УДК 517.936

Первые интегралы приводимых вполне разрешимых систем уравнений в полных дифференциалах*

А.Ф. Проневич

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы

Аннотация: В работе рассмотрена приводимая относительно различных групп преобразований вполне разрешимая линейная однородная система уравнений в полных дифференциалах. Для данной дифференциальной системы разработан спектральный метод построения интегрального базиса. Нахождение функционально независимых первых интегралов осуществляется по матрице преобразования, общим собственным и присоединенным векторам и, соответствующим им, собственным числам интегральных матриц приведенной дифференциальной системы. В зависимости от кратности элементарных делителей интегральных матриц приведенной дифференциальной системы указаны явные виды первых интегралов. Приведены примеры, которые иллюстрируют полученные результаты.

Ключевые слова: приводимая система уравнений в полных дифференциалах, условие полной разрешимости, частный интеграл, первый интеграл.

1. Введение

Рассмотрим линейную однородную систему уравнений в полных дифференциалах

$$dx = \sum_{j=1}^{m} A_j(t)\, x\, dt_j\,, \tag{1}$$

где точки $x = \mathrm{colon}(x_1, \ldots, x_n)$ и $t = \mathrm{colon}(t_1, \ldots, t_m)$ из арифметических пространств $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$ соответственно, вектор-столбец $dx = \mathrm{colon}(dx_1, \ldots, dx_n)$, а $n \times n$ матрицы коэффициентов $A_j \colon t \to A_j(t) \quad \forall t \in \mathcal{T}$ непрерывно дифференцируемы на области $\mathcal{T} \subset \mathbf{R}^m$ и удовлетворяют условиям Фробениуса полной разрешимости [1, с. 43 – 44]

$$\partial_{t_j} A_\xi(t) + A_\xi(t) A_j(t) = \partial_{t_\xi} A_j(t) + A_j(t) A_\xi(t) \ \ \forall t \in \mathcal{T}, \quad j, \xi = 1, \ldots, m. \tag{2}$$

Одним из основных методов исследования линейных нестационарных дифференциальных систем является метод приведения их к линейным стационарным дифференциальным системам с помощью той или иной группы преобразований [2]. Идея этого метода принадлежит А.М. Ляпунову [3], изучавшему обыкновенные нестационарные линейные дифференциальные системы, которые неособенными ограниченными линейными преобразованиями могут быть сведены к линейным дифференциальным системам с постоянными коэффициентами. Такие системы им были названы *приводимыми*. Существенное развитие теория обыкновенных приводимых дифференциальных систем получила в работе Н.П. Еругина [4].

В дальнейшем, понятие приводимой обыкновенной дифференциальной системы было перенесено на многомерные дифференциальные системы и стало объектом изучения многих авторов (см., например, обзор литературы по этому направлению в монографиях [1] и [5]).

Пусть G — мультипликативная группа вещественных дважды непрерывно дифференцируемых на области $\mathcal{T}$ невырожденных матриц n-го порядка, выбор которой для вполне разрешимой системы (1) зависит от условий сохранения необходимых свойств решений.

*Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (Грант № Ф11М-206 «Обобщенные аналитические решения и интегралы многомерных дифференциальных систем»)

Вполне разрешимую дифференциальную систему (1) назовем *приводимой относительно группы нестационарных преобразований* G, если существуют матрица $\mathrm{g} \in G$ и постоянные матрицы B_j, $j = 1, \ldots, m$, такие, что система (1) с помощью замены $y = \mathrm{g}(t)x$ приводится к системе в полных дифференциалах с постоянными коэффициентами

$$dy = \sum_{j=1}^{m} B_j \, y \, dt_j \,, \quad y \in \mathbf{R}^n. \tag{3}$$

При этом матрица g удовлетворяет матричной системе тождеств

$$\partial_{t_j} \mathrm{g}(t) = B_j \, \mathrm{g}(t) - \mathrm{g}(t) \, A_j(t) \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{4}$$

и не нарушает [1, с. 73] свойства полной разрешимости (2) дифференциальной системы (3):

$$B_j \, B_\xi = B_\xi \, B_j, \quad j = 1, \ldots, m, \ \ \xi = 1, \ldots, m.$$

Французский математик Г. Дарбу (G. Darboux) в 1878 году для рационального обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка применил подход построения общего интеграла по известному количеству частных интегралов [6], который в настоящее время называется задачей Дарбу. В дальнейшем нахождение интегралов типа Дарбу получило свое развитие, как в постановке задачи, так и в разнообразии методов ее решения. Подробный обзор литературы и современное состояние теории интегралов приведены в монографиях В.Н. Горбузова [7], В.В. Козлова [8] и А. Гориэли (A. Goriely) [9].

С целью решения задачи Дарбу для линейных обыкновенных дифференциальных систем [10–12], систем уравнений в полных дифференциалах [13–17] и линейных однородных систем уравнений в частных производных первого порядка [18,19] разработан спектральный метод построения базиса первых интегралов. Данный метод основан на выделении базовых линейных частных интегралов по собственным числам и общим собственным векторам интегральных матриц линейной дифференциальной системы. В зависимости от того являются ли собственные числа вещественными, комплексными или им соответствуют кратные элементарные делители, определяется аналитическая структура первых интегралов.

Данная работа продолжает исследования автора по этому направлению и решает задачу Дарбу для приводимых линейных систем уравнений в полных дифференциалах (1)∪(2).

2. Исходные положения

С целью однозначного толкования используемых в статье понятий, следуя в основном монографии [7], сформулируем основные определения и положения теории интегралов систем уравнений в полных дифференциалах, а также докажем леммы 1 – 3, лежащие в основе спектрального метода построения первых интегралов приводимой системы (1)∪(2).

Непрерывно дифференцируемую функцию $F \colon D \to \mathbf{R}$ назовем *первым интегралом* на области $D \subset \mathcal{T} \times \mathbf{R}^n$ системы уравнений в полных дифференциалах (1), если

$$\mathcal{A}_j F(t, x) = 0 \quad \forall (t, x) \in D, \quad j = 1, \ldots, m,$$

где линейные дифференциальные операторы первого порядка

$$\mathcal{A}_j(t, x) = \partial_{t_j} + A_j(t) \, x \, \partial_x \quad \forall (t, x) \in \mathcal{T} \times \mathbf{R}^n, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Совокупность функционально независимых на области $D \subset \mathcal{T} \times \mathbf{R}^n$ первых интегралов $F_l \colon D \to \mathbf{R}$, $l = 1, \ldots, k$, системы (1) назовем *базисом первых интегралов* (или *интегральным базисом*) на области D системы (1), если у этой дифференциальной системы любой первый интеграл $\Psi \colon D \to \mathbf{R}$ можно представить в виде

$$\Psi(t, x) = \Phi\big(F_1(t, x), \ldots, F_k(t, x)\big) \quad \forall (t, x) \in D,$$

где Φ — некоторая непрерывно дифференцируемая функция на множестве значений векторной функции $F\colon (t,x) \to \big(F_1(t,x), \ldots, F_k(t,x)\big)$ $\forall (t,x) \in D$. Число k при этом назовем *размерностью* базиса первых интегралов на области D дифференциальной системы (1).

Интегральный базис вполне разрешимой на области $\mathcal{T} \times \mathbf{R}^n$ системы в полных дифференциалах (1) состоит из n функционально независимых первых интегралов [7, с. 32 – 36]. В случае неполной разрешимости системы уравнений в полных дифференциалах (1) с дефектом r, $0 < r \leq n$, ее базис первых интегралов в окрестности любой точки из области разрешимости имеет размерность $n - r$ [7, с. 54 – 60].

В основании метода построения интегрального базиса приводимой вполне разрешимой системы (1) лежат леммы 1 – 3. А первые интегралы системы (1) строятся по собственным числам, с учетом кратности их элементарных делителей, и общим собственным векторам матриц C_j, транспонированных к матрицам B_j, и по матрице преобразования g.

Лемма 1. *Пусть система* (1) *приводима к системе* (3) *с помощью матрицы преобразования* $\mathrm{g} \in G$, *а* ν *есть общий вещественный собственный вектор матриц* C_j, *которому соответствуют собственные числа* λ_j, $j = 1, \ldots, m$. *Тогда скалярная функция*

$$p\colon (t,x) \to \ \nu\, \mathrm{g}(t)x \quad \forall (t,x) \in \mathcal{T} \times \mathbf{R}^n \tag{5}$$

будет частным интегралом системы (1) *таким, что имеет место система тождеств*

$$\mathcal{A}_j\, p(t,x) = \lambda_j\, p(t,x) \quad \forall (t,x) \in \mathcal{T} \times \mathbf{R}^n, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. С учетом матричной системы тождеств (4) имеем

$$\mathcal{A}_j\, p(t,x) = \partial_{t_j} p(t,x) + A_j(t)\, x\, \partial_x\, p(t,x) = \nu\, \partial_{t_j} \mathrm{g}(t)x \ + \ A_j(t)\, x\, \nu\, \mathrm{g}(t) \ =$$

$$= \nu \big(B_j\, \mathrm{g}(t) - \mathrm{g}(t)\, A_j(t)\big)\, x \ + \ A_j(t)\, x\, \nu\, \mathrm{g}(t) = \nu B_j\, \mathrm{g}(t)\, x + \big(A_j(t) x\, \nu \mathrm{g}(t) - \nu \mathrm{g}(t)\, A_j(t) x\big) =$$

$$= C_j \nu\, \mathrm{g}(t)\, x = \lambda_j\, \nu\, \mathrm{g}(t)x = \lambda_j\, p(t,x) \quad \forall (t,x) \in \mathcal{T} \times \mathbf{R}^n, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Следовательно, функция (5) является линейным частным интегралом системы в полных дифференциалах (1) и выполняются тождества (6). Л е м м а д о к а з а н а.

Лемма 2. *Пусть система* (1) *приводима к системе* (3) *с помощью матрицы преобразования* $\mathrm{g} \in G$, *а* $\nu = \overset{*}{\nu} + \widetilde{\nu}\, i$ $(\mathrm{Re}\, \nu = \overset{*}{\nu},\ \mathrm{Im}\, \nu = \widetilde{\nu}\,)$ *есть общий существенно комплексный собственный вектор матриц* C_j, *которому соответствуют собственные числа* $\lambda_j = \overset{*}{\lambda}_j + \widetilde{\lambda}_j\, i$ $(\mathrm{Re}\, \lambda_j = \overset{*}{\lambda}_j,\ \mathrm{Im}\, \lambda_j = \widetilde{\lambda}_j\,)$, $j = 1, \ldots, m$. *Тогда производные Ли в силу системы* (1) *функций*

$$P\colon (t,x) \to (\overset{*}{\nu}\, \mathrm{g}(t)x)^2 + (\widetilde{\nu}\, \mathrm{g}(t)x)^2 \quad \forall (t,x) \in \mathcal{T} \times \mathbf{R}^n$$

и

$$\varphi\colon (t,x) \to \ \mathrm{arctg}\, \frac{\widetilde{\nu}\, \mathrm{g}(t)x}{\overset{*}{\nu}\, \mathrm{g}(t)x} \quad \forall (t,x) \in \Lambda,$$

где Λ *— любая область из множества* $\big\{(t,x)\colon t \in \mathcal{T},\ \overset{*}{\nu}\, \mathrm{g}(t)x \neq 0\big\} \subset \mathcal{T} \times \mathbf{R}^n$, *равны*

$$\mathcal{A}_j\, P(t,x) = 2\overset{*}{\lambda}_j\, P(t,x) \quad \forall (t,x) \in \mathcal{T} \times \mathbf{R}^n \quad \text{и} \quad \mathcal{A}_j\, \varphi(t,x) = \widetilde{\lambda}_j \quad \forall (t,x) \in \Lambda.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Формально применяя лемму 1 получаем, что комплекснозначная функция (5) является частным интегралом системы (1) и выполняется тождество

$$\mathcal{A}_j \big(\overset{*}{\nu}\, \mathrm{g}(t)x + i\, \widetilde{\nu}\, \mathrm{g}(t)x\big) = \big(\overset{*}{\lambda}_j + \widetilde{\lambda}_j\, i\big)\big(\overset{*}{\nu}\, \mathrm{g}(t)x + i\, \widetilde{\nu}\, \mathrm{g}(t)x\big) \quad \forall (t,x) \in \mathcal{T} \times \mathbf{R}^n,$$

которое равносильно на области $\mathcal{T} \times \mathbf{R}^n$ вещественной системе тождеств

$$\mathcal{A}_j \overset{*}{\nu}\,\mathrm{g}(t)x = \overset{*}{\lambda}_j \overset{*}{\nu}\,\mathrm{g}(t)x - \widetilde{\lambda}_j \widetilde{\nu}\,\mathrm{g}(t)x, \quad \mathcal{A}_j \widetilde{\nu}\,\mathrm{g}(t)x = \overset{*}{\lambda}_j \widetilde{\nu}\,\mathrm{g}(t)x + \widetilde{\lambda}_j \overset{*}{\nu}\,\mathrm{g}(t)x.$$

Используя эту систему тождеств, получаем

$$\mathcal{A}_j P(t,x) = \mathcal{A}_j \big((\overset{*}{\nu}\,\mathrm{g}(t)x)^2 + (\widetilde{\nu}\,\mathrm{g}(t)x)^2 \big) = 2\overset{*}{\nu}\,\mathrm{g}(t)x\, \mathcal{A}_j \overset{*}{\nu}\,\mathrm{g}(t)x + 2\widetilde{\nu}\,\mathrm{g}(t)x\, \mathcal{A}_j \widetilde{\nu}\,\mathrm{g}(t)x =$$

$$= 2\overset{*}{\nu}\,\mathrm{g}(t)x \big(\overset{*}{\lambda}_j \overset{*}{\nu}\,\mathrm{g}(t)x - \widetilde{\lambda}_j \widetilde{\nu}\,\mathrm{g}(t)x \big) + 2\widetilde{\nu}\,\mathrm{g}(t)x \big(\overset{*}{\lambda}_j \widetilde{\nu}\,\mathrm{g}(t)x + \widetilde{\lambda}_j \overset{*}{\nu}\,\mathrm{g}(t)x \big) =$$

$$= 2\overset{*}{\lambda}_j \big((\overset{*}{\nu}\,\mathrm{g}(t)x)^2 + (\widetilde{\nu}\,\mathrm{g}(t)x)^2 \big) = 2\overset{*}{\lambda}_j P(t,x) \quad \forall (t,x) \in \mathcal{T} \times \mathbf{R}^n,$$

$$\mathcal{A}_j \varphi(t,x) = \mathcal{A}_j \operatorname{arctg} \frac{\widetilde{\nu}\,\mathrm{g}(t)x}{\overset{*}{\nu}\,\mathrm{g}(t)x} = \frac{1}{1 + \dfrac{(\widetilde{\nu}\,\mathrm{g}(t)x)^2}{(\overset{*}{\nu}\,\mathrm{g}(t)x)^2}} \cdot \frac{\overset{*}{\nu}\,\mathrm{g}(t)x\, \mathcal{A}_j \widetilde{\nu}\,\mathrm{g}(t)x - \widetilde{\nu}\,\mathrm{g}(t)x\, \mathcal{A}_j \overset{*}{\nu}\,\mathrm{g}(t)x}{(\overset{*}{\nu}\,\mathrm{g}(t)x)^2} =$$

$$= \frac{\overset{*}{\nu}\,\mathrm{g}(t)x \big(\overset{*}{\lambda}_j \widetilde{\nu}\,\mathrm{g}(t)x + \widetilde{\lambda}_j \overset{*}{\nu}\,\mathrm{g}(t)x \big) - \widetilde{\nu}\,\mathrm{g}(t)x \big(\overset{*}{\lambda}_j \overset{*}{\nu}\,\mathrm{g}(t)x - \widetilde{\lambda}_j \widetilde{\nu}\,\mathrm{g}(t)x \big)}{(\overset{*}{\nu}\,\mathrm{g}(t)x)^2 + (\widetilde{\nu}\,\mathrm{g}(t)x)^2} = \widetilde{\lambda}_j \quad \forall (t,x) \in \Lambda.$$

Л е м м а д о к а з а н а.

В случае наличия у матриц C_j кратных элементарных делителей будем использовать понятие присоединенного вектора [7, с. 176] и основываться на лемме 3.

Пусть λ_ζ — собственное число матрицы C_ζ, $\zeta \in \{1,\ldots,m\}$, которому соответствуют элементарный делитель кратности $\kappa \geq 2$ и собственный вектор ν^0. Тогда *l-ым присоединенным вектором* матрицы C_ζ, соответствующим собственному числу λ_ζ, назовем вектор $\nu^l \in \mathbf{C}^n$, $l = 1,\ldots,\kappa-1$, являющийся решения линейной системы

$$\big(C_\zeta - \lambda_\zeta E\big)\, \nu^l = l \cdot \nu^{l-1}, \tag{7}$$

где E есть единичная матрица n-го порядка. На основании леммы 1 и системы равенств (7) устанавливаем, что на области $\mathcal{T} \times \mathbf{R}^n$ имеют место тождества

$$\mathcal{A}_\zeta \nu^0 \mathrm{g}(t)x = \lambda_\zeta \nu^0 \mathrm{g}(t)x, \quad \mathcal{A}_\zeta \nu^l \mathrm{g}(t)x = \lambda_\zeta \nu^l \mathrm{g}(t)x + l\,\nu^{l-1}\mathrm{g}(t)x, \;\; l = 1,\ldots,\kappa-1. \tag{8}$$

Лемма 3. *Пусть выполняются следующие условия*:

1) *система* (1)∪(2) *приводима к системе* (3) *с помощью матрицы* $\mathrm{g} \in G$;

2) ν^0 *— общий собственный вектор матриц C_j, которому соответствуют собственные числа λ_j, $j = 1,\ldots,m$*;

3) ν^l, $l = 1,\ldots,\kappa-1$, *— присоединенные векторы матрицы C_ζ, соответствующие собственному числу λ_ζ с элементарным делителем кратности $\kappa \geq 2$*;

4) *обыкновенная дифференциальная система* $\dfrac{dx}{dt_\zeta} = A_\zeta(t)\,x$, *индуцированная системой уравнений в полных дифференциалах* (1)∪(2), *не имеет первых интегралов вида*

$$F_{jl}\colon (t,x) \to \mathcal{A}_j \Psi_l(t,x) \quad \forall (t,x) \in \Lambda, \quad l = 1,\ldots,\kappa-1, \quad j = 1,\ldots,m, \quad j \neq \zeta, \tag{9}$$

где функции $\Psi_l\colon \Lambda \to \mathbf{C}$ *на области* $\Lambda \subset \{(t,x)\colon\, t \in \mathcal{T},\, \nu^0 \mathrm{g}(t)x \neq 0\}$ *находятся из системы*

$$\nu^l \mathrm{g}(t)x = \sum_{\tau=1}^{l} \binom{l-1}{\tau-1} \Psi_\tau(t,x)\, \nu^{l-\tau} \mathrm{g}(t)x \quad \forall (t,x) \in \Lambda, \quad l = 1,\ldots,\kappa-1. \tag{10}$$

Тогда производные Ли в силу системы уравнений в полных дифференциалах (1)∪(2) *равны*

$$\begin{gathered} \mathcal{A}_\zeta \Psi_1(t,x) = 1 \quad \forall (t,x) \in \Lambda, \qquad \mathcal{A}_\zeta \Psi_l(t,x) = 0 \quad \forall (t,x) \in \Lambda, \quad l = 2,\ldots,\kappa-1, \\ \mathcal{A}_j \Psi_l(t,x) = \mu_{jl} = \mathrm{const} \quad \forall (t,x) \in \Lambda, \quad l = 1,\ldots,\kappa-1, \quad j = 1,\ldots,m, \quad j \neq \zeta. \end{gathered} \tag{11}$$

Доказательство. Функциональную систему (10) всегда можно разрешить относительно Ψ_τ, так как ее определитель равен $(\nu^0 \mathrm{g}(t)x)^{\kappa-1}$ и отличен от нуля на области Λ. Докажем, что для функций Ψ_l справедлива система тождеств (11).

Пусть $j=\zeta$. Тогда справедливость тождеств (11) при $\kappa=2$ и $\kappa=3$ проверяются непосредственно на основании системы тождеств (8). Доказательство для случая $\kappa>3$ проведем методом математической индукции. Предположим, что тождества (11) имеют место при $\kappa=\varepsilon$. Используя систему (8) и тождества (10) при $\kappa=\varepsilon+1$ и $\kappa=\varepsilon$ получаем:

$$\mathcal{A}_\zeta\, \nu^\varepsilon \mathrm{g}(t)x = \lambda_\zeta \sum_{\tau=1}^{\varepsilon} \binom{\varepsilon-1}{\tau-1} \Psi_\tau(t,x)\, \nu^{\varepsilon-\tau}\mathrm{g}(t)x \,+\, (\varepsilon-1)\sum_{\tau=1}^{\varepsilon-1}\binom{\varepsilon-2}{\tau-1}\Psi_\tau(t,x)\,\nu^{\varepsilon-\tau-1}\mathrm{g}(t)x \,+$$

$$+\, \nu^{\varepsilon-1}\mathrm{g}(t)x \,+\, \nu^0\mathrm{g}(t)x\; \mathcal{A}_\zeta\, \Psi_\varepsilon(t,x) \quad \forall (t,x)\in\Lambda.$$

Отсюда, в силу системы (10) при $l=\varepsilon-1$ и $l=\varepsilon$, тождеств (8) при $l=\varepsilon$ и того, что функция $(t,x)\to \nu^0\mathrm{g}(t)x$ не обращается в нуль на области Λ, имеем:

$$\mathcal{A}_\zeta\, \Psi_\varepsilon(t,x) = 0 \quad \forall (t,x)\in\Lambda.$$

Поэтому, при $\kappa=\varepsilon+1$ тождества (11) верны, а значит, тождества (11) выполняются при любом натуральном $\kappa\geq 2$.

Учитывая, что у вполне разрешимой системы в полных дифференциалах (1) линейные дифференциальные операторы $\mathcal{A}_j,\ j=1,\ldots,m$, перестановочны (условия Фробениуса (2)), а обыкновенная дифференциальная система $\dfrac{dx}{dt_\zeta}=A_\zeta(t)\,x$ не имеет первых интегралов вида (9), получаем, что тождества (11) имеют место и при $j\neq\zeta$. Лемма доказана.

3. Первые интегралы

Построение первых интегралов приводимой вполне разрешимой линейной однородной дифференциальной системы (1) осуществляется на основании теорем 1 – 3.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия леммы* 1. *Тогда первым интегралом приводимой системы уравнений в полных дифференциалах* (1) *будет скалярная функция*

$$F\colon (t,x)\to\ \nu\,\mathrm{g}(t)x\,\exp\biggl(-\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\,t_j\biggr) \quad \forall (t,x)\in\mathcal{T}\times\mathbf{R}^n.$$

Доказательство. С учетом леммы 1 получаем, что

$$\mathcal{A}_j\,F(t,x) = \exp\biggl(-\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\,t_j\biggr)\mathcal{A}_j\,\nu\,\mathrm{g}(t)x \,+\, \nu\,\mathrm{g}(t)x\;\mathcal{A}_j\exp\biggl(-\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\,t_j\biggr) =$$

$$= \lambda_j\,\nu\,\mathrm{g}(t)x\,\exp\biggl(-\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\,t_j\biggr) \,+\, \nu\,\mathrm{g}(t)x\,\partial_{t_j}\exp\biggl(-\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\,t_j\biggr) = 0 \quad \forall (t,x)\in\mathcal{T}\times\mathbf{R}^n.$$

Следовательно, функция $F\colon \mathcal{T}\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ является первым интегралом приводимой линейной однородной дифференциальной системы (1). Теорема доказана.

Пример 1. Нестационарная дифференциальная система второго порядка [20, с. 155]

$$\frac{dx_1}{dt} = (t^2+t+2)\,x_1-(t^3+t^2+t-1)\,x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = (t+1)\,x_1-(t^2+t-1)\,x_2 \tag{12}$$

является приводимой относительно полиномиальной группы[1] $P(2)$ с матрицей преобразо-

[1] $P(n)$ — мультипликативная группа полиномиальных матриц n-го порядка с ненулевыми постоянными определителями.

вания $\mathrm{g}(t) = \begin{pmatrix} -t & 1+t^2 \\ 1 & -t \end{pmatrix}$ $\forall t \in \mathbf{R}$ к стационарной системе $\dfrac{dy_1}{dt} = y_1, \quad \dfrac{dy_2}{dt} = 2x_2.$

По теореме 1, на основании собственных векторов $\nu^1 = (1,0)$ и $\nu^2 = (0,1)$ матрицы $C = \mathrm{diag}(1,2)$, которым соответствуют собственные числа $\lambda^1 = 1$ и $\lambda^2 = 2$, строим базис первых интегралов на пространстве $\mathbf{R}^3$ приводимой системы (12):

$$F_1\colon (t, x_1, x_2) \to (-tx_1 + (1+t^2)x_2)e^{-t}, \quad F_2\colon (t, x_1, x_2) \to (x_1 - tx_2)e^{-2t} \quad \forall (t, x_1, x_2) \in \mathbf{R}^3.$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия леммы 2. Тогда первыми интегралами приводимой системы уравнений в полных дифференциалах* (1) *будут скалярные функции*

$$F_1\colon (t,x) \to \Big((\overset{*}{\nu}\,\mathrm{g}(t)x)^2 + (\widetilde{\nu}\,\mathrm{g}(t)x)^2\Big)\exp\bigg(-2\sum_{j=1}^{m} \overset{*}{\lambda}_j t_j\bigg) \quad \forall (t,x) \in \mathcal{T} \times \mathbf{R}^n$$

и

$$F_2\colon (t,x) \to \operatorname{arctg}\frac{\widetilde{\nu}\,\mathrm{g}(t)x}{\overset{*}{\nu}\,\mathrm{g}(t)x} - \sum_{j=1}^{m} \widetilde{\lambda}_j t_j \quad \forall (t,x) \in \Lambda, \quad \Lambda \subset \big\{(t,x)\colon t \in \mathcal{T},\ \overset{*}{\nu}\,\mathrm{g}(t)x \neq 0\big\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая лемму 2, относительно функций F_1 и F_2 получаем:

$$\mathcal{A}_j F_1(t,x) = \exp\bigg(-2\sum_{j=1}^{m} \overset{*}{\lambda}_j t_j\bigg)\mathcal{A}_j\Big((\overset{*}{\nu}\,\mathrm{g}(t)x)^2 + (\widetilde{\nu}\,\mathrm{g}(t)x)^2\Big) +$$

$$+ \Big((\overset{*}{\nu}\,\mathrm{g}(t)x)^2 + (\widetilde{\nu}\,\mathrm{g}(t)x)^2\Big)\mathcal{A}_j \exp\bigg(-2\sum_{j=1}^{m} \overset{*}{\lambda}_j t_j\bigg) = 2\overset{*}{\lambda}_j F_1(t,x) +$$

$$+ \big((\overset{*}{\nu}\,\mathrm{g}(t)x)^2 + (\widetilde{\nu}\,\mathrm{g}(t)x)^2\big)\,\partial_{t_j}\exp\bigg(-2\sum_{j=1}^{m} \overset{*}{\lambda}_j t_j\bigg) = 0 \quad \forall (t,x) \in \mathcal{T} \times \mathbf{R}^n, \quad j = 1, \ldots, m;$$

$$\mathcal{A}_j F_2(t,x) = \mathcal{A}_j \operatorname{arctg}\frac{\widetilde{\nu}\,\mathrm{g}(t)x}{\overset{*}{\nu}\,\mathrm{g}(t)x} - \mathcal{A}_j \sum_{j=1}^{m} \widetilde{\lambda}_j t_j = \widetilde{\lambda}_j - \partial_{t_j}\sum_{j=1}^{m} \widetilde{\lambda}_j t_j = 0 \quad \forall (t,x) \in \Lambda, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Следовательно, функции $F_1\colon \mathcal{T} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ и $F_2\colon \Lambda \to \mathbf{R}$ являются первыми интегралами приводимой дифференциальной системы (1). Т е о р е м а д о к а з а н а.

Пример 2. Нестационарная дифференциальная система [21, с. 125 – 126]

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -x_2 + \sqrt{2}\cos 2t\, x_3 + \sqrt{2}\sin 2t\, x_4, & \frac{dx_2}{dt} &= x_1 + \sqrt{2}\sin 2t\, x_3 - \sqrt{2}\cos 2t\, x_4, \\ \frac{dx_3}{dt} &= -\sqrt{2}\sin 2t\, x_1 + \sqrt{2}\cos 2t\, x_2 - x_4, & \frac{dx_4}{dt} &= \sqrt{2}\cos 2t\, x_1 + \sqrt{2}\sin 2t\, x_2 + x_3 \end{aligned} \tag{13}$$

является приводимой относительно группы[2] $P_4(2\pi)$, так как существует 2π-периодическое невырожненное преобразование

$$y_1 = \cos t\, x_1 + \sin t\, x_2,\ y_2 = -\sin t\, x_1 + \cos t\, x_2,\ y_3 = \cos t\, x_3 + \sin t\, x_4,\ y_4 = -\sin t\, x_3 + \cos t\, x_4,$$

приводящее обыкновенную дифференциальную систему (13) к системе

[2] $P_n(\omega)$ — мультипликативная группа ω-периодических обратимых непрерывно дифференцируемых матриц n-го порядка. При этом $P_n(\omega)$ есть подгруппа группы Ляпунова $L(n)$.

$L(n)$ — мультипликативная группа обратимых непрерывно дифференцируемых на $\mathcal{T} = (0; +\infty)$ матриц n-го порядка, ограниченных на луче $\mathcal{T}$ вместе со своими обратными матрицами.

$$\frac{dy_1}{dt}=\sqrt{2}\,y_3,\qquad \frac{dy_2}{dt}=-\sqrt{2}\,y_4,\qquad \frac{dy_3}{dt}=\sqrt{2}\,y_2,\qquad \frac{dy_4}{dt}=\sqrt{2}\,y_1.$$

На основании собственных чисел $\lambda^1=1+i,\ \lambda^2=-1+i$ и соответствующих им собственных векторов $\nu^1=(1+i,1-i,\sqrt{2},\sqrt{2}\,i),\ \nu^2=(1+i,-1+i,-\sqrt{2}\,i,-\sqrt{2}\,)$ матрицы C по теореме 2 строим интегральный базис приводимой системы (13):

$$F_1\colon (t,x)\to\Big(\big((\cos t-\sin t)\,x_1+(\cos t+\sin t)\,x_2+\sqrt{2}\cos t\,x_3+\sqrt{2}\sin t\,x_4\big)^2+$$

$$+\big((\cos t+\sin t)\,x_1+(\sin t-\cos t)\,x_2-\sqrt{2}\sin t\,x_3+\sqrt{2}\cos t\,x_4\big)^2\Big)e^{-2t}\quad\forall (t,x)\in\mathbf{R}^5,$$

$$F_2\colon (t,x)\to\ \operatorname{arctg}\frac{(\cos t+\sin t)x_1+(\sin t-\cos t)x_2-\sqrt{2}\sin tx_3+\sqrt{2}\cos tx_4}{(\cos t-\sin t)x_1+(\cos t+\sin t)x_2+\sqrt{2}\cos tx_3+\sqrt{2}\sin tx_4}-t\quad\forall (t,x)\in\Lambda,$$

$$F_3\colon (t,x)\to\Big(\big((\cos t+\sin t)\,x_1+(\sin t-\cos t)\,x_2+\sqrt{2}\sin t\,x_3-\sqrt{2}\cos t\,x_4\big)^2+$$

$$+\big((\cos t-\sin t)\,x_1+(\cos t+\sin t)\,x_2-\sqrt{2}\cos t\,x_3-\sqrt{2}\sin t\,x_4\big)^2\Big)e^{2t}\quad\forall (t,x)\in\mathbf{R}^5,$$

$$F_4\colon (t,x)\to\ \operatorname{arctg}\frac{(\cos t-\sin t)x_1+(\cos t+\sin t)x_2-\sqrt{2}\cos tx_3-\sqrt{2}\sin tx_4}{(\cos t+\sin t)x_1+(\sin t-\cos t)x_2+\sqrt{2}\sin tx_3-\sqrt{2}\cos tx_4}-t\quad\forall (t,x)\in\Lambda,$$

где Λ — любая область из $\{(t,x)\colon (\cos t-\sin t)x_1+(\cos t+\sin t)x_2+\sqrt{2}\cos tx_3+\sqrt{2}\sin tx_4\neq 0,$ $(\cos t+\sin t)x_1+(\sin t-\cos t)x_2+\sqrt{2}\sin tx_3-\sqrt{2}\cos tx_4\neq 0\}$ пространства $\mathbf{R}^5$.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия леммы* 3. *Тогда функционально независимыми первыми интегралами приводимой вполне разрешимой системы* (1) *будут функции*

$$F_l\colon (t,x)\to\ \Psi_l(t,x)\ -\ \sum_{j=1}^{m}\mu_{jl}\,t_j\quad\forall (t,x)\in\Lambda,\quad l=1,\ldots,\varkappa-1,\tag{14}$$

где функции $\Psi_l\colon\Lambda\to\mathbf{C},\ l=1,\ldots,\varkappa-1,$ *находятся из системы* (10)*, а числа*

$$\mu_{jl}=\mathcal{A}_j\Psi_l(t,x),\quad l=1,\ldots,\varkappa-1,\quad j=1,\ldots,m.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. На основании леммы 3 получаем, что производные Ли

$$\mathcal{A}_j\,F_l(t,x)=\ \mathcal{A}_j\,\Psi_l(t,x)\ -\ \partial_{t_j}\sum_{j=1}^{m}\mu_{jl}\,t_j\ =\ 0\quad\forall (t,x)\in\Lambda,\quad j=1,\ldots,m,\quad l=1,\ldots,\varkappa-1.$$

Следовательно, функции (14) являются первыми интегралами приводимой вполне разрешимой системы уравнений в полных дифференциалах (1), причем функционально независимыми на области Λ, учитывая способ их построения. Т е о р е м а д о к а з а н а.

Пример 3. Линейные гамильтоновые системы второго порядка, приводимые относительно ортогональной группы преобразований[3], имеют вид [20, с. 142 – 143]

$$\frac{dx}{dt}=IA(t)x,\quad x\in\mathbf{R}^2,\quad A\colon t\to\begin{pmatrix}\psi(t)+\beta(t) & \alpha(t)\\ \alpha(t) & \psi(t)-\beta(t)\end{pmatrix}\quad\forall t\in\mathcal{T}\subset\mathbf{R},\tag{15}$$

[3] $O(n)$ — мультипликативная группа непрерывно дифференцируемых на открытом числовом промежутке $\mathcal{T}\subset\mathbf{R}$ ортогональных матриц n-го порядка. При $\mathcal{T}=(0;+\infty)$ ортогональная группа преобразований $O(n)$ является погруппой группы Ляпунова $L(n)$.

где симплектическая единица $I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, непрерывно дифференцируемые функции

$$\alpha\colon t \to a\cos 2\varphi(t) - b\sin 2\varphi(t), \quad \beta\colon t \to a\sin 2\varphi(t) + b\cos 2\varphi(t), \quad \psi\colon t \to \varphi'(t) + c \ \ \forall t \in \mathcal{T},$$

а a, b и c — некоторые вещественные числа.

Система (15) с помощью ортогонального преобразования $y_1 = \cos\varphi(t)\, x_1 - \sin\varphi(t)\, x_2$, $y_2 = \sin\varphi(t)\, x_1 + \cos\varphi(t)\, x_2$ приводима к стационарной линейной гамильтоновой системе $\dfrac{dy}{dt} = IB\,y$ с постоянной матрицей $B = \begin{pmatrix} c+b & a \\ a & c-b \end{pmatrix}$.

Первые интегралы приводимой линейной гамильтоновой системы (15) определяются в зависимости от знака числа $D = a^2 + b^2 - c^2$.

Если $D = 0$, то используя собственный вектор $\nu^0 = (c+b, a)$ и первый присоединенный вектор $\nu^1 = (c+b, a-1)$, которые соответствуют двукратному собственному числу $\lambda^1 = 0$, по теоремам 1 и 3, строим интегральный базис приводимой системы (15)

$$F_1\colon (t,x) \to \big((c+b)\cos\varphi(t) + a\sin\varphi(t)\big)\, x_1 + \big(a\cos\varphi(t) - (c+b)\sin\varphi(t)\big)\, x_2\,,$$

$$F_2\colon (t,x) \to \frac{\big((c+b)\cos\varphi(t) + (a-1)\sin\varphi(t)\big)x_1 + \big((a-1)\cos\varphi(t) - (c+b)\sin\varphi(t)\big)x_2}{\big((c+b)\cos\varphi(t) + a\sin\varphi(t)\big)\, x_1 + \big(a\cos\varphi(t) - (c+b)\sin\varphi(t)\big)\, x_2} - t$$

$$\forall (t,x) \in \Lambda \subset \big\{(t,x)\colon t \in \mathcal{T},\ \big((c+b)\cos\varphi(t) + a\sin\varphi(t)\big)x_1 + \big(a\cos\varphi(t) - (c+b)\sin\varphi(t)\big)x_2 \neq 0\big\}.$$

Если $D > 0$, то по собственным векторам $\nu^k = (c+b, a-\lambda^k)$, $k = 1, 2$, которые соответствуют собственным числам $\lambda^1 = \sqrt{D}$, $\lambda^2 = -\sqrt{D}$, строим (теорема 1) функционально независимые первые интегралы приводимой системы (15)

$$F_k\colon (t,x) \to \Big(\big((c+b)\cos\varphi(t) + (a-\lambda^k)\sin\varphi(t)\big)x_1 + \big((a-\lambda^k)\cos\varphi(t) - (c+b)\sin\varphi(t)\big)x_2\Big)e^{-\lambda^k t}$$

$$\forall (t,x) \in \mathcal{T} \times \mathbf{R}^2, \quad k = 1, 2.$$

Если $D < 0$, то по собственным векторам $\nu^k = (c+b, a-\lambda_k)$, $k = 1, 2$, которые соответствуют комплексным собственным числам $\lambda^1 = \sqrt{-D}\, i$, $\lambda^2 = -\sqrt{-D}\, i$, по теореме 2, строим базис первых интегралов приводимой системы (15)

$$F_1\colon (t,x) \to \Big(\big((c+b)\cos\varphi(t) + a\sin\varphi(t)\big)\, x_1 + \big(a\cos\varphi(t) - (c+b)\sin\varphi(t)\big)\, x_2\Big)^2 -$$

$$- D\big(\sin\varphi(t)\, x_1 + \cos\varphi(t)\, x_2\big)^2 \quad \forall (t,x) \in \mathcal{T} \times \mathbf{R}^2,$$

$$F_2\colon (t,x) \to \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-D}\,\big(\sin\varphi(t)\, x_1 + \cos\varphi(t)\, x_2\big)}{\big((c+b)\cos\varphi(t) + a\sin\varphi(t)\big)x_1 + \big(a\cos\varphi(t) - (c+b)\sin\varphi(t)\big)x_2} + \sqrt{-D}\, t$$

$$\forall (t,x) \in \Lambda \subset \big\{(t,x)\colon t \in \mathcal{T},\ \big((c+b)\cos\varphi(t) + a\sin\varphi(t)\big)x_1 + \big(a\cos\varphi(t) - (c+b)\sin\varphi(t)\big)x_2 \neq 0\big\}.$$

Доказательство леммы 3 и теоремы 3 предусматривает как случай вещественного, так и существенно комплексного собственного числа λ_ζ матрицы C_ζ. При комплексном λ_ζ комплекснозначные первые интегралы (15) распадаются на вещественные первые интегралы

$$F_l^1\colon (t,x) \to \operatorname{Re} F_l(t,x), \quad F_l^2\colon (t,x) \to \operatorname{Im} F_l(t,x) \quad \forall (t,x) \in \Lambda, \quad l = 1, \ldots, \kappa - 1,$$

где Λ — любая область из множества $\big\{(t,x)\colon t \in \mathcal{T},\ \big(\overset{*}{\nu}{}^0 \mathrm{g}(t)x\big)^2 + \big(\widetilde{\nu}^0 \mathrm{g}(t)x\big)^2 \neq 0\big\}$.

4. Заключение

В работе для приводимой относительно различных групп преобразований G вполне разрешимой линейной однородной системы уравнений в полных дифференциалах (1)∪(2) разработан спектральный метод построения базиса первых интегралов (теоремы 1 – 3). Построение вещественных первых интегралов основано на существовании у вполне разрешимой приводимой системы (1) линейного вещественного частного интеграла (лемма 1), комплекснозначного частного интеграла (лемма 2), кратных частных интегралов (лемма 3). В зависимости от кратности элементарных делителей постоянных перестановочных матриц $B_j,\ j = 1, \ldots, m$, приведенной системы уравнений в полных дифференциалах (3), указаны аналитические виды первых интегралов: вещественный случай (теорема 1), комплексный случай (теорема 2) и кратный случай (теорема 3). При $j = 1$ (обыкновенная дифференциальная система) приведены примеры, которые иллюстрируют предложенный метод.

Полученные результаты могут быть применены в качественной теории обыкновенных и многомерных дифференциальных уравнений.

Литература

1. Гайшун И.В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. М.: Едиториал УРСС, 2004. 272 с.
2. Богданов Ю.С. Асимптотические характеристики решений линейных дифференциальных систем // Тр. IV Всесоюзн. матем. съезда. 1964. С. 424–432.
3. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1950. 472 с.
4. Еругин Н.П. Приводимые системы // Тр. матем. ин-та им. В.А. Стеклова. 1946. Т. 13. С. 1–96.
5. Амелькин В.В. Автономные и линейные многомерные дифференциальные уравнения. М.: Едиториал УРСС, 2003. 144 с.
6. Darboux G. Mémoire sur les équations differentielles algebriques du premier ordre et du premier degré // Bulletin des Sciences Mathématiques. 1878. Vol. 2. P. 60 – 96, 123 – 144, 151 – 200.
7. Горбузов В.Н. Интегралы систем уравнений в полных дифференциалах. Гродно: ГрГУ, 2005. 273 с.
8. Козлов В.В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во Удмуртского ун-та, 1995. 432 с.
9. Goriely A. Integrability and nonintegrability of dynamical systems. World Scientific: Advanced series on nonlinear dynamics, 2001. Vol. 19. 436 p.
10. Горбузов В.Н., Проневич А.Ф. Построение интегралов линейной дифференциальной системы // Веснiк Гродзенскага дзяржаўнага ун-та. Сер. 2. 2003. № 2(22). С. 50 – 60.
11. Gorbuzov V.N., Pranevich A.F. First integrals of ordinary linear differential systems // Mathematics.Dynamical Systems (1201.4141v1 [math.DS], Cornell Univ., Ithaca, New York). 2012. P. 1 – 75.
12. Gorbuzov V.N., Pranevich A.F. First integrals of reducible ordinary differential systems // Веснiк Гродзенскага дзяржаўнага ун-та. Сер. 2. 2015. № 3(199). С. 6 – 17.
13. Горбузов В.Н., Проневич А.Ф. Интегралы R-линейных систем в полных дифференциалах // Доклады НАН Беларуси. 2004. Т. 48, № 1. С. 49 – 52.

14. Gorbuzov V.N., Pranevich A.F. First integrals of linear differential systems // Mathematics.Dynamical Systems (0806.4155v1[math.CA], Cornell Univ., Ithaca, New York). 2008. P. 1 – 37.

15. Проневич А.Ф. R-дифференцируемые интегралы систем в полных дифференциалах. Saarbruchen: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011. 104 с.

16. Горбузов В.Н., Проневич А.Ф. Интегралы многомерной дифференциальной системы Лаппо-Данилевского // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2015. № 1. С. 1 – 24.

17. Проневич А.Ф., Павлючик П.Б. Об интегралах линейных неавтономных многомерных дифференциальных систем, интегрируемых в замкнутой форме // Проблемы физики, математики и техники. 2015. № 2(23). С. 65 – 71.

18. Горбузов В.Н., Проневич А.Ф. Спектральный метод построения интегрального базиса якобиевой системы в частных производных // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2001. № 3. С. 17 – 45.

19. Проневич А.Ф. Интегралы якобиевых систем уравнений в частных производных. Saarbruchen: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012. 97 с.

20. Гайшун И.В. Введение в теорию линейных нестационарных систем. М.: Едиториал УРСС, 2004. 408 с.

21. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1964. 477 с.

MSC 34A30, 58A17

First integrals of reducible completely solvable systems of equations in total differentials

A.F. Pranevich

Yanka Kupala State University of Grodno

Abstract: We consider reducible (with respect to various transformation groups) completely solvable system of linear homogeneous equations in total differentials. The spectral method of building first integrals for this differential system is elaborated. The method is based on the existence of linear partial integral (real, complex-valued or multiple) for reducible differential system. This partial integral is constructed by the common eigenvectors and eigenvalues of the matrices of reducible differential system. In addition, in this article some examples are given to illustrate the obtained results.

Keywords: reducible system of equations in total differentials, condition of complete solvability, partial integral, first integral.

References

1. Gaishun I.V. Vpolne razreshimye mnogomernye differencialnye uravneniya [Completely solvable multidimensional differential equations]. Moscow, Publishing of the "Editorial URSS", 2004. 272 p.

2. Bogdanov Yu.S. Asimptoticheskie harakteristiki reshenij linejnyh differencialnyh sistem [Asymptotic characteristics of solutions of linear differential systems] // Trudy IV Vsesoyuznogo matematicheskogo sezda [Papers of the 4th all-union mathematical conference]. 1964. V. 2. P. 424 – 432.

3. Lyapunov A.M. Obshchaya zadacha ob ustojchivosti dvizheniya [The general problem of the stability of motion]. Moscow-Leningrad, Publishing of the "Gostekhizdat", 1950. 472 p.

4. Erugin N.P. Privodimye sistemy [Reducible systems] // Trudy matematicheskogo instituta im. V.A. Steklova [Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics]. 1946. V. 13. P. 1 – 96.

5. Amel'kin V.V. Avtonomnye i linejnye mnogomernye differencialnye uravneniya [Autonomous and linear multidimensional differential equations]. Moscow, Publishing of the "Editorial URSS", 2003. 144 p.

6. Darboux G. Mémoire sur les équations differentielles algebriques du premier ordre et du premier degré // Bulletin des Sciences Mathématiques. 1878. 2. 60–96, 123–144, 151–200.

7. Gorbuzov V.N. Integraly sistem uravnenij v polnyh differencialah [Integrals of systems of equations in total differentials]. Grodno, Publishing of the "Grodno State University", 2005. 273 p.

8. Kozlov V.V. Simmetrii, topologiya i rezonansy v gamiltonovoj mekhanike [Symmetries, topology and resonances in Hamiltonian mechanics]. Izhevsk, Publishing of the "Udmurt State University", 1995. 432 p.

9. Goriely A. Integrability and nonintegrability of dynamical systems. World Scientific: Advanced series on nonlinear dynamics, 2001. Vol. 19. 436 p.

10. Gorbuzov V.N., Pranevich A.F. Postroenie integralov linejnoj differencialnoj sistemy [Building of integrals of linear differential system] // Vestnik Grodnenskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. 2. [Vestnik of the Yanka Kupala Grodno State University. Ser. 2.]. 2003. V. 2(22). P. 50 – 60.

11. Gorbuzov V.N., Pranevich A.F. First integrals of ordinary linear differential systems // Mathematics.Dynamical Systems (1201.4141v1 [math.DS], Cornell Univ., Ithaca, New York). 2012. P. 1 – 75.

12. Gorbuzov V.N., Pranevich A.F. First integrals of reducible ordinary differential systems // Vestnik Grodnenskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. 2. [Vestnik of the Yanka Kupala Grodno State University. Ser. 2.]. 2015. V. 3(199). P. 6 – 17.

13. Gorbuzov V.N., Pranevich A.F. Integraly R-linejnyh sistem v polnyh differencialah [Integrals of R-linear systems of exact differentials] // Doklady NAN Belarusi [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus]. 2004. V. 1. P. 49 – 52.

14. Gorbuzov V.N., Pranevich A.F. First integrals of linear differential systems // Mathematics.Dynamical Systems (0806.4155v1[math.CA], Cornell Univ., Ithaca, New York). 2008. P. 1 – 37.

15. Pranevich A.F. R-differenciruemye integraly sistem v polnyh differencialah [R-differentiable integrals for systems of equations in total differentials]. Saarbruchen, LAP LAMBERT Academic Publ., 2011. 104 p.

16. Gorbuzov V.N., Pranevich A.F. Integraly mnogomernoj differencialnoj sistemy Lappo-Danilevskogo [Integrals of Lappo-Danilevsky multidimensional differential system] // Differencialnye uravneniya i processy upravleniya [Differential equations and control processes]. 2015. No. 1. P. 1 – 24.

17. Pranevich A.F., Pauliuchyk P.B. Ob integralah linejnyh neavtonomnyh mnogomernyh differencialnyh sistem integriruemyh v zamknutoj forme [About integrals of linear nonautonomous multidimensional differential systems which are integrated in closed form] // Problemy fiziki matematiki i tekhniki [Problems of Physics, Mathematics and Technics]. 2015. No. 2(23). P. 65 – 71.

18. Gorbuzov V.N., Pranevich A.F. Spektpalnyj metod postpoeniya integpalnogo bazisa yakobievoj sistemy v chastnyh ppoizvodnyh [Spectral method of construction of integral basis for jacobian systems in partial equations] // Differencialnye uravneniya i processy upravleniya [Differential equations and control processes]. 2001. No. 3. P. 17 – 45.

19. Pranevich A.F. Integraly yakobievyh sistem uravnenij v chastnyh proizvodnyh [Integrals of jacobian systems in partial equations]. Saarbruchen: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012. 97 p.

20. Gaishun I.V. Vvedenie v teoriyu linejnyh nestacionarnyh sistem [Introduction to the theory of linear non-stationary systems]. Moscow, Publishing of the "Editorial URSS", 2004. 408 p.

21. Cesari L. Asimptoticheskoe povedenie i ustojchivost obyknovennyh differencialnyh uravnenij [Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations]. Moscow, Publishing of the "Mir", 1964. 477 p.