XIII Международная научная конференция "Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании", Саранск, 12-16 июля 2017.
XIII International scientific conference "Differential equations and their applications in mathematical modeling", Saransk, July 12-16, 2017.

УДК 517.95

Нормирующая постоянная фундаментального решения уравнения Лапласа-Бельтрами

Р.М. Мавлявиев[1], И.Б. Гарипов[1]

Казанский (Приволжский) федеральный университет[1]

Аннотация: Для фундаментального решения осесимметрического уравнения приведены вычисления по нахождению нормирующей константы.

Ключевые слова: фундаментальное решение, оператор Бесселя, гипергеометрическая функция Гаусса, нормирующая постоянная

С помощью обобщенного полярного преобразования [1] по первым $(n-1)$ переменным n мерное уравнение Лапласа можно свести к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1}^2} + \frac{n-2}{x_{n-1}} \frac{\partial u}{\partial x_{n-1}} + F = 0 \quad (i = \overline{1,n}), \tag{1}$$

где F – сумма всех слагаемых зависящих от угловых переменных. В случае осевой симметрии $F = 0$ и переобозначив $x_n = x$, $x_{n-1} = y$ и $n-2 = 2k$, вместо (1) получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{2k}{x} \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{2}$$

Уравнение (2) называется уравнением Лапласа-Бельтрами. Для случая $2k = 1$ в работе [2] построено фундаментальное решение уравнения (2)

$$q(\xi, \eta; x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} \frac{1}{r_1} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; 1-\sigma\right),$$

где $\sigma = \frac{r^2}{r_1^2}$, $r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2$, $r_1^2 = (\xi - x)^2 + (\eta + y)^2$, $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса задаваемая рядом

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_i (\beta)_i}{(\gamma)_i} \frac{z^i}{i!},$$

где

$$(a)_i = a(a+1)(a+2)...(a+i-1),$$

символ Похгаммера.

В своей статье [3] С.П. Пулькин построил фундаментальное решение

$$q(\xi, \eta; x, y) = C r_1^{-p} F\left(\frac{p}{2}, \frac{p}{2}; p; 1-\sigma\right) \tag{3}$$

уравнения

$$u_{xx} + u_{yy} \pm \frac{p}{x} u_x = 0.$$

При $p = 2k$ фундаментальное решение (3) принимает вид

$$q(\xi, \eta; x, y) = C \left(r_1^2\right)^{-k} F(k, k; 2k; 1-\sigma). \tag{4}$$

Используя формулу [4]

$$(c-a)_n z^{c-a-1}(1-z)^{a+b-c-n} F\left(a-n, b; c; z\right) =$$
$$= \frac{d^n}{dz^n}\left[z^{c-a+n-1}(1-z)^{a+b-c} F\left(a, b; c; z\right)\right]$$

запишем, в частности, при $a = b = k$, $c = 2k$ и $n = 1$

$$\frac{d}{d(1-\sigma)}\left[(1-\sigma)^k F\left(k, k; 2k; 1-\sigma\right)\right] =$$
$$= k(1-\sigma)^{k-1}\sigma^{-1} F\left(k-1, k; 2k; 1-\sigma\right). \qquad (5)$$

Найдем производную по нормали от фундаментального решения (4).

Вычислим частную производную по первой переменной используя (5)

$$\frac{\partial q}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\left(r_1^2\right)^{-k} F\left(k, k; 2k; 1-\sigma\right)\right] = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[(4\eta y)^{-k}\left(1-\sigma\right)^k F\left(k, k; 2k; 1-\sigma\right)\right] =$$
$$= (4\eta y)^{-k}\frac{d}{d(1-\sigma)}\left[(1-\sigma)^k F\left(k, k; 2k; 1-\sigma\right)\right]\frac{\partial(1-\sigma)}{\partial \xi} =$$
$$= \left(r_1^2 - r^2\right)^{-k} k(1-\sigma)^{k-1}\sigma^{-1} F\left(k-1, k; 2k; 1-\sigma\right)\frac{2(\xi - x)}{r_1^2}(\sigma - 1) =$$
$$= \frac{-2k(\xi - x)}{r^2}(1-\sigma)^k\left(\frac{r_1^2 - r^2}{r_1^2}\right)^{-k}\left(r_1^2\right)^{-k} F\left(k-1, k; 2k; 1-\sigma\right) =$$
$$= \frac{-2k(\xi - x)}{r^2}\left(r_1^2\right)^k F\left(k-1, k; 2k; 1-\sigma\right). \qquad (6)$$

Вычислим частную производную по второй переменной

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \eta} = \frac{2(\eta - y)r_1^2 - r^2 2(\eta + y)}{\left(r_1^2\right)^2} = \frac{2(\eta - y)}{r_1^2} - \frac{2(\eta + y)}{r_1^2}\sigma =$$
$$= \frac{2(\eta - y)}{r_1^2}(1-\sigma) + \sigma\frac{2(\eta - y)}{r_1^2} - \frac{2(\eta + y)}{r_1^2}\sigma =$$
$$= \frac{2(\eta - y)}{r_1^2}(1-\sigma) + \frac{2\sigma}{r_1^2}\left((\eta - y) - (\eta + y)\right) = \frac{2(\eta - y)}{r_1^2}(1-\sigma) + \frac{2\sigma\left(-2y\right)}{r_1^2},$$

следовательно

$$\frac{\partial(1-\sigma)}{\partial \eta} = \frac{4y\sigma}{r_1^2} - \frac{2(\eta - y)(1-\sigma)}{r_1^2}.$$

Воспользуемся формулой [4]

$$(c-a)_n z^{c-a-1}(1-z)^{a+b-c-n} F\left(a-n, b; c; z\right) =$$
$$= \frac{d^n}{dz^n}\left[z^{c-a+n-1}(1-z)^{a+b-c} F\left(a, b; c; z\right)\right].$$

Из нее при $a = b = k$, $c = 2k$ и $n = 1$ следует

$$k(1-\sigma)^{k-1}\sigma^{-1} F\left(k-1, k; 2k; 1-\sigma\right) = \frac{d}{d(1-\sigma)}\left[(1-\sigma)^k F\left(k, k; 2k; 1-\sigma\right)\right]. \qquad (7)$$

Так как

$$(1-\sigma)^k = \left(\frac{4\eta y}{r_1^2}\right)^k = (4\eta y)^k\left(r_1^2\right)^{-k},$$

то

$$\left(r_1^2\right)^{-k} = (1-\sigma)^k \left(4\eta y\right)^{-k},$$

следовательно, используя (7), получаем

$$\frac{\partial q}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\left(r_1^2\right)^{-k} F\left(k,k;2k;1-\sigma\right)\right] = \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\left(4\eta y\right)^{-k}(1-\sigma)^k F\left(k,k;2k;1-\sigma\right)\right] =$$

$$= -k\left(4\eta y\right)^{-k-1} 4y(1-\sigma)^k F\left(k,k;2k;1-\sigma\right) +$$

$$+ \left(4\eta y\right)^{-k} k(1-\sigma)^{k-1}\sigma^{-1} F\left(k-1,k;2k;1-\sigma\right)\left[\frac{4\sigma y}{r_1^2} - \frac{2(\eta-y)(1-\sigma)}{r_1^2}\right] =$$

$$= -4ky\left(\frac{r_1^2-r^2}{r_1^2}\right)^{-k-1}\left(r_1^2\right)^{-k-1}(1-\sigma)^k F\left(k,k;2k;1-\sigma\right) +$$

$$+\left(\frac{r_1^2-r^2}{r_1^2}\right)^{-k}\left(r_1^2\right)^{-k} k(1-\sigma)^{k-1}\left(\frac{r^2}{r_1^2}\right)^{-1} F\left(k-1,k;2k;1-\sigma\right)\left[\frac{4\sigma y}{r_1^2} - \frac{2(\eta-y)(1-\sigma)}{r_1^2}\right] =$$

$$= -4ky\left(1-\sigma\right)^{-k-1}\left(r_1^2\right)^{-k-1}(1-\sigma)^k F\left(k,k;2k;1-\sigma\right) +$$

$$+\left(1-\sigma\right)^{-k}\left(r_1^2\right)^{-k} k(1-\sigma)^{k-1}\frac{r_1^2}{r^2} F\left(k-1,k;2k;1-\sigma\right)\left[\frac{4\sigma y}{r_1^2} - \frac{2(\eta-y)(1-\sigma)}{r_1^2}\right] =$$

$$= -4ky\left(1-\sigma\right)^{-1}\left(r_1^2\right)^{-k}\frac{r^2}{r_1^2}\frac{1}{r^2} F\left(k,k;2k;1-\sigma\right) +$$

$$+\left(1-\sigma\right)^{-1}\left(r_1^2\right)^{-k} k\frac{r_1^2}{r^2} F\left(k-1,k;2k;1-\sigma\right)\left[\frac{4\sigma y}{r_1^2} - \frac{2(\eta-y)(1-\sigma)}{r_1^2}\right] =$$

$$= \frac{-2k\left(r_1^2\right)^{-k}}{r^2}\Big[2y\left(1-\sigma\right)^{-1}\sigma F\left(k,k;2k;1-\sigma\right) -$$

$$- \left(1-\sigma\right)^{-1} 2y\sigma F\left(k-1,k;2k;1-\sigma\right) + (\eta-y)F\left(k-1,k;2k;1-\sigma\right)\Big] =$$

$$= \frac{-2k\left(r_1^2\right)^{-k}}{r^2}\Big[2y\left(1-\sigma\right)^{-1}\sigma\Big(F\left(k,k;2k;1-\sigma\right) - F\left(k-1,k;2k;1-\sigma\right)\Big) +$$

$$+ (\eta-y)F\left(k-1,k;2k;1-\sigma\right)\Big] =$$

$$= \frac{-2k\left(r_1^2\right)^{-k}}{r^2}\Big[2y\left(1-\sigma\right)^{-1}\sigma(1-\sigma)\frac{k}{2k} F\left(k,k+1;2k+1;1-\sigma\right) +$$

$$+ (\eta-y)F\left(k-1,k;2k;1-\sigma\right)\Big] =$$

$$= \frac{-2k\left(r_1^2\right)^{-k}}{r^2}\left[\sigma y F\left(k,k+1;2k+1;1-\sigma\right) + (\eta-y)F\left(k-1,k;2k;1-\sigma\right)\right] =$$

$$= \frac{-2k(\eta-y)\left(r_1^2\right)^{-k}}{r^2} F\left(k-1,k;2k;1-\sigma\right) + \frac{-2ky\left(r_1^2\right)^{-k}}{r_1^2} F\left(k,k+1;2k+1;1-\sigma\right). \quad (8)$$

Подставляя (6) и (8) в формулу

$$\frac{\partial q}{\partial n} = \frac{\partial q}{\partial \xi}\frac{d\eta}{ds} - \frac{\partial q}{\partial \eta}\frac{d\xi}{ds},$$

получаем производную по нормали от фундаментального решения

$$\frac{\partial q}{\partial n} = \frac{-2k(\xi - x)\left(r_1^2\right)^{-k}}{r^2} F\left(k-1, k; 2k; 1-\sigma\right)\frac{d\eta}{ds} -$$

$$-\left[\frac{-2k(\eta - y)\left(r_1^2\right)^{-k}}{r^2} F\left(k-1, k; 2k; 1-\sigma\right) + \frac{-2ky\left(r_1^2\right)^{-k}}{r_1^2} F\left(k, k+1; 2k+1; 1-\sigma\right)\right]\frac{d\xi}{ds}.$$

Нормирующая константа находится из требования, чтобы поток вектора потенциала через поверхность тора окаймляющего источник-окружность равнялся единице

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\gamma_\varepsilon}\frac{\partial q}{\partial n}y^{2k}ds = 1.$$

Имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\gamma_\varepsilon}\frac{\partial q}{\partial n}y^{2k}ds =$$

$$= C\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\gamma_\varepsilon}\left(\frac{-2k(\xi - x)d\eta + 2k(\eta - y)d\xi}{r^2}\left(r_1^2\right)^{-k} F\left(k-1, k; 2k; 1-\sigma\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{-2ky\left(r_1^2\right)^{-k}}{r_1^2} F\left(k, k+1; 2k+1; 1-\sigma\right)d\xi\right)y^{2k} =$$

$$= C\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{-2k\varepsilon\cos\varphi\varepsilon\cos\varphi d\varphi + 2k\varepsilon\sin\varphi(-\varepsilon\sin\varphi)d\varphi}{(\varepsilon\cos\varphi)^2 + (\varepsilon\sin\varphi)^2}\left((\varepsilon\cos\varphi)^2 + (2y + \varepsilon\sin\varphi)^2\right)^{-k}\times\right.$$

$$\times F\left(k-1, k; 2k; 1 - \frac{(\varepsilon\cos\varphi)^2 + (\varepsilon\sin\varphi)^2}{(\varepsilon\cos\varphi)^2 + (2y + \varepsilon\sin\varphi)^2}\right) + \frac{-2ky\left((\varepsilon\cos\varphi)^2 + (2y + \varepsilon\sin\varphi)^2\right)^{-k}}{(\varepsilon\cos\varphi)^2 + (2y + \varepsilon\sin\varphi)^2}\times$$

$$\left.\times F\left(k, k+1; 2k+1; 1 - \frac{(\varepsilon\cos\varphi)^2 + (\varepsilon\sin\varphi)^2}{(\varepsilon\cos\varphi)^2 + (2y + \varepsilon\sin\varphi)^2}\right)(-\varepsilon\sin\varphi)d\varphi\right]y^{2k} =$$

$$= C\int\limits_0^{2\pi}\left[-2kd\varphi\left((2y)^2\right)^{-k} F\left(k-1, k; 2k; 1\right)\right]y^{2k} =$$

$$= C(-2k)\left(4y^2\right)^{-k} F\left(k-1, k; 2k; 1\right)y^{2k}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi = -4\pi k\left(4y^2\right)^{-k}Cy^{2k} = 1.$$

Отсюда получаем

$$C = -\frac{2^{2k}}{4\pi k}.$$

Литература

1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления (в 3-х томах). М.: Физматлит, 2003. Т. 3. 728 с.

2. Beltrami E. Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche // Mem. R. Accad. sci. Bologna. 1880. V. 2. P. 461–505.

3. Пулькин, С. П. Некоторые краевые задачи для уравнений $u_{xx} \pm u_{yy} + \frac{p}{x}u_x = 0$ // Ученые записки Куйбышевского государственного педагогического института им. В.В.Куйбышева. 1958. Вып. 21. С.3-55.

4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том 1. Гипергеометрическая функция, функции Лежандра (2-е изд.). М.: Наука, 1973. 296 с.

MSC 35A08

Normalizing factor of the Laplace-Beltrami's equation fundamental solution

R.M. Mavlyaviyev[1], I.B. Garipov[1]
Kazan (Volga region) Federal University[1]

Abstract: For the fundamental solution of the axisymmetric equation calculations for finding the normalizing factor are given.

Keywords: fundamental solution, Bessel operator, hypergeometric Gauss function, normalizing factor

References

1. Fihtengolts G. M. Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya [Course of Differential and Integral Calculus]. Moscow, State Publishing House of Physical and Mathematical Literature, 2003. Vol. 3. 728 p.
2. Beltrami E. Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche // Mem. R. Accad. sci. Bologna. 1880. Vol. 2. P. 461–505.
3. Pul'kin S. P. Nekotoryie kraevyie zadachi dlya uravneniy $u_{xx} \pm u_{yy} + \frac{p}{x}u_x = 0$ [Some boundary value problems for equations $u_{xx} \pm u_{yy} + \frac{p}{x}u_x = 0$] // Uchuonye zapiski Kujbyshevskogo gos. ped. instituta im. V.V.Kujbysheva. 1958. V. 21. P.3-55.
4. Bateman H., Erdelyi A. Vyisshie transtsendentnyie funktsii [Higher transcendental functions]. Moscow, Publishing "Nauka 1973. Vol. 1. 296 p.