XIII Международная научная конференция "Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании", Саранск, 12-16 июля 2017.
XIII International scientific conference "Differential equations and their applications in mathematical modeling", Saransk, July 12-16, 2017.

УДК 519.6:517.962

Точность разностных схем для нелинейных эллиптических уравнений с неограниченной нелинейностью

Ф.В. Лубышев [1], М.Э. Файрузов [1], А.Р. Манапова [1]
Башкирский государственный университет[1]

Аннотация: Рассматривается первая краевая задача для нелинейных эллиптических уравнений со смешанными производными и неограниченной нелинейностью. Строится и исследуется разностная схема решения данного класса задач и реализующий ее итерационный процесс. Проведено строгое исследование сходимости итерационного процесса, с помощью которого доказаны существование и единственность решения нелинейной разностной схемы, аппроксимирующей исходную дифференциальную задачу. Установлены согласованные с гладкостью искомого решения оценки скорости сходимости разностных схем в сеточной норме $W^2_{2,0}(\omega)$, аппроксимирующих нелинейное уравнение с неограниченной нелинейностью.

Ключевые слова: нелинейные эллиптические уравнения, разностный метод решения, точность разностных аппроксимаций, итерационный процесс.

Одним из основных вопросов теории разностных схем для уравнений математической физики (УМФ) является вопрос о точности (см., например, [1]- [2]). Для случая, когда решение исходной дифференциальной задачи достаточно гладкое, в теории метода сеток проведено достаточно полное исследование сходимости разностных схем и получены оценки точности в соответствующих метриках [1]- [2]. При понижении требований к дифференциальным свойствам искомого решения анализ сходимости разностной схемы существенно усложняется [3]- [6].

В работах [3], [4] предложен новый подход получения таких оценок точности метода сеток для УМФ с обобщенными решениями, в которых порядок скорости сходимости согласован с гладкостью решения исходной дифференциальной задачи:

$$\|y(x) - u(x)\|_{W_2^s(\omega)} \leq M|h|^{m-s}\|u\|_{W_2^m(\Omega)}, \qquad s < m,$$

где $u \in W_2^m(\Omega)$ – решение дифференциальной задачи, а $y = y(x)$, $x \in \overline{\omega}$ – решение аппроксимирующей задачи, $\|\cdot\|_{W_2^s(\omega)}$ и $\|\cdot\|_{W_2^m(\Omega)}$ – соответственно, нормы пространств Соболева дискретного и непрерывного аргументов.

В настоящее время для широкого класса линейных задач установлены согласованные оценки точности разностных схем. Но, как правило, большинство реальных задач нелинейны, причем природа нелинейностей различна. Для квазилинейных эллиптических уравнений с обобщенными решениями в случае наличия ограниченных нелинейностей согласованные оценки точности разностных схем можно найти, например, в [3], [4] (см. также цитируемую там литературу).

При исследовании фундаментальных свойств разностных схем (устойчивость, сходимость) для нелинейных уравнений, как правило предполагалось, что коэффициенты уравнений, зависящие от точного решения u удовлетворяют требуемым свойствам (положительная определенность, ограниченность производных по u) для всех значений решения $u \in \mathbb{R}$ (ограниченная нелинейность). Однако такие требования, предъявляемые к коэффициентам дифференциальных уравнений для любых значений решения $u \in \mathbb{R}$, естественно, сильно сужают класс допустимых входных данных задачи. Если же потребовать выполнения данных свойств коэффициентов лишь в области значений точного решения u либо в ее малой окрестности (неограниченная нелинейность [5], [6]), то анализ точности разностных схем сильно усложняется, так как задача для погрешности метода является уже нелинейной. Кроме того, в этом случае необходимо показывать принадлежность сеточного решения области (либо ее малой окрестности) значений точного решения, что в свою очередь требует обязательного исследования скорости сходимости разностной схемы в норме $C(\bar{\omega})$ [5], [6].

Теория разностных схем для нелинейных УМФ с неограниченной нелинейностью является одной из наиболее сложных и актуальных областей вычислительной математики [5], [6]. Исследования сходимости разностных схем для данного класса задач показали, что даже на гладких решениях эти исследования представляют довольно сложную техническую проблему. Проблема сходимости и точности разностных схем менее изучена для нелинейных УМФ с обобщенными решениями и неограниченной нелинейностью.

Настоящая работа посвящена построению и исследованию сходимости и точности разностных схем для нелинейных уравнений математической физики (УМФ) эллиптического типа со смешанными производными и неограниченной нелинейностью. Установлены априорные согласованные оценки скорости сходимости разностных схем в сеточной норме $W^2_{2,0}(\omega)$, аппроксимирующих нелинейную задачу с неограниченной нелинейностью. Доказательство сходимости разностных схем проводится в предположении, что само точное решение краевой задачи существует в классе $W^m_{2,0}(\Omega)$, $3 < m \leq 4$ и принадлежит некоторой ограниченной области D_u и только в этой области функции, входящие в уравнение, удовлетворяют требуемым свойствам. Так что получена шкала априорных оценок скорости сходимости в сеточной $W^2_{2,0}(\omega)$-норме для разностного решения, а условия, налагаемые на коэффициенты уравнения, выполнены в настоящей работе лишь в некоторой окрестности значений точного решения исходной задачи, что говорит как о наличии нелинейностей неограниченного роста, так и сильно расширяет класс допустимых функций, удовлетворяющих, например, условию равномерной эллиптичности на решениях уравнения. В случае неограниченной нелинейности в настоящей работе доказаны существование и единственность решения нелинейной разностной схемы. Для доказательства существования и единственности решения исследуемой нелинейной разностной задачи, аппроксимирующей исходную дифференциальную задачу, используется итерационный процесс, который можно рассматривать и как эффективный метод реализации этой нелинейной разностной схемы. Проводится строгое исследование сходимости итерационного метода для нелинейной сеточной задачи, аппроксимирующей исходную нелинейную задачу без каких-либо предположений о свойствах нелинейной разностной схемы. Заметим, что изучение итерационных методов для реализации нелинейных разностных схем представляет самостоятельный интерес.

Настоящая работа дополняет и развивает результаты, установленные в работах [5], [6] для одномерных аналогов квазилинейных уравнений эллиптического типа с неограниченной нелинейностью.

Результаты, полученные в настоящей работе, будут существенно использованы в дальнейшем при решении проблем, связанных с разработкой и исследованием разностных аппроксимаций задач оптимального управления для систем, описываемых нелинейными УМФ с неограниченной нелинейностью (см. по этому вопросу, например, [7]- [9]).

Литература

1. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.

2. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Вычислительная теплопередача. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009.

3. Самарский А. А., Лазаров Р. Д., Макаров В. Л. Разностные схемы для

дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. М.: Высшая школа, 1989.

4. Самарский А. А. Исследование точности разностных схем для задач с обобщенными решениями // Актуальные проблемы математической физики и вычислительной математики. 1984. С. 174-183.

5. Матус П. П., Москальков М. Н., Щеглик В. С. Согласованные оценки точности метода сеток для нелинейного уравнения второго порядка с обобщенными решениями // Дифференциальные уравнения. 1995. Т.31, № 7. С. 1249-1256.

6. Щеглик В. С. Анализ разностной схемы, аппроксимирующей третью краевую задачу для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1997. Т.37, № 8. С. 951-957.

7. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.

8. Лубышев Ф. В. Разностные аппроксимации задач оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных. Уфа: БашГУ, 1999.

9. Лубышев Ф. В., Файрузов М. Э. Аппроксимации задач оптимального управления для полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и состояниями, с управлениями в коэффициентах при старших производных // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2016. Т.56, № 7. С. 1267-1293.

MSC 65N06

An accuracy of difference schemes for nonlinear elliptic equations with unbounded nonlinearity

F.V. Lubyshev [1], M.E. Fairuzov [1], A.R. Manapova [1]
Bashkir State University [1]

Abstract: We consider the first boundary value problem for nonlinear elliptic equations with mixed derivatives and unrestricted nonlinearity. Is constructed and studied difference scheme for solution of a given problem class and implements its iterative process. Conducted a rigorous study of the convergence of the iterative process, by which is proved the existence and uniqueness of solutions of nonlinear difference scheme approximating the original differential problem. Installed consistent with the smoothness of the sought solution evaluation of the rate of convergence of difference schemes in the mesh norm of $W^2_{2,0}(\omega)$ approximating a nonlinear equation with unbounded nonlinearity.

Keywords: nonlinear elliptic equations, difference method of solving, accuracy, difference approximations, iterative process.

References

1. Samarskij A. A. Teoriya raznostnyh skhem. M.: Nauka, 1989.
2. Samarskij A. A., Vabishchevich P. N. Vychislitel'naya teploperedacha. M.: Knizhnyj dom «LIBROKOM», 2009.
3. Samarskij A. A., Lazarov R. D., Makarov V. L. Raznostnye skhemy dlya differencial'nyh uravnenij s obobshchennymi resheniyami. M.: Vysshaya shkola, 1989.
4. Samarskij A. A. Issledovanie tochnosti raznostnyh skhem dlya zadach s obobshchennymi resheniyami // Aktual'nye problemy matematicheskoj fiziki i vychislitel'noj matematiki. 1984. C. 174-183.
5. Matus P. P., Moskalkov M. N., Shheglik V. S. Soglasovannye ocenki tochnosti metoda setok dlya nelinejnogo uravneniya vtorogo poryadka s obobshhennymi resheniyami // Differencialnye Uravneniya [Differential Equations]. 1995. T. 31, № 7. PP. 1249-1256.
6. Shheglik V. S. Analiz raznostnoj sxemy, approksimiruyushhej tretyu kraevuyu zadachu dlya nelinejnogo differencialnogo uravneniya vtorogo poryadka // Zhurnal vychisl. matem. i matem. fiziki [Computational Mathematics and Mathematical Physics]. 1997. T. 37, № 8. P. 951-957.
7. Vasilev F. P. Metody Optimizacii. M.: Faktorial Press, 2002.
8. Lubyshev F. V. Raznostnye approksimacii zadach optimalnogo upravleniya sistemami, opisyvaemymi uravneniyami v chastnyx proizvodnyx. Ufa: BashGU, 1999.
9. Lubyshev F. V., Fairuzov M. E. Approksimacii zadach optimalnogo upravleniya dlya polulinejnyx ellipticheskix uravnenij s razryvnymi koefficientami i sostoyaniyami, s upravleniyami v koefficientax pri starshix proizvodnyx // Zhurnal vychisl. matem. i matem. fiziki [Computational Mathematics and Mathematical Physics]. 2016. T. 56, № 7. P. 1267-1293.