УДК 517.925

Анализ сценария бифуркаций предельных циклов фазовой системы дифференциальных уравнений

С.С. Мамонов [1], А.О. Харламова [1]

Рязанский государственный университет им. С. А. Есенина[1]

Аннотация: В работе рассматривается система дифференциальных уравнений с цилиндрическим фазовым пространством. Для неё с использованием принципа тора сформулированы условия существования предельных циклов первого рода. Для рассматриваемой системы проведен численный анализ сценария бифуркаций предельного цикла в зависимости от параметров системы. Рассматривается вопрос о количестве и методах обнаружения неустойчивых циклов, возникающих в результате бифуркации.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, принцип тора, предельный цикл первого рода, бифуркация, неустойчивый цикл.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с цилиндрическим фазовым пространством

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma) + d\frac{2kc^T x}{1+\tau^2 (c^T x)^2}, \dot{\sigma} = c^T x, \tag{1}$$

где $x, b, c, d \in \mathbb{R}^2, k, \tau \in \mathbb{R}$, $\varphi(\sigma)$— Δ-периодическая непрерывно дифференцируемая функция. Система (1) является математической моделью системы частотно-фазовой автоподстройки частоты(ЧФАПЧ) [1], [2], [3]. Условия существования предельных циклов первого рода сформулированы в следующей теореме.

Теорема. Пусть для системы (1) выполнены условия:

1) $c^T b = -\Gamma < 0, c^T A = l^T, l^T b = \nu > 0, c^T d = \xi_2 > 0, l^T d = -\xi_1 < 0, rang\,\|c, l\| = 2, l^T A = -\alpha_1 l^T - \beta_1 c^T, c^T A^{-1} b \neq 0, \alpha_1 > 0, \beta_1 > 0, k > 0$;

2) $\varphi(\sigma)$ — Δ-периодическая функция, имеющая два нуля на периоде $\varphi(\sigma_1) = \varphi(\sigma_2) = 0$, $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \Delta$, для $\widetilde{\sigma} = \sigma - \sigma_1$ справедливы соотношения $\varphi(\sigma) = a_2\widetilde{\sigma} + \widetilde{\sigma}^2\varphi_2(\widetilde{\sigma})$, $|\varphi_2(\widetilde{\sigma})| \le \tau_1 + \tau_2|\widetilde{\sigma}|, \varphi(\sigma) = \varphi(\widetilde{\sigma} + \sigma_1) = \varphi_0(\widetilde{\sigma}), \dot{\varphi}_0(0) > 0, \widetilde{\sigma}_2 = \sigma_2 - \sigma_1, \dot{\varphi}_0(\widetilde{\sigma}_2) < 0, \dot{\varphi}(\widetilde{\sigma})$ — ограничена на сегменте $[0; \Delta], \tau_1 \ge 0, \tau_2 \ge 0$;

3) существуют $h_1, h_2, \lambda_1, \lambda_2, r_1, r_2, r, R$, для которых выполняются соотношения

$$\psi_1(u_1) = u_1\left(\nu\Gamma^{-1}\alpha_1 - \nu^2\Gamma^{-2} - \beta_1\right) + r_1\left(\nu\Gamma^{-1} - \alpha_1\right) + \frac{2ku_1}{1+\tau^2 u_1^2}\left(\nu\Gamma^{-1}\xi_2 - \xi_1\right) < 0, \tag{2}$$

$$\psi_2(u_2) = u_2\left(\nu\Gamma^{-1}\alpha_1 - \nu^2\Gamma^{-2} - \beta_1\right) - r_2\left(\nu\Gamma^{-1} - \alpha_1\right) + \frac{2ku_2}{1+\tau^2 u_2^2}\left(\nu\Gamma^{-1}\xi_2 - \xi_1\right) > 0, \tag{3}$$

при $u_1,\ u_2 \in \left[-\frac{R}{\lambda_2}\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}; \frac{R}{\lambda_2}\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}\right]$, для функций $U_3^+(\widetilde{\sigma}) = \widetilde{\sigma}h_1 + \sqrt{r^2 - \widetilde{\sigma}^2 h_2^2}$ и $U_3^-(\widetilde{\sigma}) = \widetilde{\sigma}h_1 - \sqrt{r^2 - \widetilde{\sigma}^2 h_2^2}$, где $\widetilde{\sigma} \in \left[-\frac{r}{h_2}; \frac{r}{h_2}\right]$, $r^* = \max\{r_1; r_2\}$, справедливы неравенства

$$\begin{gathered} G_1^+(\widetilde{\sigma}) = -\sqrt{r^2 - \widetilde{\sigma}^2 h_2^2}\left(r^* + \nu\Gamma^{-1}\left|U_3^+(\widetilde{\sigma})\right|\right) + \widetilde{\sigma}U_3^+(\widetilde{\sigma})h_2^2 + \sqrt{r^2 - \widetilde{\sigma}^2 h_2^2}\times \\ \times\left(-a_2\Gamma\widetilde{\sigma} + 2k\xi_2 U_3^+(\widetilde{\sigma}) - U_3^+(\widetilde{\sigma})h_1 - \Gamma\widetilde{\sigma}^2\varphi_2(\widetilde{\sigma}) - 2k\tau^2\xi_2\frac{\left(U_3^+(\widetilde{\sigma})\right)^3}{1+\tau^2\left(U_3^+(\widetilde{\sigma})\right)^2}\right) > 0, \end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{gathered}G_1^-(\widetilde{\sigma}) = -\sqrt{r^2-\widetilde{\sigma}^2 h_2^2}\left(r^* + \nu\Gamma^{-1}\left|U_3^-(\widetilde{\sigma})\right|\right) + \widetilde{\sigma}U_3^-(\widetilde{\sigma})\,h_2^2 - \sqrt{r^2-\widetilde{\sigma}^2h_2^2}\times \\ \times\left(-a_2\Gamma\widetilde{\sigma} + 2k\xi_2U_3^-(\widetilde{\sigma}) - U_3^-(\widetilde{\sigma})\,h_1 - \Gamma\widetilde{\sigma}^2\varphi_2(\widetilde{\sigma}) - 2k\tau^2\xi_2\frac{\left(U_3^-(\widetilde{\sigma})\right)^3}{1+\tau^2\left(U_3^-(\widetilde{\sigma})\right)^2}\right) > 0,\end{gathered} \tag{5}$$

для функций $U_4^+(\widetilde{\sigma}) = -\widetilde{\sigma}\lambda_1 + \sqrt{R^2-\widetilde{\sigma}^2\lambda_2^2}$ и $U_4^-(\widetilde{\sigma}) = -\widetilde{\sigma}\lambda_1 - \sqrt{R^2-\widetilde{\sigma}^2\lambda_2^2}$, где $\widetilde{\sigma} \in$ $\in \left[-\frac{R}{\lambda_2}; \frac{R}{\lambda_2}\right]$, выполняются неравенства

$$\begin{gathered}G_2^+(\widetilde{\sigma}) = r^*\sqrt{R^2-\widetilde{\sigma}^2\lambda_2^2} + \left(\lambda_1 - \nu\Gamma^{-1}\right)R^2 - \widetilde{\sigma}^2\left(2\lambda_1-\nu\Gamma^{-1}\right)\lambda_2^2 - \\ - \Gamma\widetilde{\sigma}^2\varphi_2(\widetilde{\sigma})\sqrt{R^2-\widetilde{\sigma}^2\lambda_2^2} + 2k\xi_2\sqrt{R^2-\widetilde{\sigma}^2\lambda_2^2}\frac{U_4^+(\widetilde{\sigma})}{1+\tau^2\left(U_4^+(\widetilde{\sigma})\right)^2} < 0,\end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered}G_2^-(\widetilde{\sigma}) = r^*\sqrt{R^2-\widetilde{\sigma}^2\lambda_2^2} + \left(\lambda_1 - \nu\Gamma^{-1}\right)R^2 - \widetilde{\sigma}^2\left(2\lambda_1-\nu\Gamma^{-1}\right)\lambda_2^2 + \\ + \Gamma\widetilde{\sigma}^2\varphi_2(\widetilde{\sigma})\sqrt{R^2-\widetilde{\sigma}^2\lambda_2^2} - 2k\xi_2\sqrt{R^2-\widetilde{\sigma}^2\lambda_2^2}\frac{U_4^-(\widetilde{\sigma})}{1+\tau^2\left(U_4^-(\widetilde{\sigma})\right)^2} < 0,\end{gathered} \tag{7}$$

4) функции $U^\pm(\widetilde{\sigma}) = \widetilde{\sigma}h_1 \pm \sqrt{r^2-\widetilde{\sigma}^2h_2^2}$ при $\widetilde{\sigma} \in \left[-\frac{r}{h_2}; \frac{r}{h_2}\right]$ удовлетворяют следующему неравенству:

$$\left(U^\pm(\widetilde{\sigma}) + \widetilde{\sigma}\lambda_1\right)^2 + \widetilde{\sigma}^2\lambda_2^2 - R^2 < 0. \tag{8}$$

Тогда система (1) имеет предельный цикл первого рода.

Для доказательства теоремы используется принцип тора [2]. Рассмотрим функции $W_1(z) = l^Tx + \nu\Gamma^{-1}c^Tx - r_1$, $W_2(z) = l^Tx + \nu\Gamma^{-1}c^Tx + r_2$, $V_1(z) = \left(c^Tx - \widetilde{\sigma}h_1\right)^2 +$ $+\widetilde{\sigma}^2h_2^2 - r^2$, $V_2(z) = \left(c^Tx + \widetilde{\sigma}h_1\right)^2 + \widetilde{\sigma}^2\lambda_2^2 - R^2$. Введём следующие обозначения $\Omega_1 =$ $= \{z : W_1(z) \le 0\}$, $\Omega_2 = \{z : W_2(z) \ge 0\}$, $\Omega_3 = \{z : V_1(z) \ge 0\}$, $\Omega_4 = \{z : V_2(z) \le 0\}$, $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3 \cap \Omega_4$. Граница множества Ω примет вид $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3 \cup \partial\Omega_4$, где $\partial\Omega_1 = \{z : W_1(z) = 0, V_1(z) \ge 0, V_2(z) \le 0\}$, $\partial\Omega_2 = \{z : W_2(z) = 0, V_1(z) \ge 0, V_2(z) \le 0\}$, $\partial\Omega_3 = \{z : V_1(z) = 0, W_1(z) \le 0, W_2(z) \ge 0\}$, $\partial\Omega_4 = \{z : V_2(z) = 0, W_1(z) \le 0, W_2(z) \ge 0\}$, причем из условия 4 теоремы следует, что пересечение множеств $\partial\Omega_3$ и $\partial\Omega_4$ пусто. Используя условия теоремы можно показать, что Ω является торроидальным положительно инвариантным множеством, содержащим предельный цикл первого рода.

Пример. Выберем для системы (1) следующие параметры $\alpha_1 = 1.25$, $\beta_1 = 0.0519$, $\xi_1 =$ $= 0.0344$, $\xi_2 = 0.8$, $\Gamma = 1$, $\gamma = 0.4$, $\nu = 0.043$, $\tau = 55.9$, $k = 0.0324$, $\varphi(\sigma) = \sin\sigma -$ $-\gamma$, $h_1 = 0.0044$, $h_2 = 0.9573$, $\lambda_1 = 0.022$, $\lambda_2 = 0.9571$, $R = 0.022$, $r = 0.0054$, $r^* = r_1 =$ $r_2 = 2.983 * 10^{-7}$. В работе [4] показано, что при указанных параметрах система (1) имеет устойчивый предельный цикл первого рода с начальными условиями $x_1 = -0.0004043$, $x_2 =$ $= 0.009401, \sigma = 0.412$.

Для системы (1) актуальным является вопрос о количестве и методах обнаружения неустойчивых циклов, возникающих в результате бифуркации. Численно показывается, что при $\alpha_1 = 0.53$, $\Gamma = 0.59$ система (1) имеет устойчивый предельный цикл первого рода $z_1^+(t)$. Уменьшение параметра Γ до значения 0.2 приводит к появлению у системы (1) устойчивого двухоборотного цикла $z_{2,2}^+(t)$ и неустойчивого однооборотного цикла $z_{2,1}^-(t)$. При $\Gamma = 0.2$ и изменении параметра α_1 до значения 0.502 получим существование одного однооборотного неустойчивого цикла $z_{3,1}^-(t)$, одного двухоборотного неустойчивого цикла $z_{3,2}^-(t)$ и одного четырёхоборотного устойчивого цикла $z_{3,4}^+(t)$, при этом неустойчивый цикл $z_{2,1}^-(t)$ трансформируется в неустойчивый цикл $z_{3,1}^-(t)$. На рисунке 1 изображены циклы $z_{2,1}^-(t)$, $z_{2,2}^+(t)$, а на рисунке 2 циклы $z_{3,1}^-(t)$, $z_{3,2}^-(t)$, , $z_{3,4}^+(t)$.

Для системы (1) проведён мультипликаторный анализ, то есть определены параметры, при которых устойчивый предельный цикл первого рода системы теряет устойчивость, а также определены параметры бифуркации предельного цикла. Зафиксируем параметры

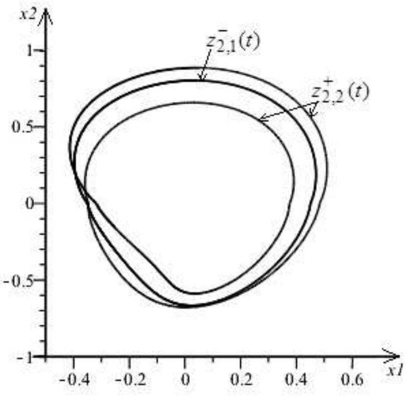

Рис. 1.

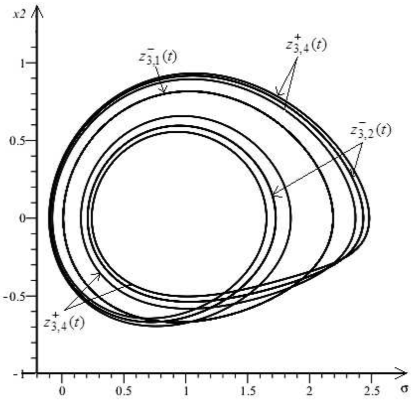

Рис. 2.

$\alpha_1 = 0.53,\ \beta_1 = 0.4,\ \xi_1 = -9,\ \xi_2 = 0.8,\ \Gamma = 0.56,\ \nu = -0.5,\ \tau = 55.9,\ k = 0.282,\ \gamma = 0.67.$ При заданных параметрах система (1) имеет устойчивый предельный цикл первого рода с начальными условиями $x_1 = 0.1825,\ x_2 = 0.90012, \sigma = 0.7342,\ t = 8.1276.$

При $\alpha_1 = 0.53$ и изменении параметра Γ от 0.56 до значения 0.06 получаем, что при $\Gamma = 0.38$ устойчивый однооборотный предельный цикл теряет свою устойчивость и становится неустойчивым. В свою очередь при $\Gamma = 0.2$ и уменьшении параметра α_1 до 0.502 получаем существование неустойчивого однооборотного цикла, а также устойчивого двухоборотного цикла, который теряет свойство устойчивости при $\alpha_1 = 0.5076$. На рисунке 3 построен график одного из мультипликаторов системы (1) при изменении параметра α_1 до значения 0.502, а на рисунке 4 изображены мультипликаторы однооборотного предельного цикла системы (1) при изменении параметра Γ до значения 0.2 и параметра α_1 до 0.502.

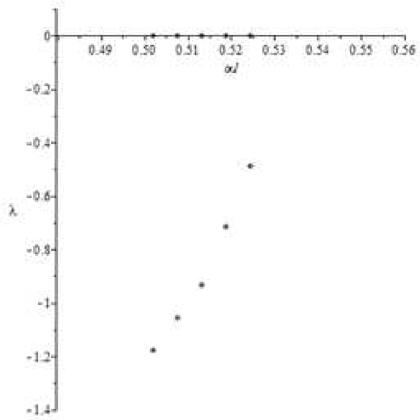

Рис. 3.

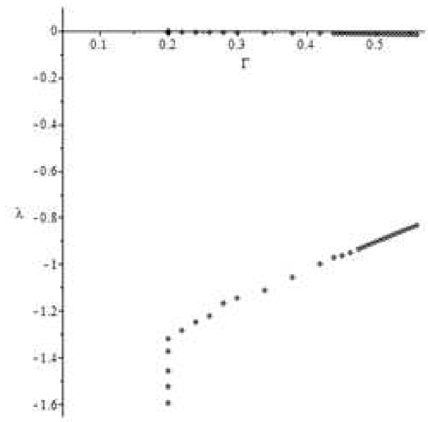

Рис. 4.

В работе для системы дифференциальных уравнений с цилиндрическим фазовым пространством получены условия существования предельных циклов первого рода. Найдены значения параметров бифуркации циклов. Проведен мультипликаторный анализ устойчивости системы (1) и численными методами показано, что система (1), наряду с устойчивым бифуркационным циклом, может содержать неустойчивые циклы первого рода. Практическая значимость полученных результатов заключается в том, что они определяют условия существования квазисинхронных режимов системы ЧФАПЧ [1].

Литература

1. Шалфеев В. Д., Матросов В. В. Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации. Н. Новгород: ННГУ, 2013. 366 с.

2. Леонов Г. А., Буркин И. М., Шепелявый А. И. Частотные методы в теории колебаний. СПб.: СПбГУ, 1992. 368 с.

3. Мамонов С. С., Харламова А. О. Отделение циклов второго рода системы частотно-фазовой автоподстройки частоты // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 15. № 3. С. 97-102.

4. Харламова А. О. Предельные циклы первого рода фазовых систем // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 16. № 3. С. 68-74.

MSC 34C25

Analysis of the scenario of limit cycle bifurcations phase system of differential equations

S.S. Mamonov [1], A.O. Kharlamova [1]

Ryazan State University named after S.A. Yesenina[1]

Abstract: The article deals with a system of differential equations with a cylindrical phase space. For it, using the torus principle, conditions for the existence of limit cycles of the first kind are formulated. For the considered system, a numerical analysis of the scenario of bifurcations of a stable limit cycle is performed depending on the parameters of the system. The question of the number and methods of detection of unstable cycles arising as a result of bifurcation is considered.

Keywords: system of differential equations, torus principle, limit cycle of the first kind, bifurcation, unstable cycle.

References

1. Shalfeev V. D., Matrosov V. V. Nelineynaya dinamika sistem fazovoy sinkhronizatsii [Nonlinear dynamics of phase synchronization systems]. N. Novgorod, Publishing of the NNGU, 2013. 366 p.

2. Leonov G. A., Burkin I. M., Shepelyavyy A. I. Chastotnye metody v teorii kolebaniy [Frequency methods in the theory of vibrations]. SPb., Publishing of the SPbGU, 1992. 368 p.

3. Mamonov S. S., Kharlamova A. O. Otdelenie tsiklov vtorogo roda sistemy chastotno-fazovoy avtopodstroyki chastoty [Separation of cycles of the second kind of frequency-phase-locked loop] // Vestnik RAEN. Differentsial'nye uravneniya [Bulletin of the Russian Academy of Natural Sciences. Differential Equations]. 2015. V. 15. No 3. P. 97-102.

4. Kharlamova A. O. Predel'nye tsikly pervogo roda fazovykh sistem [Limit cycles of the first kind of phase systems] // Vestnik RAEN. Differentsial'nye uravneniya [Bulletin of the Russian Academy of Natural Sciences. Differential Equations]. 2016. V. 16. No 3. P. 68-74.