XIII Международная научная конференция "Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании", Саранск, 12-16 июля 2017.
XIII International scientific conference "Differential equations and their applications in mathematical modeling", Saransk, July 12-16, 2017.

УДК 519.6

О сходимости решения трехслойной возмущенной разностной схемы к решению абстрактной некорректной задачи Коши *

М.А. Султанов [1]

Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави [1]

Аннотация: Доказана теорема сходимости решения трехслойной возущенной разностной схемы с двумя весами к решению абстрактной некорректной задачи Коши. Доказательство сходимости основано на теореме устойчивости трехслойной разностной схемы с двумя весами, которая опирается на понятия финитной устойчивости и на разностные априорные весовые оценки карлемановского типа.

Ключевые слова: некорректная задача, разностная схема, финитная устойчивость, карлемановская оценка, оператор, $l-$ корректная задача, сходимость.

1. Введение

В работе рассмотрен вопрос сходимости решения двухпараметрического семейства трехслойной разностной схемы к точному решению абстрактной некорректной задачи Коши. Доказательство сходимости опирается на понятия устойчивости разностной схемы на функциях с финитным носителем. Это понятие было введено и развито Бухгеймом А.Л [1,2] в связи с построением теории разностных схем для некорректных задач Коши, охватывающий уравнения с переменными коэффициентами. Она основана на получении априорных весовых оценок карлемановского типа в разностном варианте, которые в некорректном случае являются своеобразными аналогами законов сохранения. Устойчивость разностных схем для некорректной задачи Коши с постоянными коэффициентами впервые исследовалось Л.А.Чудовым [3] методом преобразования Фурье. Подход, основанный на определении $\rho-$ устойчивости, введенном А.А.Самарским [4], и SM (Spectral Mimetic) устойчивости применительно к некорректным и обратным задачам исследованы в работах П.Н.Вабищевича [5,6], методу квазиобращения посвящены работы [7,8]. Позже, метод карлемановских оценок в разностном варианте был развит М.В.Клибановым, А.Тимоновым [9] и другими авторами и некоторым применениям метода при численном решении некорректных обратных задач посвящены работы [10, 11, 12].

2. Некорректная задача Коши и теорема устойчивости разностной схемы

Пусть v - решение следующей абстрактной некорректной задачи Коши

$$\frac{d^2v}{dt^2} = Av + Kv, \tag{1}$$

$$v\left(0\right) = v_0, \;\; v_t\left(0\right) = 0. \tag{2}$$

Здесь $A = A_1 + A_2, \; A_1 \geq 0, \; A_2 \leq 0-$линейные, неограниченные, не зависящие от t операторы с областью определения $D\left(A\right) \subseteq H, \; H-$гильбертово пространство; оператор K

*Работа проводилось при финансовой поддержке Министерство образования и науки Республики Казахстан, проект № 3630/ГФ4

(оператор возмущения) действует из пространства $L_2([0,T];\,H)$ в $L_2([0,T];\,H)$; функция $v\,:\,[0,T]\to H$ четырежды непрерывно дифференцируема в сильном смысле, т.е. $v\in C^4([0,\,T];\,H)$, причем $v(t)\in D(A)$ для всех $t\in[0,\,T]$.

Поставим в соответствие задаче (1), (2) двухпараметрическое семейство разностных схем с двумя весами $\sigma,\ q$:

$$u_{t\bar{t}}-A_{1h}\left(\sigma\hat{u}+(1-2\sigma)\,u+\sigma\overset{\vee}{u}\right)-A_{2h}\left(q\hat{u}+(1-2q)\,u+q\overset{\vee}{u}\right)-\tilde{K}\overset{\vee}{u}=0, \tag{3}$$

$$u(0)=g,\quad u_1=u_0. \tag{4}$$

Предполагается, что $A_{1h},A_{2h}\in\mathcal{L}(H_h)$, $\tilde{K}\in\mathcal{L}(l_2(0,N;\,H_h))$, $A_{1h}=A_{1h}^*\geq 0$, $A_{2h}=A_{2h}^*\leq 0$, операторы A_{1h}, A_{2h} коммутируют и A_{1h}, A_{2h}, $\tilde{K}$ в определенном ниже смысле аппроксимируют операторы $A_1,A_2,\ K$. В свою очередь гильбертово пространство H_h, зависящее от параметра $h>0$, аппроксимирует пространство H. Для конкретизации понятия апроксимации предположим, что существует семейство линейных операторов:

$$P_h:V\to H_h,$$

определенных на плотном в H линейном многообразии $V\supseteq D(A)\cup R(A)$, где $R(A)=AD(A)$ −область значений оператора A таких, что

$$\lim_{h\to 0}\|P_hv\|=\|v\|_H\,,\quad \forall v\in H.$$

Здесь и далее $\|\cdot\|$ −норма в H_h . Рассмотрим вопрос о сходимости u к v , понимая под этим, что

$$\|u-P_hv\|_{l_2(1,N-1;\,H_h)}\to 0\,,$$

при $h\to 0,\ \tau\to 0$. Для доказательства сходимости нам понадобится устойчивость разностной схемы (3). Устойчивость трехслойной разностной схемы (3) с двумя весами получено в работе [13], ниже приводится теорема устойчивости этой схемы.

Теорема 1 (об устойчивости). Пусть гильбертово пространство H_h разложено в прямую сумму $H_h=H_h^+\oplus H_h^-$ двух подпространств H_h^+ и H_h^- таким образом, что $A_h=A_{1h}+A_{2h}\geq 0$ в H_h^+ и $A_h=A_{1h}+A_{2h}\leq 0$ в H_h^-. Пусть $Q^{\pm}$−ортопроекторы пространства H_h на $H_h^{\pm}$. Пусть $A_{1h}=A_{1h}^*\geq 0$, $A_{2h}=A_{1h}^*\leq 0$ и выполнены условия

1. $E-\tau^2\sigma A_{1h}-\tau^2 qA_{2h}\geq\delta E,\ \ \delta>0.$
2. $4E+\tau^2(1-4q)\,A_{2h}\geq 0,\ \ (1-4\sigma)\,A_{1h}\geq 0.$
3. $E+\tau^2(1-\sigma)\,A_{1h}+\tau^2(1-q)\,A_{2h}\geq 0$. Тогда для всех $\tau\in(0,\ \tau_0]\,,\ \varepsilon>0,\ \ u:Z_0^N\to H_h$ для разностной схемы (3) имеет место оценка устойчивости

$$\|u\|^2_{l_2(1,N-1;\,H_h)}\leq\varepsilon^2l^2(u)+c^2(\varepsilon)\left(\|f\|^2_{l_2(1,N;\,H_h)}+\left\|(-A_{2h})^{1/2}Q^-u_0\right\|^2+\|A_hQ^+u_0\|^2+\right.$$
$$\left.+\left\|A_{1h}^{1/2}Q^+u_0\right\|^2+\|u_0\|^2\right).$$

Здесь

$$l^2(u)=\|A_hQ^+u_{N-1}\|^2+\left\|A_{1h}^{1/2}Q^+u_{N-1}\right\|^2+\|Q^+u_N\|^2+\left\|A_{1h}^{1/2}Q^+u_N\right\|^2+\|Q^+u_{\bar{t}N}\|^2+\left\|A_{1h}^{1/2}Q^+u_{\bar{t}N}\right\|^2,$$

$$Z_0^N=\{0,\ 1,\ ...,\ N\}\,.$$

3. Сходимость разностной схемы

Результат настоящей работы, сходимость разностной схемы (3), сформулировано в виде следующей теоремы.

Теорема 2 (о сходимости). Пусть выполнены следующие условия

1. Условия аппроксимации операторов $A_1, A_2,\ K$ и начальных данных v_0 :

$$\|A_{jh}P_hv - P_hA_jv\| \le c_1h^p,\ \ j = 1,2\ , \tag{5}$$

$$\left\|\tilde{K}P_hv - P_hKv\right\|_{l_2(1,N;\,H_h)} \le c_1\left(h^{p_1} + \tau^d\right), \tag{6}$$

$$\|g - P_hv_0\| \le \delta. \tag{7}$$

2. Условия устойчивости (условия теоремы 1):

$$E - \tau^2\sigma A_1 - \tau^2 qA_2 \ge \delta_0 E,\ \ \delta_0 > 0,$$

$$4E + \tau^2\left(1 - 4q\right)A_2 \ge 0,\ \ \left(1 - 4q\right)A_1 \ge 0.$$

$$E + \tau^2\left(1 - \sigma\right)A_1 + \tau^2\left(1 - q\right)A_2 \ge 0.$$

3. Условия гладкости решения задачи (1), (2):

$$\|A_{jh}P_hv_{t\bar{t}}\| \le c_1,\ \ \left\|P_hv^{(4)}\right\| \le c_1,\ \ \left\|\tilde{K}P_hv_{\bar{t}}\right\|_{l_2(1,N;\,H_h)} \le c_1,\ \ j = 1,2, \tag{8}$$

$$l_1\left(v\right) \le m. \tag{9}$$

Здесь

$$l_1\left(v\right) = \|A_hQ^+P_hv_{n-1}\| + \left\|A_{1h}^{1/}Q^+P_hv_{N-1}\right\| + \|Q^+P_hv_N\| +$$
$$+ \left\|A_{1h}^{1/2}Q^+P_hv_N\right\| + \|Q^+P_hv_{\bar{t}N}\| + \left\|A_{1h}^{1/2}Q^+P_hv_{\bar{t}N}\right\|.$$

4. Условия согласования параметров $h,\ \sigma,\ q,\ \delta$:

$$l\left(u\right)\cdot\delta \le \Psi\left(h,\sigma,q\right)\cdot\delta \le c_2. \tag{10}$$

Тогда имеет место оценка сходимости

$$\|u - P_hv\|_{l_2(1,N-1;\,H_h)} \le \omega_{m+c_2}\left(\tau + \tau^2 + \tau^d + h^p + h^{p_1} + \delta\right),\ \ \delta,\ \tau,\ h \to 0,$$

где $\omega_m\left(\delta\right) = O(1/\ln\left(1/\delta\right))^{1/2}$.

Доказательство. Положим $w = u - P_hv$. Тогда

$$u = w + P_hv. \tag{11}$$

Подставляя (11) в уравнение (3), получим

$$w_{t\bar{t}} - A_{1h}\left(\sigma\hat{w} + \left(1 - 2\sigma\right)w + \sigma\overset{\vee}{w}\right) - A_{2h}\left(q\hat{w} + \left(1 - 2q\right)w + q\overset{\vee}{w}\right) - \tilde{K}\overset{\vee}{w} = f, \tag{12}$$

$$w_0 = g - P_hv_0,\ \ w_1 = w_0, \tag{13}$$

где $f = A_{1h}\left(\sigma P_h\hat{v} + \left(1 - 2\sigma\right)P_hv + \sigma P_h\overset{\vee}{v}\right) + A_{2h}\left(qP_h\hat{v} + \left(1 - 2q\right)P_hv + qP_h\overset{\vee}{v}\right) + \tilde{K}P_h\overset{\vee}{v} - P_hv_{t\bar{t}}$.
Оценим норму f. В силу тождеств

$$\sigma P_h\hat{v} + \left(1 - 2\sigma\right)P_hv + \sigma P_h\overset{\vee}{v} = \sigma\tau^2P_hv_{t\bar{t}} + P_hv,$$

$$qP_h\hat{v} + \left(1 - 2q\right)P_hv + qP_h\overset{\vee}{v} = q\tau^2P_hv_{t\bar{t}} + P_hv$$

и учитывая, что $\overset{\vee}{v} = v - \tau v_{\bar{t}}$, имеем

$$f = \sigma\tau^2A_{1h}P_hv_{t\bar{t}} + q\tau^2A_{2h}P_hv_{t\bar{t}} + A_{1h}P_hv + A_{2h}P_hv + \tilde{K}P_hv - \tau\tilde{K}P_hv_{\bar{t}} - P_hv_{t\bar{t}}. \tag{14}$$

Так как по предположению $v \in C^4([0,\ T];\ H)$, то

$$(v_{t\bar{t}})_j = \frac{v(j\tau+\tau) - 2v(j\tau) + v(j\tau-\tau)}{\tau^2} = v''(j\tau) + \frac{\tau^2}{12} v^{(4)}(j\tau + \theta\tau),$$

$$\theta \in (0,1), \quad j = 1, ..., N-1, \quad N\tau = T,$$

и, следовательно, в силу второй оценки (8) имеем

$$P_h v_{t\bar{t}} = P_h v''(j\tau) + O(\tau^2), \tag{15}$$

точнее $\|P_h v_{t\bar{t}} - P_h v''(j\tau)\| \leq \left(\frac{\tau^2}{12}\right) \cdot c_1$. Аналогично, условия аппроксимации (5) приводит к равенствам

$$A_{1h} P_h v = P_h A_1 v + O(h^p), \quad A_{2h} P_h v = P_h A_2 v + O(h^p). \tag{16}$$

В итоге из соотношений (14)-(16) и того, что $-P_h(v'' - A_h v) = -P_h K v$, в силу уравнения (1) имеем

$$f = \sigma\tau^2 A_{1h} P_h v_{t\bar{t}} + q\tau^2 A_{2h} P_h v_{t\bar{t}} + \tilde{K} P_h v - P_h K v - \tau \tilde{K} P_h v_{\bar{t}} + O(\tau^2 + h^p).$$

Учитывая (6) и первое и третье условия (8), получим

$$\|f\|_{l_2(1,N;\ H_h)} = \left\{\tau \sum_{j=1}^{N} \|f_j\|_{H_h}^2\right\}^{1/2} \leq c_1\sqrt{T}(|\sigma| + |q|)\tau^2 + c_1\left(h^{p_1} + \tau^d\right) + c_1\sqrt{T}\cdot\tau + O(h^p + \tau^2). \tag{17}$$

Применим теперь к разностной задаче (12), (13) теорему 1 об устойчивости. Тогда

$$\|w\|_{l_2(1,N-1;\ H_h)} \leq \varepsilon l(w) + c(\varepsilon)\left[\|f\|_{l_2(1,N;\ H_h)} + \left\|(-A_{2h})^{1/2} Q^- w_0\right\| + \|A_h Q^+ w_0\| + \left\|A_{1h}^{1/2} Q^+ w_0\right\|\right]. \tag{18}$$

Здесь

$$l(w) = \|A_h Q^+ w_{n-1}\| + \left\|A_{1h}^{1/} Q^+ w_{N-1}\right\| + \|Q^+ w_N\| + \left\|A_{1h}^{1/2} Q^+ w_N\right\| + \|Q^+ w_{\bar{t}N}\| + \left\|A_{1h}^{1/2} Q^+ w_{\bar{t}N}\right\|.$$

Оценим теперь $l(w)$. Так как $w = u - P_h v$, $w_{N-1} = u_{N-1} - P_h v_{N-1}$, $w_N = u_N - P_h v_N$, $w_{\bar{t}N} = u_{\bar{t}N} - P_h v_{\bar{t}N}$, то с учетом неравенство треугольника и условий (9), (10), следует $l(w) \leq l(u) + l_1(v) \leq \Psi(h, \sigma, q) \cdot \delta + m \leq m + c_2$. С учетом последней оценки из (9) получаем

$$\|w\|_{l_2(1,N-1;\ H_h)} \leq \varepsilon \cdot (m + c_2) + c(\varepsilon)\Big[\|g - P_h v_0\| + \left\|(-A_2)^{1/2} Q^-(g - P_h v_0)\right\| + \|A_h Q^+(g - P_h v_0)\| + \left\|A_{1h}^{1/2} Q^+(g - P_h v_0)\right\|\Big]. \tag{19}$$

Пусть выполнены следующие условия

$$\left\|(-A_{2h})^{1/2}\right\| \leq c_0, \quad \left\|A_{1h}^{1/2}\right\| \leq c_0, \quad \|A_h\| \leq c_0.$$

Тогда из оценки (19), учитывая, что $\|Q^{\pm}\| = 1$, имеем

$$\|w\|_{l_2(1,N-1;\ H_h)} \leq \varepsilon \cdot (m + c_2) + M \cdot c(\varepsilon)\left[\tau + \tau^2 + \tau^d + h^p + h^{p_1} + \delta\right]$$

с некоторой постоянной M, зависящей от σ, q, T, c_1, c_0. Из последней оценки получим

$$\|w\|_{l_2(1,N-1;\ H_h)} \leq \omega_{m+c_2}\left(\tau + \tau^2 + \tau^d + h^p + h^{p_1} + \delta\right).$$

Здесь $\omega_m(\delta) = \inf\limits_{\varepsilon>0}(\varepsilon \cdot m + M \cdot c(\varepsilon) \cdot \delta)$. Известно [14], что если для $l-$корректной задачи

$$c(\varepsilon) = c \cdot \exp\left(s\varepsilon^{-\nu}\right), \ \ \nu > 0, \ \ s > 0,$$

то

$$\omega_m(\delta) \sim m(s/\ln(1/\delta))^{1/\nu}, \ \ \delta \to 0.$$

Поэтому

$$\omega_m(\delta) = O(1/\ln(1/\delta))^{1/2}$$

и, следовательно,

$$\|w\|_{l_2(1,N-1;\, H_h)} \leq \omega_{m+c_2}\left(\tau + \tau^2 + \tau^d + h^p + h^{p_1} + \delta\right) \to 0$$

при $\tau, \ h, \ \delta \to 0$. Теорема доказана.

4. Заключение

В работе доказана теорема сходимости трехслойной возмущенной разностной схемы с двумя весами к точному решению абстрактной некорректной задачи Коши. Доказательство сходимости проведено в условиях выполнения аппроксимации, априорной гладкости решения, устойчивости схемы, а также согласования параметров схемы с точностью задания исходных данных. Получение условий устойчивости и сходимости разностной схемы основано на получении априорных весовых оценок карлемановского типа на решениях разностных схем с финитным носителем.

Литература

1. Бухгейм А. Л. Об устойчивости разностных схем для некорректных задач // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270, № 1. С. 26-28.

2. Бухгейм А. Л. Разностные методы решения некорректных задач. - Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1986.

3. Чудов Л. А. Разностные схемы и некорректные задачи для уравнений с частными производными // Вычислительные методы и программирование. М., 1967. Т. 8. С. 34-62.

4. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.

5. Вабищевич П. Н. Трехслойные схемы попеременно-треугольного метода // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2014. Т. 54, № 6. С. 942-952.

6. Вабищевич П. Н. SM - устойчивость операторно-разностных схем //Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2012. Т. 52, № 6. С. 1002-1009.

7. Bourgeois L. Convergence rates for the quasi-reversibility method to solve the Cauchy problem for Laplace's equation // Inverse Problems, 2006 V. 22. P. 413-430.

8. Klibanov M. V., Kuzhuget A. V., Kabanikhin S. I. and Nechaev D. V. A new version of the quasi-reversibility method for the thermoacoustic tomography and a coefficient inverse problem // Applicable Analysis. 2008. V. 87. P. 1227-1254.

9. Klibanov M. V. and Timonov A. Carleman Estimates for Coefficient Inverse Problems and Numerical Applications. VSP, Utrecht, The Netherlands, 2004.

10. Klibanov M. V. Carleman estimates for the regularization of ill-posed Cauchy problems // Applied Numerical Mathematics. 2015. V. 94. P. 46-74.

11. Klibanov M. V., Koshev N. A., Li J. and Yagola A. G. Numerical solution of an ill-posed Cauchy problem for a quasilinear parabolic equation using a Carleman weight function // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2016.

12. Berdyshev A, S. and Sultanov M. A. On Stability of the Solution of Multidimensional Inverse Problem for the Schrödinger Equation // J. Math. Model. Nat. Phenom. Vol. 12. 2017. No. 3. P. 119 - 133.

13. Султанов М. А. Оценки устойчивости решений трехслойной разностной схемы с двумя весами для некорректных задач Коши // Сибирские электронные математические известия. 2015. Т. 12. С. 28-44.

14. Бухгейм А. Л. Уравнения Вольтерра и обратные задачи. Новосибирск: Наука, 1983.

MSC 35R30

On the convergence of the solution of a three-layer perturbed difference scheme to the solution of an abstract ill-posed Cauchy problem

M.A.Sultanov [1]

Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University [1]

Abstract: A theorem on the convergence of the solution of a three-layered difference scheme with two weights to the solution of an abstract ill-posed Cauchy problem is proved. The proof of convergence is based on the stability theorem for a three-layer difference scheme with two weights, which is based on the concepts of finite stability and on difference a priori weight estimates of the Carleman type.

Keywords: ill-posed problem, difference scheme, finite stability, Carleman estimate, operator, $l-$ well-posed problem, convergence.

References

1. 1. Bukhgeim A.L. Ob ustoychivosti raznostnykh shem dlya nekorretnyh zadach [On the stability of difference schemes for ill-posed problems] // Dokl.Akademy Nauk SSSR [Dokl. Academy of Sciences of the USSR]. 1983. Vol. 270, No. 1. P. 26-28.

2. Bukhgeim A.L. Raznostnye metody reshenye nekorretnyh zadach [Difference methods for solving ill-posed problems]. Novosibirsk: Computing Center of the Siberian Branch of the USSR Academy of Sciences, 1986.

3. Chudov L.A. Raznostnye shemy i nekorretnye zadachi dlya uravnenyi s chastnymy proizvodnymi [Difference schemes and ill-posed problems for partial differential equations] // Vychislitelnye metody i programmyrovanye [Computational methods and programming]. - Moscow, 1967. Vol. 8. P. 34-62.

4. Samarsky A.A. Teoriya raznostnyh shem [The theory of difference schemes]. Moscow. Publishing of "Nauka 1977.

5. Vabishchevich P.N. Treyhsloynie shemy poperemenno-treugolnogo metoda [Three-level schemes of the alternating triangular method] // Zyurnal vychisl. matematiki i matem. fiziki [Journal of Comp. Math. and Math. Physics]. 2014. Vol. 54, No. 6. P. 942-952.

6. Vabishchevich P.N . SM - ustoichivost operatorno-raznostnyh shem [SM - stability of operator-difference schemes] // Zyurnal vychisl. matematiki i matem. fiziki [Journal of Comp. Math. and Math. Physics]. 2012. Vol. 52. No. 6. P. 1002-1009.

7. L. Bourgeois. Convergence rates for the quasi-reversibility method to solve the Cauchy problem for Laplace's equation // Inverse Problems, 2006. Vol. 22. P. 413-430.

8. Klibanov M.V., A.V. Kuzhuget A.V., Kabanikhin S.I. and Nechaev D.V. A new version of the quasi-reversibility method for the thermoacoustic tomography and a coefficient inverse problem // Applicable Analysis, 2008. Vol. 87. P. 1227-1254.

9. Klibanov M.V. and Timonov A. Carleman Estimates for Coefficient Inverse Problems and Numerical Applications. - VSP, Utrecht, The Netherlands, 2004.

10. Klibanov M. V. Carleman estimates for the regularization of ill-posed Cauchy problems // Applied Numerical Mathematics. 2015. 94. P. 46-74.

11. Klibanov M.V., Koshev N.A., Li J. and Yagola A. G. Numerical solution of an ill-posed Cauchy problem for a quasilinear parabolic equation using a Carleman weight function // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2016. Vol. 24. Issue 6.

12. Berdyshev A, S. and Sultanov M. A. On Stability of the Solution of Multidimensional Inverse Problem for the Schrödinger Equation // J. Math. Model. Nat. Phenom. Vol 12, No 3, 2017, P. 119 - 133.

13. Sultanov M.A. Otzenki ustoichivosti rechenyi trehsloinoi raznostnoi shemy dlya nekorretnyh zadach Koshi [Estimate of solution stability of three-layer difference scheme with two weights for ill-posed Cauchy problems] // Sibirskie electronnye matematicheskie izvestyia [Siberian Electronic Mathematical Reports]. 2015. Vol. 12. P. 28-44.

14. Bukhgeim A.L. Uravneniya Volterra i obratnyie zadashi. [Volterra equations and inverse problems]. Novosibirsk, Publishing of "Nauka 1983.