции. Соответственно, функции $v(z, t)$ и $g(z, t)$ должны удовлетворять следующим двум уравнениям переноса фазы:

$$\dot{v} - 4Dvv' = A(t)z + B_1(t), \quad \dot{g} - 4Dv' - 4Dvg' = B_2(t)z + C(t), \tag{23}$$

а потенциал будет иметь такой вид:

$$U(z, \overline{z}, t) = A(t)|z|^2 + B_1(t)\overline{z} + B_2(t)z + C(t). \tag{24}$$

Такой потенциал является наиболее общей формой вещественного потенциала, допускаемого формой (7).

Рассмотрим теперь общее решение уравнений (23) относительно функций $v(z, t)$ и $g(z, t)$, отвечающих квадратичному потенциалу $U(x, y, t)$ (24) с произвольными коэффициентами $A(t),\ B_1(t),\ B_2(t)$ и $C(t)$. Система (13) для такого выбора функций $M(z, t)$ и $N(z, t)$ является линейной:

$$\frac{dz}{dt} = -4Dv, \quad \frac{dv}{dt} = A(t)z + B_1(t). \tag{25}$$

Вводя новую переменную $\tau = 4\int D(t)dt$ и исключая v, приходим к следующим линейным уравнениям для $z(t)$:

$$\frac{dz}{d\tau} = -v, \qquad \frac{d^2z}{d\tau^2} + \Omega^2(\tau)z + b(\tau) = 0, \tag{26}$$

где введены обозначения: $\Omega^2(\tau) = A/(4D),\ b(\tau) = B_1/(4D)$. Соответствующее уравнение для $g(z, \tau)$ примет такой вид:

$$\frac{dg}{d\tau} = v' + \overline{b}(\tau)z + c(\tau), \quad c(\tau) = C(t)/4D(t). \tag{27}$$

Уравнение (26) есть уравнение линейного (двумерного) осциллятора с изменяющейся со временем комплексной частотой $\Omega^2(\tau)$, записанного в комплексных координатах. Обозначим через $Z_1(\tau)$ и $Z_2(t)$ - два независимых решения однородного уравнения (26), а через $Z_0(\tau)$ - одно из решений неоднородного уравнения (26), которое может быть вычислено, например, с помощью метода вариации постоянных. Тогда общее решение для $z(\tau)$ и $v(\tau)$ на характеристиках можно записать в виде:

$$\begin{aligned} z(\tau) &= IZ_1(\tau) + JZ_2(\tau) + Z_0(\tau), \\ v(\tau) &= -I\dot{Z}_1(\tau) - J\dot{Z}_2(\tau) - \dot{Z}_0(\tau). \end{aligned} \tag{28}$$

Постоянные I и J и есть необходимые нам интегралы движения на характеристиках. Из этих двух соотношений можно найти явный вид этих интегралов:

$$\begin{aligned} I &= F_{11}(\tau)\Big(z - Z_0(\tau)\Big) + F_{12}(\tau)\Big(v + \dot{Z}_0(\tau)\Big), \\ J &= F_{21}(\tau)\Big(z - Z_0(\tau)\Big) + F_{22}(\tau)\Big(v + \dot{Z}_0(\tau)\Big). \end{aligned} \tag{29}$$

Здесь:

$$F_{11}=\dot{Z}_2/W,\quad F_{12}=Z_2/W,\quad F_{21}=-\dot{Z}_1/W,\quad F_{22}=-Z_1/W,$$
$$W=Z_1\dot{Z}_2-Z_2\dot{Z}_1,\quad Z_0=-Z_1\int\limits_0^\tau F_{12}(\tau')b(\tau')d\tau'-Z_2\int\limits_0^\tau F_{22}(\tau')b(\tau')d\tau'$$

Таким образом, общее решение первого уравнения системы (23) для $v(z,\tau)$ можно записать в виде (15):

$$H\Big(F_{11}(\tau)z+F_{12}(\tau)v+R_1(\tau),F_{21}(\tau)z+F_{22}(\tau)v+R_2(\tau)\Big)=0, \tag{30}$$

где

$$R_1(\tau)=-\frac{1}{W}\frac{d}{d\tau}\Big(Z_2Z_0\Big),\quad R_2(\tau)=\frac{1}{W}\frac{d}{d\tau}\Big(Z_1Z_0\Big).$$

6. Квантовый гармонический осциллятор

В качестве примера рассмотрим применение данного подхода к задаче о нестационарном двумерном квантовом гармоническом осцилляторе, волновые функции которого удовлетворяют уравнению Шредингера:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi+\left[\frac{m\omega_0^2}{2}\left[(x-x_0(t))^2+(y-y_0(t))^2\right]\right]\Psi. \tag{31}$$

Примером реальной системы, в которой потенциал имеет такой вид, является движение электрона в однородном магнитном поле, направленном вдоль оси, ортогональной плоскости (x,y). Кроме стандартной квантовой интерпретации, это уравнение можно рассматривать как уравнение для амплитуды огибающей оптического излучения в линейной неоднородной неактивной среде [2]. Поскольку квантовая теория содержит специальные постулаты отбора физически реализуемых решений, например, требование непрерывности волной вой функции, то в случае нарушения этого требования полученные решения полезно интерпретировать именно с точки зрения их приложения в оптике неоднородных сред.

Сравнивая потенциал этого уравнения с (24), находим:

$$\begin{aligned}&D=i\frac{\hbar}{2m}=iD_0,\quad A=-i\frac{m\omega_0^2}{2\hbar},\quad z_0=x_0(t)+iy_0(t),\quad \Omega_0^2=\frac{m^2\omega_0^2}{4\hbar^2},\\ &B_1=16i\Omega^2D_0z_0(t),\quad B_2=16i\Omega_0^2D_0\bar{z}_0(t),\quad C=-4i\Omega_0^2D_0|z_0|^2.\end{aligned} \tag{32}$$

Учитывая, что коэффициенты потенциала чисто мнимые, удобно ввести переменную τ так: $\tau=4D_0t$. Тогда: $b(\tau)=4i\Omega_0^2z_0(\tau)$ и $c(\tau)=-4i\Omega_0^2|z_0(\tau)|$, а уравнения на характеристиках примут вид:

$$\frac{dz}{d\tau}=-iv,\quad \frac{dv}{d\tau}=-i\Omega_0^2z+b(\tau),\quad \frac{dg}{d\tau}=iv'+\bar{b}(\tau)z+c(\tau). \tag{33}$$

Соответствующее уравнение (26) для $z(\tau)$ примет такой вид:

$$\frac{\partial^2z}{\partial\tau^2}+\Omega_0^2z=4\Omega_0^2z_0(\tau). \tag{34}$$

Линейно-независимые решения однородной части этого уравнения можно выбрать в таком виде: $Z_1=e^{-i\Omega_0\tau}$, $Z_2=e^{i\Omega_0\tau}$. Заметим, что в выбранных единицах координат и времени величина Ω_0 имеет размерность обратного квадрат длины. Однако для общности рассмотрения мы далее будем говорить об осцилляциях с частотой Ω_0.

Подставляя эти однородные решения в формулы (29), находим:

$$W = Z_1\dot{Z}_2 - Z_2\dot{Z}_1 = 2i\Omega_0,\ Z_0(\tau) = \frac{i}{2\Omega_0}\int\limits_0^{\tau} \sin\Big(\Omega_0(\tau-\tau')\Big)b(\tau')d\tau',$$

$$F_{11} = \frac{1}{2}e^{i\Omega_0\tau},\quad F_{12} = \frac{i}{2\Omega_0}e^{i\Omega_0\tau},\quad F_{21} = \frac{1}{2}e^{-i\Omega_0\tau},\quad F_{22} = -\frac{i}{2\Omega_0}e^{-i\Omega_0\tau}.$$

Для упрощения анализа будем полагать $z_0(\tau) \equiv 0$ и $v(t) \equiv 0$, что приводит к соотношениям: $b(\tau) = Z_0(\tau) \equiv 0$ и $c(\tau) \equiv 0$. В этом случае упрощаются выражения для интегралов движения, что не меняет наиболее важной сути построенных решений. Кроме этого, вместо общего решения (19) можно воспользоваться более простой формой решения в виде (21). В этом случае интегралы движения будут иметь такой вид:

$$I = \frac{1}{2\Omega_0}e^{i\Omega_0\tau}\Big(\Omega_0 z + v\Big) = \zeta^+(v,z,\tau),\quad J = \frac{1}{2\Omega_0}e^{-i\Omega_0\tau}\Big(\Omega_0 z - v\Big) = \zeta^-(v,z,\tau). \tag{35}$$

Таким образом, волновые функции гармонического осциллятора будут иметь следующий вид:

$$\Psi = e^{\bar{z}v(z,\tau)}\frac{\partial W(\zeta^+,\zeta^-)}{\partial z}, \tag{36}$$

где сохранены обозначения соотношения (19) и (21). Функция $W(\zeta^+,\zeta^-)$ - произвольная функция интегралов движения. Экспоненту в этом выражении с показателем $z^*v(z,\tau)$ будем далее называть основной экспонентой.

С точки зрения квантовой теории интерес представляют волновые функции, убывающие на бесконечности и непрерывные на всей плоскости z на заданном интервале времени. Поэтому эти свойства необходимо проверять для каждого конкретного решения относительно $v(z,\tau)$.

Классические решения теории квантового гармонического осциллятора получаются из общих решений (36) в случае выбора функции $H(I,J)$ в виде:

$$H(I,J) = I = e^{i\Omega_0\tau}(\Omega_0 z + v) = 0.$$

Отсюда $v = -\Omega_0 z$, и $J = 2e^{-i\Omega_0\tau}\Omega_0 z$ решение (36) принимает следующий вид:

$$\Psi = e^{-\Omega_0|z|^2}e^{-i\Omega_0\tau}2\Omega_0 R\Big(2e^{-i\Omega_0\tau}\Omega_0 z\Big), \tag{37}$$

где $R(J) = \partial W(0,J)/\partial J$ - произвольная функция интеграла J.

Это классическое решение имеет следующее обобщение. Пусть $H(\zeta^+,\zeta^-) = k_1\zeta^+ + k_2\zeta^- + k_0$, где k_1,k_2,k_0 - вещественные постоянные, хотя бы одна из которых отлична от нуля. Решение для $v(z,\tau)$ в этом случае можно вычислить явно из соотношения:

$$\frac{k_1}{2\Omega_0}e^{i\Omega\tau}(\Omega_0 z + v) + \frac{k_2}{2\Omega_0}e^{-i\Omega_0\tau}(\Omega_0 z - v) + k_0 = 0$$

В результате имеем:

$$v = -\Omega_0\frac{2k_0 + zp(\tau)}{q(\tau)} = -\Omega_0\Big(\alpha(\tau)z + \beta(\tau)\Big), \tag{38}$$

где $p(\tau) = k_1e^{i\Omega_0\tau} + k_2e^{-i\Omega_0\tau},\ \ q(\tau) = k_1e^{i\Omega_0\tau} - k_2e^{-i\Omega_0\tau}$, и:

$$\alpha(\tau) = \frac{p(\tau)}{q(\tau)},\quad \beta(\tau) = -\frac{2k_0}{q(\tau)}.$$

Показатель основной экспоненты в этом случае примет следующий вид:

$$\Phi = \overline{z}v(z,\tau) = -\alpha(\tau)\Omega_0|z|^2 + \beta(\tau)\Omega_0\overline{z},$$

Отсюда следует, что сама экспонента будет убывать к нулю при $|z| \to \infty$, если знак функции:

$$\mathrm{Re}[\alpha(\tau)] = \mathrm{Re}\left[\frac{p(\tau)}{q(\tau)}\right] = \frac{(k_1^2 - k_2^2)}{k_1^2 + k_2^2 - 2k_1k_2\cos(2\Omega_0\tau)}.$$

будет положительным: $\mathrm{Re}[\alpha(\tau)] > 0$, что соответствует условию:

$$|k_1| > |k_2|.$$

В частности, при $k_0 = k_2 = 0$: $v = -\Omega_0 z$ приходим к классическим решениям теории квантового гармонического осциллятора.

В примере с $k_0 \neq 0,\ k_2 \neq 0$ решение можно представить в виде:

$$\Psi = e^{-\alpha(\tau)\Omega_0|z|^2+\beta(\tau)\Omega_0\overline{z}}\frac{\partial}{\partial z}W(\zeta^+,\zeta^-), \tag{39}$$

где $W(\zeta^+,\zeta^-)$ - как и раньше, произвольная функция интегралов движения, форма которой определяется граничными и начальными условиями.

Предыдущий пример демонстрирует однолистное решение уравнения Шредингера. Рассмотрим кратко более сложный вариант выбора функции $H(\zeta^+,\zeta^-)$ в такой форме:

$$H(\zeta^+,\zeta^-) = k_1(\zeta^+)^2 - k_2(\zeta^-)^2 + k_0 = \left(q(2\tau)\left(\Omega_0^2z^2 + v^2\right) + 2p(2\tau)\Omega_0vz\right)/(4\Omega_0^2) + k_0 = 0. \tag{40}$$

В этом случае решение для v и, следовательно, для Ψ будет двулистным (двузначным). Выберем числа k_1, k_2, k_0, как и в предыдущем примере, для определенности вещественными.

Квадратное относительно v уравнение (40) имеет решение:

$$v = -\Omega_0\left(\alpha(2\tau)z \pm \sqrt{\left(\alpha^2(\tau) - 1\right)z^2 - 4k_0r(\tau)}\right), \tag{41}$$

где $r(\tau) = [q(2\tau)]^{-1}$. Показатель основной экспоненты имеет следующий вид:

$$\Phi = \overline{z}v = -\Omega_0\left(\alpha(2\tau)|z|^2 \pm \sqrt{\left(\alpha^2(2\tau) - 1\right)|z|^4 - 4k_0r(\tau)\overline{z}^2}\right).$$

В пределе $|z| \to \infty$ имеем:

$$\Phi \simeq \Omega_0\left(-\alpha(2\tau) \mp \sqrt{\alpha^2(2\tau) - 1}\right)|z|^2 = -\Omega_0\alpha_2(\tau)|z|^2.$$

Знак вещественной части коэффициента $\alpha_2(\tau) = \alpha(2\tau) \pm \sqrt{\alpha^2(2\tau) - 1}$:

$$\mathrm{Re}[\alpha_2(\tau)] = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2 \mp 2\sqrt{k_1k_2}\cos(2\Omega_0\tau)}$$

будет определять характер асимптотики.

Теперь достаточным условием, при котором вещественная часть коэффициента $\alpha_2(\tau)$ положительна для всех моментов времени является то же условие $k_1 > k_2 > 0$, что и в предыдущем случае. Действительно, при $k_1 > k_2 > 0$, если обозначить $\gamma = \sqrt{|k_1/k_2|}$, то требуемое условие сведется к условию:

$$\gamma^2 + 1 > \pm 2\gamma,$$

что выполняется при всех значениях $\gamma > 0$. Два листа решения в данном случае имеют следующий вид:

$$\Psi_{\pm} = \exp\left[-\alpha(2\tau)\Omega_0|z|^2 \pm 2\Omega_0\sqrt{k_1k_2|z|^4 - k_0q(2\tau)\overline{z}^2}/q(2\tau)\right]\frac{\partial}{\partial z}W(\zeta^+,\zeta^-), \qquad (42)$$

где $W(\zeta^+,\zeta^-)$ - произвольная функция тех же интегралов движения (35).

В данном примере отдельные листы решения склеиваются в двух точках, положение которых определяется обращением в ноль дискриминанта уравнения (40):

$$Z_{\pm} = \pm\left(\frac{k_0r(\tau)}{\alpha_2(\tau)-1}\right)^{1/2}.$$

В этих точках функция v ограничена и непрерывно переходит с одного листа на другой. Однако производная по ζ в этой точке обращается в бесконечность. Поэтому, формально, наличие точек склейки листов не противоречит постулату непрерывности волновой функции квантовой теории.

7. Заключение

В работе построена схема вычисления решений двумерных параболических уравнений, зависящих от одного спектрального параметра, для специального класса потенциалов. Специально рассмотрены случай двумерного квантового осциллятора. Получены точные решения, обладающие свойством многозначности, которое можно интерпретировать как топологическое вырождение, связанное с множеством листов решений квазилинейных уравнений первого порядка для фазовых функций решения.

Работа выполнена при поддержке Министерства Образования и Науки РФ (в рамках Государственного задания и проекта № 14.Z50.31.0015) и грантов РФФИ № 16-42-732113 и № 16-42-732119, а так же за счет средств субсидии, выделенной в рамках государственной поддержки Казанского (Приволжского) федерального университета в целях повышения его конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров.

Литература

1. Арнольд В.И. Особенности каустик и волновых фронтов. М: Фазис, 1996 г.
2. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980.
3. Шубин М. А. Лекции об уравнениях математической физики. 2-е изд., испр. М.: МЦНМО, 2003. 303 с.
4. Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука. 1977.
5. Маслов В. П., Шведов О. Ю. Метод комплексного ростка в задаче многих частиц и квантовой теории поля. М.: УРСС. 2000.
6. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: "Наука", 1978.

MSC 35F20, 35J60 35L70 78A40

On many-valued solutions of two-dimensional linear parabolic equations

V.M. Zhuravlev [1], V.M. Morozov [2]

Ulyanovsk State University, Technological Research Institute of Ulyanovsk State University [1,2]

Abstract: The problem of calculating solutions of two-dimensional linear parabolic equations is considered. A complete procedure for the derivation of solutions is presented and the appearance of a specific degeneracy, called a topological one, is shown. It is shown that, in a two-dimensional coordinate space, among the parabolic equations with topological degeneracy, there is the Schrödinger equation for a nonstationary quantum harmonic oscillator, a homogeneous electric field, and an empty space. Examples of specific solutions are given.

Keywords: Exact solutions of linear two-dimensional parabolic equations, multivalued solutions, two-dimensional quantum oscillator.

References

1. Arnold V.I. Osobennosti kaustik i volnovykh frontov [Features of caustics and wave fronts]. M: Phasis, 1996.

2. Kravtsov Yu.A., Orlov Yu.I. Geometricheskaya optika neodnorodnykh sred [Geometrical optics of inhomogeneous media].Moscow, Publishing of the "Nauka", 1980.

3. Shubin M.A. Lektsii ob uravneniyakh matematicheskoy fiziki. [Lectures on the equations of mathematical physics]. 2 nd ed., Rev. Moscow: MTsNMO, 2003. 303 p.

4. Maslov V.P. Kompleksnyy metod VKB v nelineynykh uravneniyakh [Complex WKB method in nonlinear equations].Moscow, Publishing of the "Nauka", 1977.

5. Maslov O. Yu., Shvedov O. Yu. Metod kompleksnogo rosta v zadache mnogikh chastits i kvantovoy teorii polya [The complex germ method in the many-particle problem and quantum field theory], URSS, Moscow, 2000.

6. Rozhdestvensky B. L., Yanenko N. N. Cistemy kvazilineynykh uravneniy i ikh prilozheniy k gazovoy dinamike [Systems of quasilinear equations and their applications to gas dynamics]. Moscow, Publishing of the "Nauka", 1978.