XIII Международная научная конференция "Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании", Саранск, 12-16 июля 2017.
XIII International scientific conference "Differential equations and their applications in mathematical modeling", Saransk, July 12-16, 2017.

УДК 519.254

Идентификация модели разогрева экструдера для полимеров

Д.В. Иванов, А.В. Иванов, И.Л. Сандлер, Н.В. Чертыковцева

Самарский государственный университет путей сообщения

Аннотация: Процесс экструзии является одним из основных технологических процессов в производстве полимерной продукции. Полный цикл работы экструдера (аппарата, в котором проводится процесс экструзии) состоит из нескольких стадий. Первая из названных выше стадий – режим разогрева – характеризуется непродуктивными затратами рабочего времени и энергетических ресурсов. Для повышения эффективности режима разогрева экструдера нужна соответствующая математическая модель. Большинство известных на сегодняшний день научных работ, посвященных этому вопросу, направленны на разработку алгоритмов идентификации математических моделей первого порядка с запаздыванием или второго порядка с запаздыванием. Данные модели описывают объект с сосредоточенными параметрами, что является достаточно грубым допущением при моделировании процесса разогрева экструдера.
Целью работы является разработка метода идентификации модели разогрева экструдера для полимеров на основе уравнений с разностями дробного порядка при наличии погрешностей в измерениях.
В статье показано, что объект с иррациональной передаточной функцией может быть аппроксимирован уравнениями с разностями дробного порядка. Предложена математическая модель модели разогрева экструдера для полимеров в виде линейного уравнения с разностями дробного порядка. Данная модель сравнивалась с моделями выходной ошибки (output error) и ARX (autoregressive with exogenous input) моделями целого порядка, алгоритмы идентификации которых реализованы в расширении Matlab, Identification toolbox. Проведенные эксперименты показали, что модели на основе уравнений с разностями дробного порядка обладают более высокой точностью. Предложенные в статье модели и алгоритмы для идентификации разогрева экструзии полимеров могут послужить основой для создания новых высокоэффективных систем управления.

Ключевые слова: экструзия, параметрическая идентификация, разность дробного порядка, модель выходной ошибки, метод наименьших квадратов (МНК)

1. Введение

Процесс экструзии является одним из основных технологических процессов в производстве полимерной продукции. Полный цикл работы экструдера (аппарата, в котором проводится процесс экструзии) состоит из нескольких стадий:

1) разогрев экструдера до заданного технологическими условиями температурного режима;

2) пуск процесса экструзии – переход от состояния, когда продукция на выходе экструдера отсутствует, до состояния, когда исходная продукция экструдера соответствует заданным количественным и качественным характеристикам;

3) режим нормальной эксплуатации;

4) остановка процесса экструзии.

Первая из названных выше стадий – режим разогрева – характеризуется непродуктивными затратами рабочего времени и энергетических ресурсов. Поэтому, с точки зрения повышения эффективности работы технологического оборудования в производстве полимеров в целом, и энергосбережения в частности, задача управления режимом разогрева экструдера может быть с формулирована следующим образом: необходимость разогреть экструдер до нужного температурного режима по зонам за кратчайшее время без перегрева аппарата (или с минимальным перегревом).

В последнее время появились результаты научных исследований, посвященные решению сформулированной задачи. Как показали результаты исследований, приведенные в [1-3], управления разогревом экструдера должно осуществляться на основе математической модели, которая существенно улучшает качество самого процесса. Следовательно, для повышения эффективности режима разогрева экструдера нужна соответствующая математическая модель. Большинство известных на сегодняшний день научных работ, посвященных этому вопросу, направленны на разработку алгоритмов идентификации математических моделей первого порядка с запаздыванием (ППЗ) или второго порядка с запаздыванием (ВПЗ). Данные модели описывают объект с сосредоточенными параметрами, что является достаточно грубым допущением при моделировании процесса разогрева экструдера. В статье предложена модель разогрева экструзии полимеров в виде линейного уравнения с разностями дробного порядка.

2. Математическое описание процесса нагрева

Рассмотрим идеальный без потерь процесс нагрева полубесконечного тела. Ось направлена перпендикулярно нагреваемой поверхности, а начало совпадает с ней. Запишем уравнение теплопроводности для данного случая:

$$\begin{gathered}\frac{\partial T(l,t)}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 T(l,t)}{\partial l^2}, 0 < l < \infty, t > 0,\\ -\lambda \frac{\partial T(l,t)}{\partial l} = \varphi(t), l = 0, t > 0,\\ T(l,t) = 0, 0 \le l < \infty, t = 0\end{gathered} \tag{1}$$

Используя преобразование Лапласа, приведем уравнение к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial^2 \overline{T}(l,s)}{\partial l^2} - \frac{s}{\gamma}\overline{T}(l,s) = 0, \tag{2}$$

$$\overline{T}(l,s) = L\left\{T(l,s)\right\}. \tag{3}$$

Решение этого уравнения будет иметь вид

$$\overline{T}(l,s) = K_1(s)e^{-l\sqrt{\frac{s}{\gamma}}} + K_2(s)e^{l\sqrt{\frac{s}{\gamma}}}.$$

Передаточная функция при нулевых граничных условиях передаточная функция может быть записана в виде

$$W(l,s) = \frac{\overline{T}(l,s)}{\overline{\varphi}(s)} = \frac{\sqrt{\gamma}}{\lambda\sqrt{s}}e^{-l\sqrt{\frac{s}{\gamma}}}. \tag{4}$$

Введем замену переменной $u = l\sqrt{\frac{s}{\alpha}}$. Используя аппроксимацию Паде порядка P

$$e^{-u} \approx \frac{\sum_{k=0}^{P}\frac{(2P-k)!}{k!(P-k)!}(-u)^k}{\sum_{k=0}^{P}\frac{(2P-k)!}{k!(P-k)!}u^k} \tag{5}$$

Подставляя (5) в (4), получим

$$W(l,s) \approx H_P(s) = \frac{\sqrt{\gamma}}{\lambda\sqrt{s}}\frac{\sum_{k=0}^{P}\frac{(2P-k)!}{k!(P-k)!}(-l\sqrt{\frac{s}{\gamma}})^k}{\sum_{k=0}^{P}\frac{(2P-k)!}{k!(P-k)!}(l\sqrt{\frac{s}{\gamma}})^k}. \tag{6}$$

Таким образом, передаточная функция уравнения теплопроводности, будет содержать слагаемые со степенями кратными $\frac{1}{2}$. Такая передаточная функция соответствует дифференциальному уравнению с производными с производными дробных порядков, т.к. $\sqrt{s} \to \left(\frac{d}{dt}\right)^{\frac{1}{2}}$

Учитывая, что реальный процесс будет иметь потери, а кроме того неоднородность среды, в общем виде уравнения теплообмена могут записаны через уравнения дробных порядков [4]. При аппроксимации решений данных уравнений могут возникать степени не кратные $\frac{1}{2}$.

Учитывая, что информация об объекте управления поступает в дискретном виде с частотой дискретизации 1с целесообразно проводить идентификацию на основе дискретных моделей во временной области.

3. Параметрическая идентификация процесса разогрева экструдера

В общем виде модель процесса нагрева имела следующий вид:

$$z_i = \sum_{m=1}^{r} b_0^{(m)} \Delta^{\alpha_m} z_{i-1} + \sum_{m=1}^{r_1} a_0^{(m)} \Delta^{\beta_m} x_{i-d}, y_i = z_i + \xi_i, \tag{7}$$

где $\alpha_1 \ldots < \alpha_r$,$\beta_1 \ldots < \beta_{r_1}$,$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$, $\Delta^{\alpha_m} z_i = \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \begin{pmatrix} \alpha_m \\ j \end{pmatrix} z_{i-j}, \Delta^{\beta_m} x_i = \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \begin{pmatrix} \beta_m \\ j \end{pmatrix} x_{i-j}, \begin{pmatrix} \alpha_m \\ j \end{pmatrix} = \frac{\Gamma(\alpha_m+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha_m-j+1)}, \begin{pmatrix} \beta_m \\ j \end{pmatrix} = \frac{\Gamma(\beta_m+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta_m-j+1)}$,
y_i-измеренное значение температуры;
x_i– входная переменная, представленная в виде функции Хевисайда;
ξ_i, – помеха наблюдения;

Оценки параметров определялись из условия минимума критерия [5]:

$$\min_{\theta \in \tilde{B}} \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(y_i - \phi_i^T \theta\right)^2}{1 + b^T H_\alpha b}, \tag{8}$$

$$\phi_i = \left(\begin{array}{c|c} \left(\phi_y^{(i)}\right)^T & \left(\phi_x^{(i)}\right)^T \end{array} \right)^T, \phi_y^{(i)} = \left(\sum_{j=0}^{i} (-1)^j \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ j \end{pmatrix} y_{i-j-1}, \ldots, \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \begin{pmatrix} \alpha_r \\ j \end{pmatrix} y_{i-j-1} \right)^T,$$

$$\phi_x^{(i)} = \left(\sum_{j=0}^{i} (-1)^j \begin{pmatrix} \beta_1 \\ j \end{pmatrix} x_{i-j}, \ldots, \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \begin{pmatrix} \beta_{r_1} \\ j \end{pmatrix} x_{i-j} \right)^T,$$

$$\theta = \left(\begin{array}{c|c} b^T & a^T \end{array} \right)^T, b = \left(b^{(1)}, \ldots, b^{(r)}\right)^T, a = \left(a^{(0)}, \ldots, a^{(r_1)}\right)^T,$$

где $H_\alpha = \left(\begin{array}{c|c|c} h_\alpha^{(11)} & \ldots & h_\alpha^{(r1)} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline h_\alpha^{(1r)} & \ldots & h_\alpha^{(rr)} \end{array} \right)$, $h_\alpha^{(mn)} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \begin{pmatrix} \alpha_m \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_n \\ j \end{pmatrix} \frac{N-j}{N}$, В общем случае вычисление оценок является задачей минимизации отношения двух квадратичных форм. В[6] предложен двухэтапный итерационный алгоритм, позволяющий находить минимум (8), решая только системы линейных алгебраических уравнений:

Шаг 0. $\hat{\lambda}'(0) = 0$;

Шаг 1.$\hat{\lambda}'(i) = \frac{\left(\lambda_{\min} + \hat{\lambda}'(i-1)\right)}{2}$, $\lambda_{\min}$ определяется из

$$\det\left(\Phi_y^T\Phi_y - \Phi_y^T\Phi_x\left(\Phi_x^T\Phi_x\right)^{-1}\left(\Phi_y^T\Phi_x\right)^T - \lambda H_\alpha(N)\right) = 0.$$

Шаг 2. Вычислить $\hat{b}\left(N, \hat{\lambda}'(i)\right)$, $\hat{a}\left(N, \hat{\lambda}'(i)\right)$, из системы уравнений

$$\left(\begin{array}{c}\hat{b}\left(N,\hat{\lambda}\right)\\ \hline \hat{a}\left(N,\hat{\lambda}\right)\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c}\Phi_y^T\Phi_y - \hat{\lambda}H_\alpha(N) & \Phi_y^T\Phi_x\\ \hline \Phi_x^T\Phi_y & \Phi_x^T\Phi_x\end{array}\right)^{-1}\left(\begin{array}{c}\Phi_y^TY\\ \hline \Phi_x^TY\end{array}\right), \tag{9}$$

где $Y = (y_1, ..., y_N)^T$, $\Phi = \left(\begin{array}{c|c}\Phi_y & \Phi_x\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c}\left(\phi_y^{(0)}\right)^T & \left(\phi_x^{(0)}\right)^T\\ \vdots & \vdots\\ \left(\phi_y^{(N-1)}\right)^T & \left(\phi_x^{(N-1)}\right)^T\end{array}\right)$,

Шаг 3. Проверить условие $V_N\left(\hat{\lambda}'(i)\right) \le 0$.

$$V_N(\lambda) = Y^TY - \hat{\lambda}'(i) - \left(\Phi_y^TY\hat{b}\left(N,\hat{\lambda}(i)\right) + \Phi_x^TY\hat{a}\left(N,\hat{\lambda}(i)\right)\right),$$

тогда если уравнение$V_N\left(\hat{\lambda}'(i)\right) = 0$имеет корень $\hat{\lambda}'_1(N) \in [0, \lambda_{\min}(N))$, то последовательность $\hat{\lambda}'(0), \hat{\lambda}'(1), \ldots, \hat{\lambda}(0)$- конечна и $\lambda(0) \in \left[\hat{\lambda}'_1(N), \lambda_{\min}(N)\right)$, в противном случае последовательность бесконечна.

Этот алгоритм позволяет определить начальное приближение$\hat{\lambda}(0)$, необходимое для дальнейшего применения метода Ньютона или определить, что корень $\hat{\lambda}'_1(N)$ не существует.

Пусть существуют $\hat{\lambda}(0) \in \left[\hat{\lambda}'_1(N), \lambda_{\min}(N)\right)$, тогда $\lim\limits_{i\to\infty}\hat{\lambda}(i) = \hat{\lambda}'_1(N)$, $\lim\limits_{i\to\infty}\hat{b}\left(N,\hat{\lambda}'(i)\right) = \hat{b}(N)$, $\lim\limits_{i\to\infty}\hat{a}\left(i,\hat{\lambda}'(i)\right) = \hat{a}(N)$, где $\hat{\lambda}(i)$, $\hat{b}\left(i,\hat{\lambda}(i)\right)$ и $\hat{a}\left(i,\hat{\lambda}(i)\right)$ определяется совместно со следующим алгоритмом:

Шаг 1. Вычислить $\hat{b}\left(N,\hat{\lambda}'(i)\right)$, $\hat{a}\left(N,\hat{\lambda}'(i)\right)$, из системы уравнений (9);

Шаг 2. Вычислить

$$\hat{\lambda}(i+1) = \left(1 + \left[\hat{b}\left(N,\hat{\lambda}(i)\right)\right]^T H_\alpha(N)\hat{b}\left(N,\hat{\lambda}(i)\right)\right)^{-1} \times$$
$$\times\left(Y^TY + \hat{\lambda}(i)\left(\left[\hat{b}\left(N,\hat{\lambda}(i)\right)\right]^T H_\alpha(N)\hat{b}\left(N,\hat{\lambda}(i)\right)\right) - \left(\begin{array}{c}\Phi_y^TY\\ \hline \Phi_x^TY\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\hat{b}\left(N,\hat{\lambda}'(i)\right)\\ \hline \hat{a}\left(N,\hat{\lambda}'(i)\right)\end{array}\right)\right).$$

Шаг 3. Перейти к шагу 1.

Процесс вычисления заканчивается, если выполняется условие

$$\frac{\left\|V_N\left(\hat{\lambda}(i+1)\right) - V_N\left(\hat{\lambda}(i)\right)\right\|}{\left\|V_N\left(\hat{\lambda}(i+1)\right)\right\|} \le \delta$$

где δ- априорно заданная точность оценок.

Это утверждение непосредственно вытекает из метода Ньютона:

$$\hat{\lambda}(i+1) = \hat{\lambda}(i) - \frac{V_N\left(\hat{\lambda}(i)\right)}{\dot{V}_N\left(\hat{\lambda}(i)\right)}.$$

Таблица 1. Виды экспериментальных моделей

№	ARX целого порядка	OE целого порядка	OE дробного порядка
1	$z_i = 0.9989z_{i-1} + 0.1751x_{i-31}$	$z_i = 0.9989z_{i-1} + 0.1749x_{i-31}$	$z_i = 0.9903z_{i-1} + 0.1014\Delta^{-0.55}x_{i-31}$,
2	$z_i = 0.9992z_{i-1} + 0.1531x_{i-38}$	$z_i = 0.9992z_{i-1} + 0.1492x_{i-38}$	$z_i = 0.9706z_{i-1} + 0.0602\Delta^{-0.55}x_{i-36}$,
3	$z_i = 0.9989z_{i-1} + 0.5857x_{i-31}$	$z_i = 1.966z_{i-1} - 0.966z_{i-2} + 1.48x_{i-31} - 3.03x_{i-32} + 1.56x_{i-33}$	$z_i = 0.9798z_{i-1} + 0.1366\Delta^{-0.5}x_{i-40}$,

4. Результаты экспериментальных исследований

Испытания проводились на экструдере ESE 1-35-27. Экструдер имеет 3 зоны нагрева. Мощность каждого нагревателя 0.5 кВт. Погрешность измерения темпратуры ± 1°C. Схема расположения зон нагрева представлена на рисунке 1.

Экспериментально были получены переходные характеристики, для нагрева каждой из трех зон при включении соответствующего нагревателя.

Идентификация проводилась на основе алгоритма описанного в предыдущем разделе (модель выходной ошибки дробного порядка), а также использовалось расширение Matlab, Identification toolbox, в котором реализована идентификация параметров моделей выходной ошибки (output error) и ARX (autoregressive with exogenous input) для моделей целого порядка. Для всех трех моделей время запаздывания определялось по графикам.

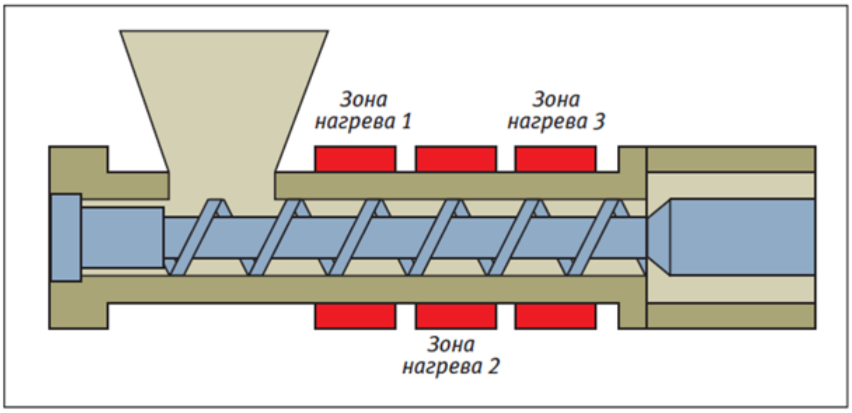

Рис. 1. Схема расположения зон в экструдере

Модели для трех зон нагрева приведены в таблице 1. Стоит отметить, что при возрастании порядка целочисленных моделей, ковариационная матрица становилась плохо обусловленной и точность моделирования ухудшалась.

Графики абсолютных погрешностей для трех зон представлены ниже.

Из представленных графиков видно, что модели на основе уравнений с разностями дробного порядка точнее известных дискретных ARX и OE моделей. Для всех трех зон погрешность моделей не превышала 2°C.

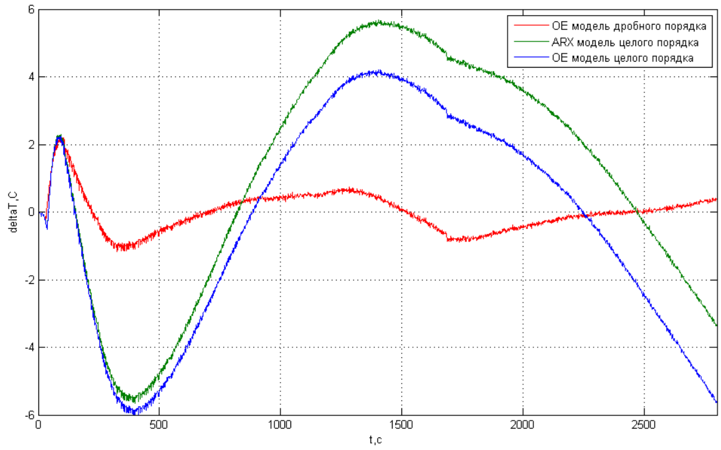

Рис. 2. График абсолютной погрешности для первой зоны нагрева

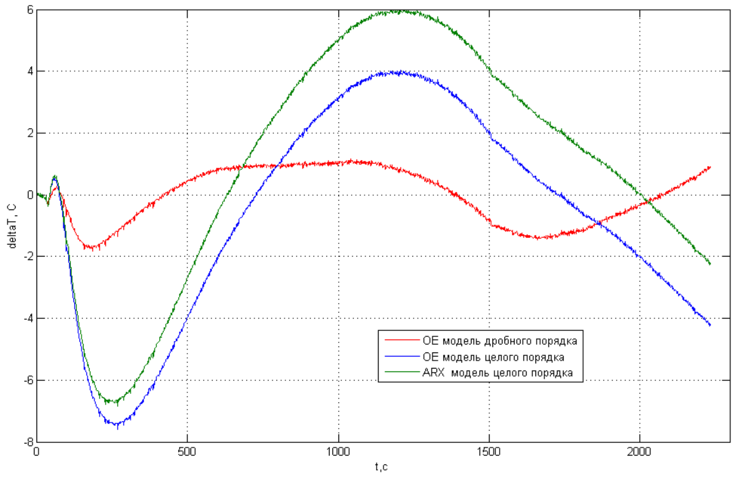

Рис. 3. График абсолютной погрешности для второй зоны нагрева

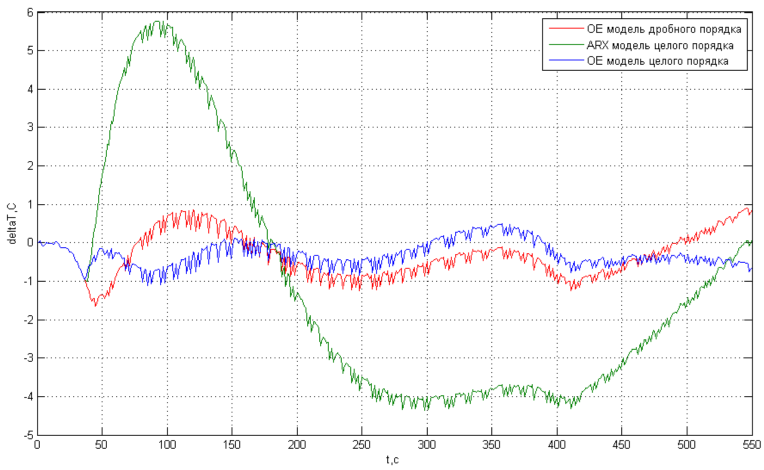

Рис. 4. График абсолютной погрешности для третьей зоны нагрева

5. Заключение

Проведенные эксперименты показали, что модели на основе уравнений с разностями дробного порядка обладают более высокой точностью. Предложенные в статье модели и алгоритмы для идентифкации разогрева экструзии полимеров могут послужить основой для создания новых высокоэффективных систем управления. Дальнейшим направлением работы является построение единой модели, учитывающей взаимное влияние зон разогрева, на основе алгоритмов, позволяющих осуществлять структурно параметрическую идентификацию.

Литература

1. Diduch C., Dubay R.,Li W.G. Temperature control of injection molding. Part 1: Modeling and identification.// Polym. Eng. Sci. 2004. vol. 44. no. 12. pp. 2308-2317.

2. Dubay R.,Diduch C., Li W.G. Temperature control of injection molding. Part 2: Controller design, simulation, and implementation // Polym. Eng. Sci. 2004. vol. 44, no. 12. pp. 2318-2326.

3. Dassau E., Grosman B., Lewin D.R. Modeling and temperature control of rapid thermal processing // Comput. Chem. Eng. 2006. vol. 30, no. 4, pp. 686-697.

4. Sierociuk D., Dzieliński A.,Sarwas G., Petras I., Podlubny I., Skovranek T. Modelling heat transfer in heterogeneous media using fractional calculus//Phil Trans R Soc A13 May 2013 vol. 371 no. 199020120146. http://dx.doi.org/10.1098/rsta 2012.0146

5. Ivanov D.V.Identification Discrete Fractional Order Linear Dynamic Systems with output-error //Proc. International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON'2013). Krasnoyarsk: Siberian Federal University. Russia, Krasnoyarsk, 2013. IEEE Catalog Number: CFP13794-CDR.

6. Ivanov D.V. Numerical algorithms of parameter estimation of linear dynamic systems fractional order with noise in the output signal // Applied Discrete Mathematics and Heuristic Algorithms. 2015. vol. 1, no. 1 pp. 23-31.

MSC 93E12

Identification of the heating model plastic injection molding machines

D.V. Ivanov, A.V. Ivanov, I.L. Sandler, N.V. Chertykovtseva
Samara State University of Transport

Abstract: The injection molding is one of the main technological processes in the production of plastic. The complete cycle of the injection molding machine consists of several stages. The first of the above stages - the heating up - is characterized by unproductive labor and energy resources . To increase the efficiency of the extrusion heating mode, an appropriate mathematical model is needed. Most of the currently known scientific papers devoted to this issue are aimed at developing algorithms for identifying first-order mathematical models with delay or second-order delay. These models describe an object with lumped parameters, which is a rather crude assumption in modeling the extruder heating process. The aim of the paper is to develop a method for identifying an plastic injection molding heating model based on equations with fractional-order differences in the presence of errors in measurements. The paper shows that an object with an irrational transfer function can be approximated by equations with fractional-order differences. A mathematical model of the plastic engine molding heating model in the form of a linear equation with fractional-order differences is proposed. This model was compared with models of output error and ARX (autoregressive with exogenous input) models of integer order, whose identification algorithms are implemented in the Matlab extension, Identification toolbox. The experiments carried out showed that models based on equations with fractional-order differences have higher accuracy. The models and algorithms proposed in the paper for identifying the heating of engine molding machine can serve as a basis for the creation of new highly efficient control systems.

Keywords: Injection molding machines, parametric identification, fractional difference Order, the model of the output error, least squares (LS), temperature control

References

1. Diduch C., Dubay R.,Li W.G. Temperature control of injection molding. Part 1: Modeling and identification. // Polym. Eng. Sci. 2004. vol. 44, no. 12, pp. 2308-2317.

2. Dubay R.,Diduch C., Li W.G. Temperature control of injection molding. Part 2: Controller design, simulation, and implementation // Polym. Eng. Sci. 2004. vol. 44, no. 12, pp. 2318-2326.

3. Dassau E., Grosman B., Lewin D.R. Modeling and temperature control of rapid thermal processing // Comput. Chem. Eng. 2006. vol. 30, no. 4, pp. 686-697.

4. Sierociuk D., Dzieliński A.,Sarwas G., Petras I., Podlubny I., Skovranek T. Modelling heat transfer in heterogeneous media using fractional calculus//Phil Trans R Soc A13 May 2013 vol. 371 no. 199020120146. http://dx.doi.org/10.1098/rsta.2012.0146

5. Ivanov D.V.Identification Discrete Fractional Order Linear Dynamic Systems with output-error //Proc. International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON'2013). Krasnoyarsk: Siberian Federal University. Russia, Krasnoyarsk, 2013. IEEE Catalog Number: CFP13794-CDR.

6. Ivanov D.V. Numerical algorithms of parameter estimation of linear dynamic systems fractional order with noise in the output signal // Applied Discrete Mathematics and Heuristic Algorithms. 2015. vol. 1, no. 1 pp. 23-31.