XIII Международная научная конференция "Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании", Саранск, 12-16 июля 2017.
XIII International scientific conference "Differential equations and their applications in mathematical modeling", Saransk, July 12-16, 2017.

УДК 519.6

Об устойчивости нелинейных нестационарных дискретных систем типа Вольтерра*

А.С. Андреев[1], Е.А. Кудашова[1]

Ульяновский государственный университет[1]

Аннотация: Предлагается новая методика исследования устойчивости нелинейных нестационарных дискретных систем, основанная на развитии прямого метода Ляпунова и построении уравнений сравнения. В статье демонстрируется эффективность данной методики на примере нестационарной нелинейной дискретной математической модели взаимодействия трёх популяций. Поиск области глобальной равномерной асимптотической устойчивости решений системы реализован с помощью математического пакета Maple. В работе представлены результаты численного моделирования.

Ключевые слова: устойчивость нелинейных систем, прямой метод Ляпунова, система сравнения, нелинейное уравнение Вольтерра, дискретные системы

1. Введение

Отсутствие универсальных способов нахождения функций Ляпунова для решения задач об устойчивости и стабилизации стимулирует интенсивные исследования по нахождению эффективных алгоритмов их построения для определенных классов систем. Распространенной моделью ряда нелинейных систем и процессов являются уравнения, предложенные к рассмотрению в работах В. Вольтерра [1]. Соответствующими разностными уравнениями могут быть описаны модели в медицине, экономике и других естественных, а также, технических науках [2,4–8]. В данной статье проводится исследование устойчивости нестационарной эпидемической системы третьего порядка на основе теорем о локализации положительного предельного множества, об исследовании устойчивости с использованием знакопостоянных функций Ляпунова.

2. Постановка задачи

Рассмотрим дискретную динамическую модель третьего порядка, описывающую течение болезни в некоторой биологической системе. Даны три различные популяции, где инфицированные члены первой и второй популяций могут заражать друг друга, а инфицированные члены третьей популяции могут заражать членов всех трех популяций. Будем предполагать, что выздоровление возможно, но иммунитет отсутствует и популяции постоянны. Пусть x_i– инфицированная часть популяции $P_i, i = 1, 2, 3$. Тогда $(1 - x_i)$– здоровая часть, которая воспринимает инфекцию.

При сделанных предположениях нелинейная дискретная модель течения болезни с уче-

*Выполненная научно-исследовательская работа была поддержена РФФИ (Грант № 15-01-08482 «Математические методы и вычислительные алгоритмы конструирования структур управления робототехническими и мехатронными системами»)

том нестационарности имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x_1(n+1) = (a_{12}(n)x_2(n) + a_{13}(n)x_3(n))(1 - x_1(n)) + a_{11}(n)x_1(n), \\ x_2(n+1) = (a_{21}(n)x_1(n) + a_{23}(n)x_3(n))(1 - x_2(n)) + a_{22}(n)x_2(n), \\ x_3(n+1) = (a_{34}(n)x_3(n) + a_{31}(n)x_1(n) + a_{32}(n)x_2(n))(1 - x_3(n)) + \\ \qquad +a_{33}(n)x_3(n), \end{cases} \tag{1}$$

где $\varepsilon \leq a_{ij} \leq 1 - \varepsilon, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, 4$. Введем также дополнительные условия, обеспечивающие корректность поставленной задачи, а именно $x_i(n) \in \Gamma = \{x : 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, 3\}, \forall n \geq n_0, x(n_0) \in \Gamma$

$$\begin{cases} a_{12}(n) + a_{13}(n) \leq 1, \\ a_{21}(n) + a_{23}(n) \leq 1, \\ a_{31}(n) + a_{32}(n) + a_{34}(n) \leq 1, \end{cases} \tag{2}$$

3. Построение систем сравнения и функцй Ляпунова

Уравнения, предельные к (1), имеют аналогичный вид:

$$\begin{cases} x_1(n+1) = (a^*_{12}(n)x_2(n) + a^*_{13}(n)x_3(n))(1 - x_1(n)) + a^*_{11}(n)x_1(n), \\ x_2(n+1) = (a^*_{21}(n)x_1(n) + a^*_{23}(n)x_3(n))(1 - x_2(n)) + a^*_{22}(n)x_2(n), \\ x_3(n+1) = (a^*_{34}(n)x_3(n) + a^*_{31}(n)x_1(n) + a^*_{32}(n)x_2(n))(1 - x_3(n)) + \\ \qquad +a^*_{33}(n)x_3(n), \end{cases} \tag{3}$$

где функции $a^*_{ij}(n)$являются предельными для a_{ij} соответственно для некоторой последовательности $n_k \to +\infty$

$$a^*_{ij}(n) = \lim_{n_k \to +\infty} a_{ij}(n + n_k)$$

Введем вектор-функцию $V = (V_1 = x_1, V_2 = x_2, V_3 = x_3)$. Уравнения для V_1 и V_2 совпадают с (1) и (3), а система сравнения имеет вид

$$w(n+1) = A(n)w(n) - Q,$$

где в принятых обозначениях

$$A(n) = \|a_{jk}(n)\|$$

$$Q_1 = (a_{12}(n)x_2(n) + a_{13}(n)x_3(n))x_1(n)$$

$$Q_2 = (a_{21}(n)x_1(n) + a_{23}(n)x_3(n))x_2(n)$$

$$Q_3 = (a_{31}(n)x_1(n) + a_{32}(n)x_2(n) + a_{34}(n)x_3(n))x_3(n)$$

Функции Q^*, предельные к Q, являются аналогичными. Решение $w_1 = w_2 = w_3 = 0$ системы $w(n+1) = A(n)w(n)$ равномерно устойчиво, если выполнено условие

$$\left\| \prod_{j=k_0}^{k} A(j) \right\| \leq M = const, \forall\, k_0 \in Z^+, k \geq k_0 \tag{4}$$

Согласно теореме 2.1 из [3], решение $w_1 = w_2 = w_3 = 0$ будет локально равномерно асимптотически устойчиво, если для $\mu_1(n)$ имеет место соотношение

$$\prod_{j=k_0}^{k_0+k} \mu_1(j) \le \varepsilon, \forall\, k \ge k_0 + N = N(\varepsilon) > 0, k_0 \in Z^+ \tag{5}$$

Множество $Q^* = 0$ не содержит решений (3), кроме $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Следовательно, условие (4)- достаточно для глобальной равномерной асимптотической устойчивости положения $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ системы (1).

Введем функцию Ляпунова $V = V(x_1, x_2, x_3) = fx_1 + gx_2 + hx_3$, где $f > 0, g > 0, h > 0$. Тогда условия

$$\begin{cases} fa_{11}(n) + ga_{21}(n) + ha_{31}(n) \le f\mu(n), \\ fa_{12}(n) + ga_{22}(n) + ha_{32}(n) \le g\mu(n), \\ fa_{13}(n) + ga_{23}(n) + ha_{33}(n) + ha_{34}(n) \le h\mu(n), \end{cases} \tag{6}$$

$$\prod_{j=n_0}^{n} \mu(j) \le m_0 = const, \forall\, n > n_0, n_0 \in Z^+ \tag{7}$$

где функция $\mu(n)$ удовлетворяет соотношению (7), являются достаточными для равномерной устойчивости состояния $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

При этом, единственным квазиинвариантным относительно (3) подмножеством множества $\{Q_1^* = 0, Q_3^* = 0, Q_3^* = 0\}$ оказывается точка $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Поэтому существование постоянных f, g, h и функции $\mu(n)$, удовлетворяющих условиям (6) и (7), достаточно для глобальной равномерной асимптотической устойчивости состояния $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ системы (1).

4. Детальный анализ условий устойчивости нулевого решения

Проанализируем систему неравенств (6), обеспечивающую знакопостоянство функции Ляпунова, введя параметры $u = \dfrac{f}{g} > 0$ и $v = \dfrac{h}{g} > 0$. Система неравенств (6) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \mu(n) > a_{11}(n), \\ \mu(n) > a_{22}(n), \\ \mu(n) > a_{33}(n) + a_{34}(n), \\ v \le \dfrac{\mu(n) - a_{11}(n)}{a_{31}(n)} u - \dfrac{a_{21}(n)}{a_{31}(n)}, \\ v \le \dfrac{\mu(n) - a_{22}(n)}{a_{32}(n)} - \dfrac{a_{12}(n)}{a_{32}(n)} u, \\ v \le -\dfrac{a_{13}(n)}{a_{33}(n) + a_{34}(n) - \mu(n)} u - \dfrac{a_{23}(n)}{a_{33}(n) + a_{34}(n) - \mu(n)}, \end{cases} \tag{8}$$

Укажем явно точки пересечения полуплоскостей.

1. Минимальное интересующее нас значение u на полуплоскости, заданной четвертым соотношением из системы (8), может быть найдено из равенства

$$\frac{\mu(n) - a_{11}(n)}{a_{31}(n)} u = \frac{a_{21}(n)}{a_{31}(n)},$$

2. Полуплоскости, заданные четвертым и шестым соотношениями из системы (8), имеют точку пересечения их границ при

$$u_1^*(n) = \frac{a_{23}a_{31} + a_{21}(\mu - a_{34} - a_{33})}{(\mu - a_{34} - a_{33})(\mu - a_{11}) - a_{13}a_{31}}$$

если выполнено условие

$$(\mu - a_{11})(\mu - a_{34} - a_{33}) > a_{13}a_{31} \tag{9}$$

3. Полуплоскости, заданные пятым и шестым соотношениями из системы (8), имеют точку пересечения их границ

$$u_2^*(n) = \frac{\mu^2 - (a_{34} + a_{33} + a_{22})\mu + a_{22}a_{34} - a_{23}a_{32} + a_{22}a_{33}}{a_{13}a_{32} + a_{12}(\mu - a_{34} - a_{32})} \tag{10}$$

4. Максимальное интересующее нас значение u на полуплоскости, заданной пятым соотношением из системы (8), может быть найдено из равенства

$$\frac{\mu(n) - a_{22}(n)}{a_{32}(n)} = \frac{a_{12}(n)}{a_{32}(n)}u,$$

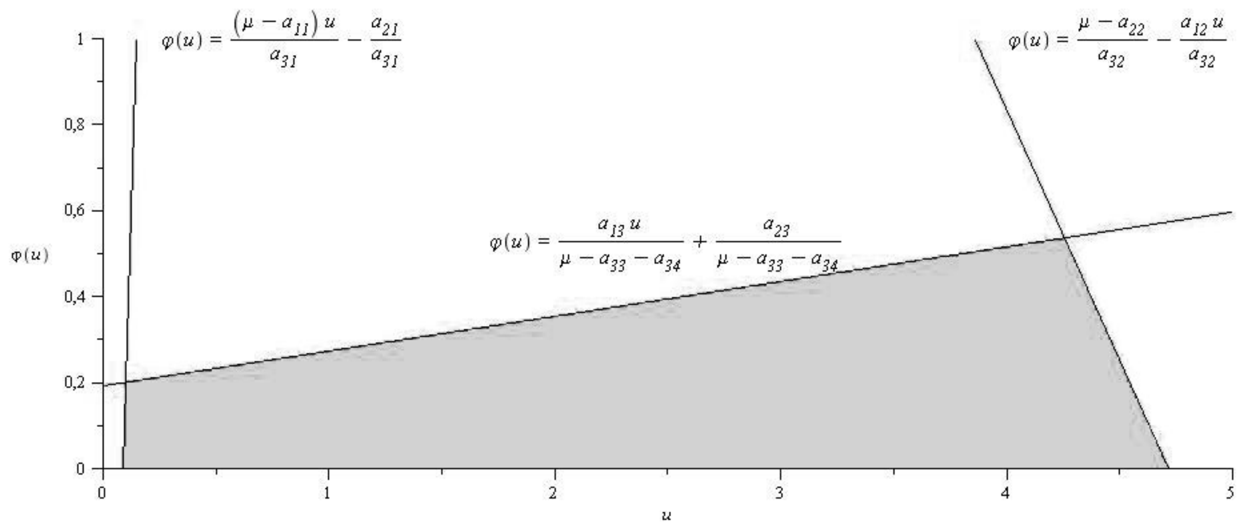

Рис. 1. Область глобальной равномерной ас. устойчивости нулевого решения системы (1) с условиями (8) при некоторых a_{ij}

Интервал определения области будет содержать точку (α^*, β^*), $\alpha^* > 0, \beta^* > 0$, независимую от n при условиях

$$0 < \gamma^* \leq \frac{a_{21}(n)}{\mu(n) - a_{11}(n)} \leq \alpha^* \leq \frac{\mu(n) - a_{22}(n)}{a_{12}(n)}$$
$$\frac{(\mu(n) - a_{11}(n))\alpha^*}{a_{31}(n)} - \frac{a_{21}(n)}{a_{31}(n)} \geq \beta^*$$
$$\frac{a_{13}(n)\alpha^* + a_{23}(n)}{\mu(n) - a_{33}(n) - a_{34}(n)} \geq \beta^*$$
$$\frac{\mu(n) - a_{22}(n) - a_{12}(n)\alpha^*}{a_{32}(n)} \geq \beta^*$$

выполняемых для всех $n \in Z^+$.

Таким образом, для функции $\mu(n)$, кроме (5) имеем следующую совокупность оценок

$$\begin{aligned}
&\mu(n) \geq a_{22}(n) + \alpha^* a_{12}(n)\\
&\mu(n) \geq a_{11}(n) + \frac{1}{\alpha^*} a_{21}(n)\\
&\mu(n) \geq a_{11}(n) + \frac{1}{\alpha^*}(a_{21}(n) + \beta^* a_{31}(n))\\
&\mu(n) \geq a_{22}(n) + a_{12}(n)\alpha^* + \beta^* a_{32}(n)\\
&\mu(n) \leq a_{11}(n) + \frac{\gamma^*}{a_{21}(n)}\\
&\mu(n) \leq a_{33}(n) + a_{34}(n) + \frac{1}{\beta^*}(a_{13}(n)\alpha^* + a_{23}(n))
\end{aligned}$$

Совместимость этих оценок выражается следующим образом:

Пусть существуют постоянные значения $\alpha^* > 0, \beta^* > 0, \gamma^* > 0$ такие, что для функции $\mu = \mu^*(n)$, определяемой равенство

$$\mu^*(n) = \max\left\{a_{11}(n) + \frac{1}{\alpha^*}(a_{21}(n) + \beta^* a_{31}(n)), a_{22}(n) + a_{12}(n)\alpha^* + \beta^* a_{32}(n)\right\}$$

одновременно с условием 7 выполняется соотношение

$$\mu^*(n) \leq \min\left\{a_{11}(n) + \frac{\gamma^*}{a_{21}(n)}, a_{33}(n) + a_{34}(n) + \frac{1}{\beta^*}(a_{13}(n)\alpha^* + a_{23}(n))\right\}$$

Тогда состояние $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ рассматриваемой системы (1) глобально равномерно асимптотически устойчиво.

5. Заключение

В работе представлена новая эффективная методика исследования устойчивости нелинейных нестационарных дискретных систем, основа которой состоит в ослаблении условий, достаточных для определения предельных свойств решений таких систем.

Литература

1. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976. 286 с.

2. Богданов А. Ю. Дискретные динамические системы: проблемы устойчивости и управления. Ульяновск: УлГТУ, 2008. 262 с.

3. Кудашова Е. А., Перегудова О. А. Метод векторных функций Ляпунова в задаче об асимптотической устойчивости разностных систем. Научно-технический вестник Поволжья. № 1. 2015. Казань: Научно-технический вестник Поволжья, 2015. С.118-121

4. Родионов, А. М. Притяжение для дискретных уравнений, приложение к динамике популяций // Автоматика и телемеханика. 2000. № 2. С. 76-85.

5. Родионов, А. М. О некоторых дискретных моделях межвидового взаимодействия Автоматика и телемеханика. 2000. № 12. С. 122-129.

6. Rondoni L. Autocatalytic reactions as dynamical systems on the interval // J. Math. Phys. 1993. Vol. 34. no. 11. Pp. 5238-5251.

7. Sedaghat H. A class of nonlinear second order difference equations from macroeconomics // Nonlinear Anal. Theory, Methods, Appl. 1997. Vol. 29. no. 5. Pp. 593-603.

8. Simonovits A. Chaotic dynamics of economic systems // Szigma. 1985. Vol. 18. Pp. 267–277.

MSC 65M60

On Stability of Nonlinear Nonstationary Discrete Volterra Type Systems

A.S. Andreev[1], E.A. Kudashova[1]

Ulyanovsk State University1

Abstract: A new technique for investigating the stability of nonlinear nonstationary discrete systems, based on the modified direct Lyapunov method and the construction of comparison equations is proposed. The article demonstrates the effectiveness of this technique on the example of non-stationary nonlinear discrete mathematical 3D population model. The search for the global uniform asymptotic stability domain of the system solutions is realized using the Maple mathematical package. The results of numerical simulation are presented.

Keywords: Stability of nonlinear systems, direct Lyapunov method, comparison system, Volterra nonlinear equation, discrete systems

References

1. Volterra V. Matematicheskaya teoriya borby za sushchestvovaniye M.: Nauka, 1976. 286 p. (In Russian)

2. Bogdanov A. YU. Diskretnyye dinamicheskiye sistemy: problemy ustoychivosti i upravleniya // Ulyanovsk: ULSTU, 2008. 262 p. (In Russian)

3. Kudashova E. A., Peregudova O. A. Metod vektornykh funktsiy Lyapunova v zadache ob asimptoticheskoy ustoychivosti raznostnykh sistem // Nauchno-tekhnicheskiy vestnik Povolzhya V.1 2015. Kazan: Nauchno-tekhnicheskiy vestnik Povolzhya, 2015. p. 118-121. (In Russian)

4. Rodionov, A.M. Prityazheniye dlya diskretnykh uravneniy, prilozheniye k dinamike populyatsiy // Avtomatika i telemekhanika. 2000. V. 2. P. 76-85. (In Russian)

5. Rodionov, A.M. O nekotorykh diskretnykh modelyakh mezhvidovogo vzaimodeystviya // Avtomatika i telemekhanika. 2000. V. 12. P. 122-129. (In Russian)

6. Rondoni L. Autocatalytic reactions as dynamical systems on the interval // J. Math. Phys. 1993. Vol. 34. no. 11.- Pp. 5238-5251.

7. Sedaghat H. A class of nonlinear second order difference equations from macroeconomics // Nonlinear Anal. Theory, Methods, Appl.- 1997. Vol. 29. no. 5. Pp. 593-603.

8. Simonovits A. Chaotic dynamics of economic systems // Szigma. 1985. Vol. 18. Pp. 267–277.