

УДК 517.9:[616-001+531/534]

Математическая постановка и решение задачи термоупругости для биотехнической системы «большеберцовая кость–пластина ТРХ–винты»

Е.Ю. Белова¹

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»
имени В. И. Ульянова (Ленина)¹

Аннотация: Работа посвящена математической постановке задачи термоупругости для биотехнической системы «большеберцовая кость – пластина ТРХ – винты» и её решению с использованием метода конечных элементов. Биомеханическое исследование биотехнической системы проведено на 10 временных стадиях. Оценка полученных максимальных значений эквивалентных напряжений показывает, что стабильность фиксации сегментарного перелома не нарушается.

Ключевые слова: задача термоупругости, уравнение равновесия в напряжениях, соотношения Коши, закон Дюамеля–Неймана, большеберцовая кость, сегментарный перелом, накостный остеосинтез

Перелом диафиза большеберцовой кости является одним из самых распространенных переломов длинных трубчатых костей [1]. Процент выхода на инвалидность после данной травмы составляет от 7 до 24% [2].

Широко используемым оперативным методом лечения диафизарного перелома большеберцовой кости является накостный остеосинтез [3]. Во время операции врач производит разрез мягких тканей и обнажает площадку на поверхности большеберцовой кости, на которую впоследствии устанавливает фиксаторы. Между площадкой и обтекающим её воздухом возникает конвективный теплообмен и распределение температуры в большеберцовой кости становится неравномерным. После установки фиксаторов и ушивания раны распределение температуры в системе выравнивается и приближается к 37 °С только по прошествии определенного времени, поскольку начальная температура фиксаторов составляет 21 °С [4].

Вследствие неравномерного распределения температуры возникают температурные напряжения. Учет их влияния необходим для обоснования рационального выбора фиксатора. В большинстве исследований на данную тему начальная температура большеберцовой кости до установки металлоконструкции принималась равной 37 °С, т.е. наличие конвективного теплообмена игнорировалось [5, 6]. Однако, учет неравномерного распределения температуры важен как при математической постановке задачи термоупругости, так и проведении биомеханического исследования.

Целью работы является математическая постановка задачи термоупругости для биотехнической системы (БТС) «большеберцовая кость – пластина ТРХ – винты» и её решение с использованием метода конечных элементов.

В системе автоматизированного проектирования SolidWorks построена БТС «большеберцовая кость – пластина ТРХ – винты». Она представляет собой трехмерную компьютерную модель сегментарного перелома большеберцовой кости с отломком 50 мм, стабилизация которого произведена с помощью фиксаторов для накостного остеосинтеза [7].

Постановка задачи термоупругости базируется на следующих предположениях [8]: температура определяется без учета деформаций тела; деформации малы; материал всегда везде ведет себя как упругий.

Уравнение равновесия в напряжениях записывается в следующей форме

$$\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\right) + f_i = 0, \text{ или } \sigma_{ij,j} + f_i = 0, \quad (1)$$

где σ_{ij} – тензор напряжений; f_i – проекции массовых сил, действующих на единицу объема; $i, j = 1, 2, 3$.

Тензор деформации ε_{ij} и u_i – компоненты вектора перемещений $\vec{u}(x_1, x_2, x_3)$ – связаны соотношениями

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \text{ или } \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (2)$$

где $i, j = 1, 2, 3$.

Связь между напряжениями и деформациями задается с помощью закона Дюамеля–Неймана

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} (3\lambda + 2\mu) \alpha \tau, \quad (3)$$

где τ – приращение температуры от температуры T_0 , при которой тело находится в естественном (ненапряженном и недеформированном) состоянии

$$\tau = T - T_0; \quad (4)$$

ε_{kk} расшифровывается как

$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}; \quad (5)$$

λ, μ – постоянные Ламе; δ_{ij} – символ Кронекера; α – температурный коэффициент линейного расширения; $i, j, k = 1, 2, 3$.

Постоянные Ламе находятся по следующим формулам

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad (6)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} = G, \quad (7)$$

Символ Кронекера

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

Для формулировки граничных условий введем обозначения поверхностей: S_{bk} – полная поверхность большеберцовой кости, включая поверхность костномозгового канала; S_{pz} – поверхность на нижней суставной поверхности большеберцовой кости, по которой производится закрепление; S_{pt} – поверхность пластины ТРХ; S_{vn} – поверхности винтов.

На поверхности S_{pz} БТС «большеберцовая кость–пластина ТРХ–винты»

$$u_i = 0, \forall x_i \in S_{pz} \quad (9)$$

Проекция вектора поверхностных сил p_i равны нулю (свободные от нагрузок поверхности)

$$\sigma_{ij} n_j = 0, \forall x_i \in S_{bk} \cup S_{pt} \cup S_{vn} \setminus S_{pz}, \quad (10)$$

где n_j – проекции вектора внешней единичной нормали \vec{n} к поверхности $S_{bk} \cup S_{pt} \cup S_{vn} \setminus S_{pz}$; $i, j = 1, 2, 3$.

Поверхностное распределение температуры задано в виде

$$T(P, t) = f(P, t), P \in S_{bk} \cup S_{pt} \cup S_{vn}. \quad (11)$$

Функция $f(P, t)$ найдена автором ранее в ходе температурного исследования БТС «большеберцовая кость–пластина ТРХ–винты». Целью работы являлось определение изменения

распределения температуры в БТС после установки фиксаторов и ушивания раны. Начальная температура металлоконструкции равнялась 21 °С. В качестве начальной температуры большеберцовой кости использовалось распределение температуры, полученное с учетом возникновения конвективного теплообмена между площадкой на поверхности данной кости, на которую устанавливаются фиксаторы, и обтекающим её воздухом.

Для решения задачи термоупругости необходимо решить систему уравнений (1), (2) и (3) совместно с граничными условиями (9), (10) и (11), которые задаются на поверхностях БТС «большеберцовая кость–пластина ТРХ–винты». Аналитическими методами выполнить данное действие сложно, поэтому используются численные методы, а именно метод конечных элементов. В модуле SolidWorks Simulation построена трехмерная компьютерная конечно-элементная модель БТС. При этом использована сетка высокого качества, которая состоит из параболических тетраэдральных твердотельных элементов. Биомеханическое исследование БТС «большеберцовая кость–пластина ТРХ–винты» проведено на 10 временных стадиях – от 150 до 1500 секунд с шагом 150 секунд. В качестве внешней нагрузки использовано распределение температуры, полученное в ходе температурного исследования БТС после установки фиксаторов и ушивания раны. Полученные максимальные значения эквивалентных напряжений в компонентах БТС – диафизе, эпифизах и метафизах большеберцовой кости, пластине ТРХ и винтах – на каждой из рассматриваемых стадий не превышают значений опасных напряжений в материалах данных компонентов. Таким образом, возникновение температурных напряжений в БТС не приводит к нарушению стабильности фиксации сегментарного перелома.

Литература

1. Шукин В. М. Накостный компрессионно-динамический остеосинтез диафизарных переломов костей голени в мирное время и при чрезвычайных ситуациях: автореф. дис... канд. мед. наук. Москва: Моск. мед. акад. им. И.М. Сеченова. 2005. 25 с.
2. Писарев В. В. Обоснование оптимальных методов лечения больных с закрытыми диафизарными переломами костей голени на основе изучения их клинико-патологических особенностей: автореф. дис... доктора мед. наук. Нижний Новгород: Нижегород. гос. мед. акад. 2014. 35 с.
3. Юмашев Г.С. Травматология и ортопедияюю М.: Медицина, 1990. 576 с.
4. Эккерт Э. Р., Дрейк Р. М. Теория тепло- и массообмена. М. – Л.: Госэнергоиздат. 1961. 681 с.
5. Tarnita D. Modular adaptive bone plate for humerus bone osteosynthesis // Romanian Journal of Morphology and Embryology. 2009. Vol. 50. No. 3. P. 447-452.
6. Шукейло Ю. А., Хомутов В. П., Самсонов С. Ю. Влияние температурных воздействий на систему накостного остеосинтеза в период реабилитации больного // Международная конференция по мягким вычислениям и измерениям. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ "ЛЭТИ". 2007. Т. 2. С. 245-247.
7. Шукейло, Е. Ю. Исследование биомеханики систем фиксации переломов // Известия СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2014. № 3. С. 70-74.
8. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория термоупругих напряжений. М.: Из-во Академии Наук СССР, 1964. 517 с.

MSC 35Q74 92C10

Mathematical formulation of a thermoelasticity problem for a biotechnical system "tibia bone–TRKh plate–screws"

E.Y. Belova ¹

Saint Petersburg Electrotechnical University "LETI"¹

Abstract: This study is dedicated to mathematical formulation of the thermoelasticity problem for the biotechnical system "tibia bone – TRKh plate – screws" and its solution using the finite element method. Biomechanical research of biotechnical system is conducted at 10 different time stages. Evaluation of maximum values of equivalent stresses is shown that fixation stability of a segmental fracture is not disturbed.

Keywords: problem of thermoelasticity, stress equilibrium equation, Cauchy relations, Duhamel-Neumann law, tibia bone, segmental fracture, plate osteosynthesis

References

1. Shchukin V. M. Nakostnyj kompressionno-dinamicheskij osteosintez diafizarnyh perelomov kostej goleni v mirnoe vremya i pri chrezvychajnyh situacijah [Plate compression-dynamic osteosynthesis of diaphyseal fractures of shin bones in peacetime and emergency situations]: avtoref. dis... kand. med. nauk. Moscow: I.M. Sechenov First Moscow State Medical University. 2005. 25 p.
2. Pisarev V. V. Obosnovanie optimal'nyh metodov lecheniya bol'nyh s zakrytymi diafizarnymi perelomami kostej goleni na osnove izucheniya ih kliniko-patofiziologicheskikh osobennostej [Rationale of optimal methods of the treatment of patients with closed diaphyseal fractures of shin bones on the basis of study of their clinical and pathophysiological characteristics]: avtoref. dis... doktora med. nauk. Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod State Medical Academy. 2014. 35 p.
3. Iumashev G. S. Travmatologiya i ortopediya [Traumatology and orthopedics]. Moscow, Medicine, 1990. 576 p.
4. Ekkert E. R., Dreik R. M. Teoriya teplo- i massoobmena [Theory of heat and mass transfer]. M.-L. Gosenergoizdat, 1961. 681 p.
5. Modular adaptive bone plate for humerus bone osteosynthesis / Tarnita D. [et al.] // Romanian Journal of Morphology and Embryology. 2009. V. 50, No 3. P. 447-452.
6. Shukeilo Y. A., Khomutov V. P., Samsonov S. Y. Vliyanie temperaturnyh vozdeystvij na sistemu nakostnogo osteosinteza v period rehabilitacii bol'nogo [Influence of temperature effects on a plate osteosynthesis system in the rehabilitation period of a patient] // Mezhdunarodnaya konferenciya po myagkim vychisleniyam i izmereniyam. Saint Petersburg, Publishing of the ETU "LETI". 2007. V. 2. P. 245-247.
7. Shukeilo, E. Y. Issledovanie biomekhaniki sistem fiksacii perelomov [The research of the biomechanics fixation systems of fractures] // Izvestiya ETU "LETI" ["Izvestiya SPbGETU «LETI»"]. 2014. No 3. P. 70-74.
8. Boli B., Weiner J. Teoriya termouprugih napryazhenij [Theory of thermal stresses]. Moscow, Izdatel'stvo Akademii Nauk USSR, 1964. 517 p.