УДК 517.97

Решение нелокальной граничной задачи для уравнения Лапласа

Ю.Ф. Нургалиева [1], Ю.К. Сабитова [1]

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета [1]

Аннотация: Построено решение граничной задачи с нелокальным условием для уравнения Лапласа в прямоугольной области. Доказывается теорема решения задачи при помощи метода спектрального анализа. Решение задачи представлено в виде суммы биортогонального ряда.

Ключевые слова: нелокальное условие, уравнение Лапласа, граничная задача, спектральный анализ.

Рассмотрим уравнение Лапласа

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{1}$$

в прямоугольной области $Q = \{(x,y) \mid 0 < x < 1,\ 0 < y < T\}$ и для нее поставим следующую задачу.

Задача. Найти в области Q функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x,y) \in C(\bar{Q}) \cup C^2(Q), \tag{2}$$

$$u(0,y) = u(1,y), \qquad u_x(0,y) = 0, \tag{3}$$

$$u(x,0) = \tau(x), \qquad u(x,T) = \varphi(x). \tag{4}$$

где $\tau(x)$, $\varphi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, причем $\tau(0) = \tau(1)$, $\tau'(0) = 0$, $\varphi(0) = \varphi(1)$, $\varphi'(0) = 0$.

Опираясь на работы [1]-[3], докажем теоремы единственности и существования решения нелокальной задачи.

Теорема. Если существует решение задачи (2) – (4), то оно единственно.

Доказательство. Пусть $\mathrm{u(x,y)}$ – решение задачи (2) – (4). Воспользуемся системами функций [3]:

$$\{\cos(2\pi nx)\}_{n=1}^{\infty}, \qquad 1, \qquad \{x\sin(2\pi nx)\}_{n=1}^{\infty}, \tag{5}$$

$$\{4(1-x)\cos(2\pi nx)\}_{n=1}^{\infty}, \qquad 2(1-x), \qquad \{4\sin(2\pi nx)\}_{n=1}^{\infty}, \tag{6}$$

и рассмотрим функции

$$u_n(y) = 4\int_0^1 u(x,y)(1-x)\cos(2\pi nx)\,dx, \qquad n = 1,2,\dots, \tag{7}$$

$$u_0(y) = 2\int_0^1 u(x,y)(1-x)dx, \tag{8}$$

$$v_n(y) = 4\int_0^1 u(x,y)\sin(2\pi nx)\,dx\,, \qquad n = 1, 2, \dots . \tag{9}$$

Продифференцируем дважды (9) по переменной y под знаком интеграла, учитывая уравнение (1), получим

$$v_n''(y) = -4\int_0^1 u_{xx}(x,y)\sin(2\pi nx)\,dx. \tag{10}$$

Проинтегрируем по частям 2 раза полученный интеграл

$$v_n''(y) = (2\pi n)^2 \cdot 4\int_0^1 u(x,y)\sin(2\pi nx)\,dx \;\Rightarrow\; v_n''(y) = (2\pi n)^2 \cdot v_n(y).$$

Отсюда заключаем, что $v_n(y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $v_n''(y) - (2\pi n)^2 v_n(y) = 0$. Общее решение последнего уравнения принимает вид

$$v_n(y) = a_n e^{2\pi ny} + b_n e^{-2\pi ny}. \tag{11}$$

В силу условий (4) получим граничные условия

$$v_n(0) = 4\int_0^1 u(x,0)\sin(2\pi nx)\,dx = 4\int_0^1 \tau(x)\sin(2\pi nx)\,dx = \tau_n, \tag{12}$$

$$v_n(T) = 4\int_0^1 u(x,T)\sin(2\pi nx)\,dx = 4\int_0^1 \varphi(x)\sin(2\pi nx)\,dx = \varphi_n. \tag{13}$$

Удовлетворяя общее решение (11) граничным условиям (12) и (13), найдем неизвестные постоянные a_n и b_n.

$$a_n = \frac{W_1}{W} = \frac{\tau_n e^{-2\pi nT} - \varphi_n}{-2\,\mathrm{sh}\,2\pi nT}, \qquad b_n = \frac{W_2}{W} = \frac{\varphi_n - \tau_n e^{2\pi nT}}{-2\,\mathrm{sh}\,2\pi nT}. \tag{14}$$

Тогда общее решение (11), с учетом (14), примет вид

$$v_n(y) = \varphi_n \frac{\mathrm{sh}\,2\pi ny}{\mathrm{sh}\,2\pi nT} + \tau_n \frac{\mathrm{sh}\,2\pi n(T-y)}{\mathrm{sh}\,2\pi nT}. \tag{15}$$

Найдем теперь $u_0(y)$. Дифференцируя (7) дважды по y и учитывая уравнение (1) имеем

$$u_0''(y) = -2\int_0^1 u_{xx}(x,y)(1-x)dx.$$

Интегрируя по частям полученный интеграл и, удовлетворяя граничным условиям (3), получим следующую граничную задачу, решением которого будет функция $u_0(y)$:

$$u_0''(y) = 0, \tag{16}$$

$$u_0(0) = 2\int_0^1 u(x,0)(1-x)dx = 2\int_0^1 \tau(x)(1-x)dx = \tau_o, \tag{17}$$

$$u_0(T) = 2\int_0^1 u(x,T)(1-x)dx = 2\int_0^1 \varphi(x)(1-x)dx = \varphi_0. \tag{18}$$

Общее решение уравнения (16) единственно и имеет вид

$$u_0(y) = \tau_0 + \frac{\varphi_0 - \tau_0}{T} y. \tag{19}$$

Аналогично получаем граничную задачу для $u_n(y)$:

$$u_n''(y) - (2\pi n)^2 u_n(y) = -4\pi n \cdot v_n(y) \tag{20}$$

с граничными условиями

$$u_n(0) = 4\int_0^1 \tau(x)(1-x)\cos(2\pi nx)\,dx = \tau_{1n}, \tag{21}$$

$$u_n(T) = 4\int_0^1 \varphi(x)(1-x)\cos(2\pi nx)\,dx = \varphi_{1n}. \tag{22}$$

Решение задачи (20) - (22) существует, единственно, и с учетом (15) оно представимо в виде

$$u_n(y) = \big(\varphi_{1n} - w_n(T)\big)\frac{\operatorname{sh} 2\pi ny}{\operatorname{sh} 2\pi nT} + \tau_{1n}\frac{\operatorname{sh} 2\pi n(T-y)}{\operatorname{sh} 2\pi nT} + w_n(y). \tag{23}$$

где

$$\begin{gathered} w_n(y) = \frac{\varphi_n}{\operatorname{sh}(2\pi nT)}\left(\frac{1}{2\pi n}\operatorname{sh} 2\pi ny - y\operatorname{ch} 2\pi ny\right) + \\ + \frac{\tau_n}{\operatorname{sh} 2\pi nT}\left(y \cdot \operatorname{ch} 2\pi n(T-y) + \frac{1}{4\pi n}\operatorname{sh} 2\pi n(T-y) - \right. \\ \left. - \frac{1}{4\pi n}\operatorname{sh} 2\pi n(y+T)\right). \end{gathered} \tag{24}$$

Из формул (15), (19) и (23) следует единственность решения задачи (2) – (4), так как если $\tau(x) \equiv 0$, $\varphi(x) \equiv 0$ на $[0,1]$, то $u_n(y) \equiv 0$, $u_0(y) \equiv 0$, $v_n(y) \equiv 0$ для $n = 1, 2, \dots$ на $[0, T]$. Тогда из (6) – (8) имеем

$$4\int_0^1 u(x,y)(1-x)\cos(2\pi nx)\,dx = 0, \qquad n = 1, 2, \dots,$$

$$2\int_0^1 u(x,y)(1-x)dx = 0, \qquad 4\int_0^1 u(x,y)\sin(2\pi nx)\,dx = 0, \qquad n = 1, 2, \dots.$$

Отсюда в силу полноты системы (6) в пространстве $L_2[0,1]$ следует, что функция $u(x,y) \equiv 0$ в области $\bar{Q}$. Теорема доказана.

Единственное решение задачи (2) – (4) для уравнения (1) можно представить в виде суммы ряда

$$u(x,y) = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y)\cos 2\pi nx + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) x \sin 2\pi nx, \tag{25}$$

где функции $u_0(y)$, $u_n(y)$, $v_n(y)$ определяются по формулам (19), (23), (15) соответственно.

Литература

1. Лернер М. Е., Репин О. А. Нелокальные краевые задачи в вертикальной полуполосе для обобщенного осесимметричного уравнения Гельмгольца // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37. № 11. С. 1562-1564.
2. Моисеев Е. И. О разрешимости одной нелокальной краевой задачи // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37. № 11. С. 1565-1567.
3. Моисеев Е. И. О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35. № 8. С. 1094-1100.

4. Сабитов К. Б., Сидоренко О. Г. Об однозначности разрешимости нелокальной задачи для вырождающегося эллиптического уравнения спектральным методом // Труды международной конференции «Спектральная теория дифференциальных операторов и родственные проблемы», посвящ. 70-летию акад. Ильина В. А., АН РБ. Стерлитамак. Уфа: Гилем, 2003. Т. 1. С. 213-219.

MSC 34G10 58D25

Solving the non-local boundary value problem for Laplace equations

Yu.F. Nurgalieva [1], Yu.K. Sabitova [1]

Sterlitamak branch of Bashkir State University [1]

Abstract: A solution of the boundary value problem with a nonlocal condition for the Laplace equation in a rectangular domain is constructed. Theory of the problem is proved by using the method of spectral analysis. The solution of the problem is represented as the sum of a biorthogonal series.

Keywords: nonlocal condition, Laplace equation, boundary value problem, spectral analysis.

References

1. Lerner M. Ye., Repin O. A. Nelokalnyie krayevyie zadachi v vertikalnoy polupolose dlya obobshchennogo osesimmetrichnogo uravneniya Gelmgoltsa [Nonlocal boundary-value problems in a vertical half-strip for the generalized axisymmetric Helmholtz equation]. Differentsialnyie uravneniya [Differential equations]. 2001. V. 37. No 11. P. 1562-1564.
2. Moiseev E. I. O razreshimosti odnoy nelokalnoy kraevoy zadachi [On the solvability of one a nonlocal boundary-value problem]. Differentsialnyie uravneniya [Differential equations]. 2001. V. 37. No 11. P. 1565-1567.
3. Moiseev E. I. O reshenii spektralnyim metodom odnoy nelokalnoy kraevoy zadachi [On the solution by a spectral method of one a nonlocal boundary-value problem]. Differentsialnyie uravneniya [Differential equations]. 1999. V. 35. No. 8. P. 1094-1100.
5. Sabitov K. B., Sidorenko O. G. Ob odnoznachnosti razreshimosti nelokalnoy zadachi dlya vyirozhdayuschegosya ellipticheskogo uravneniya spektralnyim metodom [On the uniqueness of the solvability of a nonlocal problem for a degenerate elliptic equation by the spectral method]. Trudyi mezhdunarodnoy konferentsii «Spektralnaya teoriya differentsialnyih operatorov i rodstvennyie problemyi», posvyasch. 70-letiyu akad. Ilina V. A., AN RB. Sterlitamak [Proceedings of the international conference "Spectral theory of differential operators and related problems"]. Ufa: Gilem, 2003. V. 1. P. 213-219.