УДК 51-72

Уточнение уравнения прогиба круговой мембраны при помощи переменных коэффициентов в уточненном методе Эйлера

Д.А. Тархов [1], П.И. Васильев [1], Д.А. Семенова [1], И.А. Шишкина [1]

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого[1]

Аннотация: Рассмотрено решение задачи о прогибе нагруженной круговой мембраны. Получена полуэмпирическая модель, выражающая зависимость прогиба мембраны от расстояния до центра и основанная на аналитическом решении уравнений условий равновесия и экспериментально полученных данных. При помощи уточнённого метода Эйлера было разработано улучшение модели, более достоверно выражающее зависимость прогиба мембраны от расстояния до центра.

Ключевые слова: уточнённый метод Эйлера, круговая мембрана, оператор Лапласа, полуэмпирический метод, исследование зависимости прогиба от радиуса

Пусть $u(r, \theta)$ – функция зависимости величины прогиба круговой мембраны от угла и расстояния от центра. Рассмотрим условие равновесия мембраны:

$$\begin{cases} T\Delta u + P = 0 \\ u|_{r=R} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

где R – радиус мембраны, P – внешняя сила, приложенная к мембране, T – абсолютная величина приложенной к краю мембраны растягивающей силы на единицу длины (предполагаем, что растяжение изотропно). Предполагая, что задача является осесимметричной, $u(r, \theta) = u(r)$. Таким образом, пренебрегая угловой частью оператора Лапласа, получаем систему:

$$\begin{cases} r\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{du}{dr} = -\frac{P}{T} \\ u|_{r=R} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Пренебрегая массой мембраны и считая груз материальной точкой, получим, что $\frac{P}{T} = 0$:

$$\begin{cases} r\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{du}{dr} = 0 \\ u|_{r=R} = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Аналитическим решением данной системы является функция:

$$u(r) = a + c\ln r \tag{4}$$

Проведя эксперимент и измерив реальные значения прогиба мембраны можем при помощи метода наименьших квадратов найти коэффициенты a и c. Масса груза – 228г, радиус мембраны – 10см. Таким образом, получим полуэмпирическую формулу:

$$u(r) = -1.8624 + 0.776198\ln r \tag{5}$$

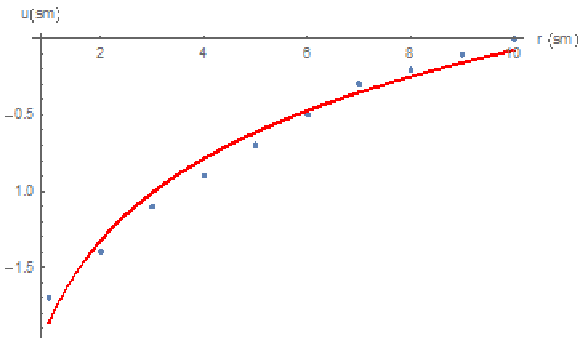

Рис. 1. Реальная зависимость прогиба от радиуса и график аналитического решения

Попробуем уточнить полученную формулу. Запишем радиальную часть оператора Лапласа $r\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{du}{dr} = 0$, произведём замену переменных $x = R - r, \frac{du}{dr} = z$, $\frac{dz}{dr} = -\frac{z}{r}$, $\frac{du}{dx} = -z$, $\frac{dz}{dx} = \frac{z}{R-x}$. Воспользуемся уточнённым методом Эйлера:

$$u_1 = u_0 - \tfrac{x}{2}z_0; \quad z_1 = z_0 + \tfrac{z_0}{R}$$

$$u^* = u_0 - \tfrac{x}{4}z_0; \quad z^* = z_0 + \tfrac{x}{4}\tfrac{z_0}{R}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= u^* - \tfrac{x}{4}z^* = u_0 - \tfrac{x}{4}z_0 - \tfrac{x}{4}(z_0 + \tfrac{xz_0}{4R}) = u_0 - \tfrac{x}{4}z_0(2 + \tfrac{x}{4R}) \\ z_1 &= z^* + \tfrac{xz^*}{2(R-x/2)} = z^*\tfrac{R}{R-x/2} = (z_0 + \tfrac{x}{4}\tfrac{z_0}{R})\tfrac{R}{R-x/2} = z_0\tfrac{4R+x}{2(2R-x)} \\ u_2 &= u_0 - xz_1 = u_0 - xz_0\tfrac{4R+x}{2(2R-x)} = u_0 - (R-r)z_0\tfrac{4R+R-r}{2(2R-R+r)} = \\ &= u_0 - z_0\tfrac{(R-r)(5R-r)}{2(R+r)} = u(r) \end{aligned} \tag{6}$$

Для уточнения найденного решения, возьмём u_0 и z_0 как переменные коэффициенты a и c. Используя измеренные значения прогиба мембраны, найдём значения a и c по методу наименьших квадратов:

$$u(r) = -0.0118372 + 0.0861019\frac{(10-r)(50-r)}{2(10+r)} \tag{7}$$

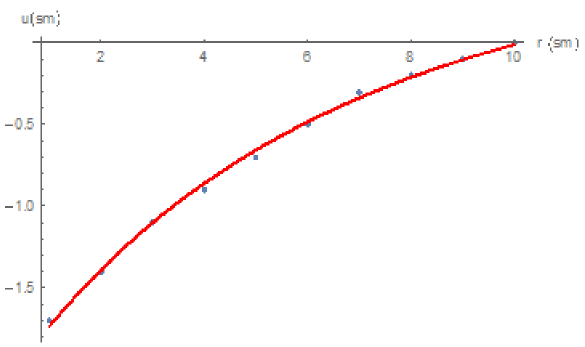

Рис. 2. Реальная зависимость прогиба от радиуса и график приближённого решения

Таким образом, уточнив приближённое решение уравнения прогиба мембраны экспериментальными данными, мы получили полуэмпирическую формулу, более достоверно описывающую поведение круговой мембраны, чем при точном аналитическом решении.

Литература

1. Араманович И. Г., Левин В. И. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1960. С. 130-143.

2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. С. 430-437.

3. Вержбицкий В. М. Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Высшая школа, 2001. С. 218-220.

4. Lazovskaya T., Tarkhov D.A. Multilayer neural network models based on grid methods, IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 158 (2016).

MSC 74K15

A refinement of the equation for the deflection of a circular membrane based on variable coefficients in the qualified Euler method

D.A. Tarkhov [1], P.I. Vasilyev [1], D.A. Semenova [1], I.A. Shishkina [1]
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University [1]

Abstract: The solution of the problem of the deflection of a loaded circular membrane is considered. Based on an analytical solution of the equations of the equilibrium condition and the experimentally obtained data, a semiempirical model is obtained. The dependence of the deflection of the membrane on the distance to the center is expressed. With the help of the qualified Euler method, an improvement of the model was developed, which more reliably expresses the dependence of the deflection of the membrane from the distance to the center.

Keywords: qualified Euler method, circular membrane, Laplace operator, semiempirical method, study of the dependence of deflection on the radius

References

1. Aramanovich I.G., Levin V.I. Uravneniya matematicheskoy fiziki [Equations of mathematical physics]. M .: Nauka, 1960. P. 130-143.

2. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki [Equations of mathematical physics]. M .: Nauka, 1977. C. 430-437.

3. Verzhbitskiy V.M. Chislennyye metody. Matematicheskiy analiz i obyknovennyye differentsial'nyye uravneniya [Numerical methods. Mathematical analysis and ordinary differential equations]. M.: Vysshaya shkola, 2001. P. 218-220.

4. Lazovskaya T., Tarkhov D.A. Multilayer neural network models based on grid methods, IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 158 (2016)