УДК 62-50

Об управлении движением трехзвенного манипулятора*

А.С. Андреев[1], Д.С. Макаров[1]

Ульяновский государственный университет[1]

Аннотация: В статье представлен новый закон управления, для механических систем без измерения скоростей. Применение этого закона рассматривается на примере стабилизации положения механической системы, представляющей собой трехзвенный манипулятор на неподвижном основании. Представлены результаты численного моделирования, подтверждающие теоретический результат.

Ключевые слова: механическая система, программное движение, интегральный регулятор, стабилизация

1. Введение

Двухзвенные и трехзвенные манипуляторы являются распространенной подсистемой для робототехнических систем [1,2]. При этом установка на таких манипуляторах датчиков для измерения скоростей звеньев требует дополнительных затрат, а погрешности данных, получаемых с таких датчиков, вносят дополнительные ошибки при вычислении количественных характеристик управления. Таким образом, важной представляется задача о построении управления, реализующего приведение положения манипулятора в заданную программную позицию без измерения скоростей звеньев. Исследование этой задачи продолжает оставаться актуальным, так как имеющиеся её решения имеют достаточно сложную структуру, зависят от инерционных параметров системы, в управление закладывается сооответствующее компенсирующее действие инерционных и неуправляемых сил, часто требуют проведения больших объемов вычислений в реальном времени [3–7]. В настоящей статье дано новое решение задачи построения управления положением трехзвенного манипулятора, без измерения скоростей звеньев с использованием результатов работы [8]. Проведено компьютерное моделирование для подтверждения теоретических результатов.

2. Постановка задачи

Рассмотрим математическую модель трехзвенного манипулятора, состоящую из трех абсолютно жестких звеньев G_1, G_2, G_3, представляющих собой однородные стержни. Манипулятор установлен на неподвижном основании, на которое опирается звено G_1. Звено G_1 таким образом, может совершать только вращения вокруг вертикальной оси. Звенья соединены между собой двумя идеальными цилиндрическими шарнирами O_1, и O_2 таким образом, что звенья G_2 и G_3 могут совершать движения только в вертикальной плоскости. Центр масс C_1 звена G_1 лежит на луче O_1O_2. Положение центра масс C_2 звена G_2 не совпадает с положением шарнира O_2. На конце звена G_3 находится груз, перемещаемый манипулятором.

Введем обозначения: $q_i(i = 1, 2, 3)$ — углы поворотов звеньев манипулятора; $Q_i(i =$

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (Гранты № 15-01-08482 «Математические методы и вычислительные алгоритмы конструирования структур управления робототехническими и мехатронными системами», № 15-01-08599 «Разработка математических методов исследования динамики и устойчивости механических систем с распределенными параметрами при аэродинамическом и ударном воздействиях») и Минобрнауки России в рамках Государственного задания по НИР (9.5994.2017/БЧ)

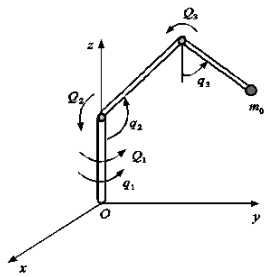

Рис. 1. Модель трехзвенного манипулятора

$1, 2, 3)$ — управляющие моменты относительно осей соответствующих звеньев; l_i — длина i-го звена; m_i — масса i-го звена; m_0 — масса перемещаемого груза; $m_{30} = m_0 + m_3$; J_{01} — момент инерции первого звена относительно оси вращения; r_2 и r_3 — соответственно расстояния от центров тяжести второго и третьего звеньев с перемещаемым грузом относительно осей соответствующих звеньев; g — ускорение свободного падения.

Учитывая действие сил тяжести, уравнения движения манипулятора можно записать в векторно-матричной форме

$$A(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + K(q) = Q, \tag{1}$$

где

$$A(q) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad C(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & c_{13} \\ c_{21} & 0 & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & 0 \end{pmatrix},$$

$$a_{11} = J_{01} + m_2 r_2^2 \sin^2 q_2 + m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3)^2, \quad a_{22} = m_2 r_2^2 + m_3 l_2^2,$$

$$a_{23} = \tfrac{1}{2} m_{30} l_2 r_3 \cos(q_2 - q_3), \quad a_{32} = a_{23}, \quad a_{33} = m_{30} r_3^2,$$

$$c_{11} = 2(m_2 r_2^2 \sin q_2 \cos q_2 + m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3) l_2 \cos q_2)\dot{q}_2,$$

$$c_{13} = 2m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3) r_3 \cos q_3 \dot{q}_3,$$

$$c_{21} = -(m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3) l_2 + m_2 r_2^2 \sin q_2) \cos q_2 \dot{q}_1,$$

$$c_{23} = \tfrac{1}{2} m_{30} l_2 r_3 \sin(q_2 - q_3)\dot{q}_3, \quad c_{31} = -m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3) r_3 \cos q_3 \dot{q}_1,$$

$$c_{32} = -\tfrac{1}{2} m_{30} l_2 r_3 \sin(q_2 - q_3)\dot{q}_2,$$

$$K'(q) = (0, \quad (m_2 r_2 + m_{30} l_2) g \sin q_2, \quad m_{30} g r_3 \sin q_3).$$

3. Построение управления

Рассмотрим задачу приведения манипулятора в заданное программное положение

$$q = q^0 = const, \quad \dot{q} = 0 \tag{2}$$

без измерения скоростей.

Положение (2) имеет место, если положить

$$\begin{aligned} &Q_1^{(0)} = 0, \quad Q_2^{(0)} = (m_2 r_2 + m_{30} l_2) g \sin q_2^0 \cos x_2, \\ &Q_3^{(0)} = m_{30} g r_3 \sin q_3^0 \cos x_3. \end{aligned} \tag{3}$$

Рассматриваемая задача состоит в нахождении управляющего воздействия

$$Q^{(2)} = Q - Q^{(0)},$$

обеспечивающего глобальную стабилизацию положения (2) при измерении только координат q_1, q_2, q_3.

Покажем, что поставленная задача решается управляющим воздействием вида

$$\begin{aligned} &Q_1^{(2)}(x_1) = -k_1 \sin\frac{x_1(t)}{2} - \cos\frac{q_1(t)}{2}\int_{t-h}^{t} p_1^0 e^{s_1^0(\tau-t)}\left(\sin\frac{q_1(t)}{2} - \sin\frac{q_1(\tau)}{2}\right)d\tau, \\ &Q_2^{(2)}(x_2) = -k_2 \sin\frac{x_2(t)}{2} - \cos\frac{q_2(t)}{2}\int_{t-h}^{t} p_2^0 e^{s_2^0(\tau-t)}\left(\sin\frac{q_2(t)}{2} - \sin\frac{q_2(\tau)}{2}\right)d\tau, \\ &Q_3^{(2)}(x_3) = -k_3 \sin\frac{x_3(t)}{2} - \cos\frac{q_3(t)}{2}\int_{t-h}^{t} p_3^0 e^{s_3^0(\tau-t)}\left(\sin\frac{q_3(t)}{2} - \sin\frac{q_3(\tau)}{2}\right)d\tau, \\ &x_1 = q_1 - q_{10}, \quad x_2 = q_2 - q_{20}, \quad x_3 = q_3 - q_{30} \end{aligned} \tag{4}$$

где коэффициенты $h > 0, p_j^0 > 0, s_j^0 > 0$, а k_j удовлетворяет неравенствам

$$k_1 > 0, \quad k_2 > -2(m_2 r_2 + m_{30} l_2) g \sin q_2^0, \quad k_3 > -2 m_{30} g r_3 \sin q_3^0.$$

Выберем функционал Ляпунова в виде

$$\begin{aligned} &V(\dot{x}(t), x_t) = \frac{1}{2}(\dot{q}(t))' A^{(1)}(q(t))\dot{q}(t) + \\ &+(m_2 r_2 + m_{30} l_2) g \sin q_2^0 (1 - \cos x_2) + m_{30} g r_3 (1 - \cos x_3) + \\ &+2k_1\left(1 - \cos\frac{x_1(t)}{2}\right) + 2k_2\left(1 - \cos\frac{x_2(t)}{2}\right) + 2k_3\left(1 - \cos\frac{x_3(t)}{2}\right) + \\ &+2\int_{t-h}^{t} p_1^0 e^{s_1^0(\tau-t)}\left(\sin\frac{q_1(t)}{2} - \sin\frac{q_1(\tau)}{2}\right)^2 d\tau + \\ &+2\int_{t-h}^{t} p_2^0 e^{s_2^0(\tau-t)}\left(\sin\frac{q_2(t)}{2} - \sin\frac{q_2(\tau)}{2}\right)^2 d\tau + \\ &+2\int_{t-h}^{t} p_3^0 e^{s_3^0(\tau-t)}\left(\sin\frac{q_3(t)}{2} - \sin\frac{q_3(\tau)}{2}\right)^2 d\tau. \end{aligned}$$

Несложно видеть, что для этого функционала имеет место оценка

$$a_1(||\dot{q}(t)||) + a_2(||q(t) - q_0||) \le V \le a_3(|||\dot{q}_t||| + |||(q + q_0)_t|||),$$

где $|||q_t||| = \sup(q(t+\tau), -h \le \tau \le 0)$.

Для полной производной этого функционала в силу уравнений (1) с учетом (3) - (4) находим

$$\begin{aligned} &\dot{V} = -2\int_{t-h}^{t} p_1^0 s_1^0 e^{s_1^0(\tau-t)}\left(\sin\frac{q_1(t)}{2} - \sin\frac{q_1(\tau)}{2}\right)^2 d\tau + \\ &+\int_{t-h}^{t} p_2^0 s_2^0 e^{s_2^0(\tau-t)}\left(\sin\frac{q_2(t)}{2} - \sin\frac{q_2(\tau)}{2}\right)^2 d\tau + \\ &+\int_{t-h}^{t} p_3^0 s_3^0 e^{s_3^0(\tau-t)}\left(\sin\frac{q_3(t)}{2} - \sin\frac{q_3(\tau)}{2}\right)^2 d\tau. \end{aligned}$$

Множество $\{\dot{V} = 0\}$ состоит из движений $q(\tau) = q(t)$, $t - h \le \tau \le t$, или $q(t) = const$. Из уравнений движения находим, что для таких движений должны удовлетворяться соотношения

$$\sin\frac{x_1(t)}{2} \equiv 0, \quad \sin\frac{x_2(t)}{2} \equiv 0, \quad \sin\frac{x_3(t)}{2} \equiv 0.$$

Согласно теореме из [9] равномерную асимптотическую устойчивость программного положения (2).

В соответствии с теоремой о предельном поведении решений [10] каждое возмущенное движение системы будет при $t \to +\infty$ неограниченно приближается к положению

$$\dot{q}_k(t) = 0, \quad \sin\frac{q_k(t) - q_{k0}}{2} \equiv 0,$$

или

$$\dot{q}_k(t) \equiv 0, \quad q_k(t) = 2\pi k + q_{k0}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Тем самым, можно утверждать о глобальной стабилизации заданного программного положения (2).

Координата q_1, определяющая вращение манипулятора вокруг вертикальной оси является циклической.

Введем соответствующий циклический импульс

$$(J_0 + m_2 r_2^2 \sin^2 q_2 + m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3)^2)\dot{q}_1 = v_1$$

и функцию Рауса

$$R = T - \dot{q}_1 v_1 = \frac{1}{2}(m_2 r_2^2 + m_3 l_2^2)\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} m_{30} l_2 r_3 \cos(q_2 - q_1)\dot{q}_2\dot{q}_3 + \frac{1}{2} m_{30} r_3^2 \dot{q}_3^2 -$$
$$-\frac{1}{2}\frac{v_1^2}{J_0 + m_2 r_2^2 \sin^2 q_2 + m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3)^2} \equiv R_2 + R_0.$$

Уравнение движения системы в форме Рауса может быть записано в виде

$$\begin{aligned}
&(m_2 r_2^2 + m_3 l_3^2)\ddot{q}_2 + \frac{1}{2} m_{30} l_2 r_3 \cos(q_2 - q_1)\ddot{q}_3 + \frac{1}{2} m_{30} l_2 r_3 \sin(q_2 - q_1)\dot{q}_3^2 - \\
&-\frac{v_1^2(m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3) l_2 + m_2 r_2^2 \sin q_2)\cos q_2}{(J_0 + m_2 r_2^2 \sin^2 q_2 + m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3)^2)^2} + (m_2 r_2 + m_{30} l_2) g \sin q_2 = Q_2, \\
&\frac{1}{2} m_{30} l_2 r_3 \cos(q_2 - q_1)\ddot{q}_2 + m_{30} r_2^2 \ddot{q}_3 - \frac{1}{2} m_{30} l_2 r_3 \sin(q_2 - q_3)\dot{q}_2^2 - \\
&-\frac{v_1^2 m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3) r_3 \cos q_3}{(J_0 + m_2 r_2^2 \sin^2 q_2 + m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3)^2)^2} + m_{30} g r_3 \sin q_3 = Q_3, \\
&\frac{dq_1}{dt} = \frac{v_1}{J_0 + m_2 r_2^2 \sin^2 q_2 + m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3)^2}, \\
&\frac{dv_1}{dt} = Q_1.
\end{aligned}$$

Система может совершать стационарное вращательное движение вида

$$\dot{q}_2 = 0, \quad q_2 = q_2^0 = const, \quad \dot{q}_3 = 0, \quad q_3 = q_3^0 = const,$$
$$v_1 = v_1^0 = const, \quad \dot{q}_1 = \dot{q}_1^0 = \frac{v_1^0}{(J_0 + m_2 r_2^2 \sin^2 q_2^0 + m_{30}(l_2 \sin q_2^0 + r_3 \sin q_3^0)^2)}$$

под действием моментов

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = Q_2^0 = \frac{1}{2} m_{30} l_2 r_3 \sin(q_2^0 - q_1^0)(\dot{q}_3^0)^2 -$$
$$- \frac{v_1^2 (m_{30}(l_2 \sin q_2^0 + r_3 \sin q_3^0) l_2 + m_2 r_2^2 \sin q_2^0) \cos q_2^0}{(J_0 + m_2 r_2^2 \sin^2 q_2^0 + m_{30}(l_2 \sin q_2^0 + r_3 \sin q_3^0)^2)^2} + (m_2 r_2 + m_{30} l_2) g \sin q_2^0,$$
$$Q_3 = Q_3^0 = -\frac{1}{2} m_{30} l_2 r_3 \sin(q_2^0 - q_3^0)(\dot{q}_2^0)^2 -$$
$$- \frac{v_1^2 m_{30}(l_2 \sin q_2^0 + r_3 \sin q_3^0) r_3 \cos q_3^0}{(J_0 + m_2 r_2^2 \sin^2 q_2^0 + m_{30}(l_2 \sin q_2^0 + r_3 \sin q_3^0)^2)^2} + m_{30} g r_3 \sin q_3^0.$$

Аналогично предыдущим выкладкам можно найти, что это стационарное движение будет устойчиво, асимптотически устойчиво по $\dot{q}_2, \dot{q}_3, q_2 - q_2^0, q_3 - q_3^0$ под действием стабилизирующих моментов

$$Q_1 = 0, \quad Q_2^1 = Q_2 - Q_2^0 = -k_2^0 x_2(t) - \int_{t-h}^{t} p_2^0 e^{s_2^0(\tau - t)} (x_2(t) - x_2(\tau)) d\tau,$$
$$Q_3^1 = Q_3 - Q_3^0 = -k_3^0 x_3(t) - \int_{t-h}^{t} p_3^0 e^{s_3^0(\tau - t)} (x_3(t) - x_3(\tau)) d\tau,$$

где постоянные $p_2^0, p_3^0, s_2, s_3^0 > 0$, а k_2^0 и k_3^0 удовлетворяют неравенствам

$$k_2 + (m_2 r_2 + m_{30} l_2) g \cos q_2^0 - \left. \frac{\partial^2 R_0}{\partial q_2^2} \right|_{q_2 = q_2^0} = \mu_2 > 0,$$
$$k_3 + m_{30} g r_2 \cos q_3^0 - \left. \frac{\partial^2 R_0}{\partial q_3^2} \right|_{q_2 = q_2^0,\, q_3 = q_3^0} = \mu_3 > 0,$$
$$\mu_2 \mu_3 - \left(\left. \frac{\partial^2 R_0}{\partial q_2 \partial q_3} \right|_{q_2 = q_2^0,\, q_3 = q_3^0} \right)^2 > 0.$$

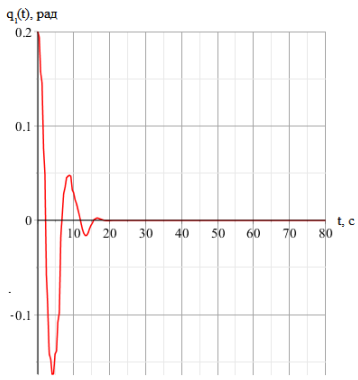

Рис. 2. Зависимость угла поворота первого звена от времени при управлении (4)

На рисунках 2–4 представлены результаты численного моделирования в задаче о стабилизации положения $q_{10} = 0$ рад, $q_{20} = 0$ рад, $q_{30} = 2\pi$ рад при следующих значениях параметров манипулятора

$$m_2 = 15 \text{ кг}, \quad m_3 = 2,5 \text{ кг}, \quad m_0 = 2 \text{ кг}, \quad l_2 = 1 \text{ м}, \quad r_2 = 0,5 \text{ м}, \quad r_3 = 0,5 \text{ м},$$
$$J_{01} = 0,1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

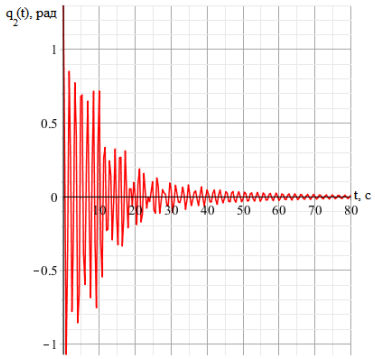

Рис. 3. Зависимость угла поворота второго звена от времени при управлении (4)

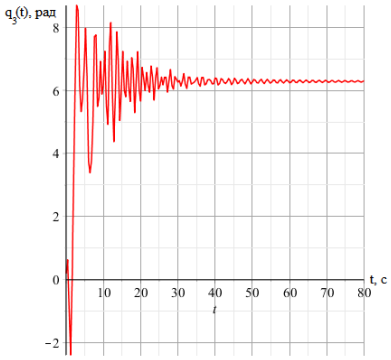

Рис. 4. Зависимость угла поворота третьего звена от времени при управлении (4)

Заключение

Полученные в работе результаты позволяют теоретически обосновать процесс управления движением трехзвенного пространственного манипулятора с измерением только угловых координат его звеньев (без измерения угловых скоростей).

Литература

1. Spong M., Hutchinson S., Vidyasagar M. Robot Dynamics and Control. New York: Wiley, 2004.

2. Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. М. : Физматлит, 2006. 328 с.

3. Calugi F., Robertsson A. and Johansson R. Output feedback adaptive control of robot manipulators using observer backstepping // Proceedings of the 2002 IEEE/RSJ Int. Conference of Intelligent Robots and Systems. Lausanne, Switzerland. 2002. P. 2091-2096.

4. Alonge F., D'Ippolito F., Raimondi F.M. An adaptive control law for robotic manipulator without velocity feedback // Control Engineering Practice. 2003. 11. P. 999-1005.

5. Dixon W.E., Zergeroglu E. and Dawson D.M. Global robust output feedback tracking control of robot manipulators // Robotica. 2004. Vol. 22. P. 352-357.

6. Eduardo V. L. Nunes, Liu Hsu and Fernando Lizarralde. Arbitrarily small damping allows global output feedback tracking of a class of Euler-Lagrange systems // American Control Conference Westin Seattle Hotel, Seattle, Washington, USA, June 11-13, 2008. P. 377-382.

7. Бурков И.В. Стабилизация натуральной механической системы без измерения ее скоростей с приложением к управлению твердым телом // Прикладная математика и механика. 1998. Т. 62, Вып. 6. С. 923-933.

8. Андреев А.С., Макаров Д.С., Перегудова О.А. Об управлении манипуляторами без измерения скоростей // Научно-технический вестник Поволжья. 2016. № 6. С.105-108.

9. Андреев А.С. Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений: монография. Ульяновск: Изд-во Ул-ГУ, 2005. 328 с.

10. Андреев А.С. Метод функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Автоматика и телемеханика. 2009. № 9. С. 4–55.

MSC 93D15

On the control problem for three-link manipulator

A.S. Andreev, D.S. Makarov

Ulyanovsk State University

Abstract: The new controller without velocities measurement for mechanical systems is presented in this article. Application of this controller is considered on the example of position stabilization of mechanical system such as three-link manipulator. The results of computer modeling are presented.

Keywords: mechanical system, program motion, integral regulator, stabilization

References

1. Spong M., Hutchinson S., Vidyasagar M. Robot Dynamics and Control. New York: Wiley, 2004.

2. Chernousko F.L., Ananevsky I.M., Reshmin S.A. Metody upravleniya nelineynymi mekhanicheskimi sistemami [Methods of control of Nonlinear Dynamical Systems], Moscow. Publishing of "Fizmat 2006. 328 p.

3. Calugi F., Robertsson A. and Johansson R. Output feedback adaptive control of robot manipulators using observer backstepping // Proceedings of the 2002 IEEE/RSJ Int. Conference of Intelligent Robots and Systems. Lausanne, Switzerland. 2002. p. 2091 – 2096.

4. Alonge F., D'Ippolito F., Raimondi F.M. An adaptive control law for robotic manipulator without velocity feedback // Control Engineering Practice. 2003. 11. p. 999 – 1005.

5. Dixon W.E., Zergeroglu E. and Dawson D.M. Global robust output feedback tracking control of robot manipulators // Robotica. 2004. Vol. 22. p. 352 – 357.

6. Eduardo V. L. Nunes, Liu Hsu and Fernando Lizarralde. Arbitrarily small damping allows global output feedback tracking of a class of Euler-Lagrange systems // American Control Conference Westin Seattle Hotel, Seattle, Washington, USA, June 11-13, 2008. p. 377 – 382.

7. Burkov I.V. Stabilization of natural mechanical system without velocities measurement with application to the control of rigid body // Applied mathematics and mechanics. 1998. Vol. 62. No. 6. p. 923 – 933.

8. Andreev A.S., Makarov D.S., Peregudova O.A. Ob upravlenii manipulyatorami bez izmereniya skorostey [On Control of the Manipulators without Velocities Measurement] // Nauchno-tekhnicheskiy vestnik Povolzh'ya [Scientific and Technical Volga Region Bulletin]. 2016. No. 6. p. 105 – 108.

9. Andreev A.S. Ustoychivost' neavtonomnykh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy: monografiya [Stability of nonautonomous functional-differential equations: monograph], Ulyanovsk: Ulyanovsk State University, 2005. 328 p.

10. Andreev A.S. The Lyapunov functionals method in stability problems for functional differential equations // Automation and Remote Control. 2009. Vol. 70. No. 9. p. 1438 – 1497.