УДК 517.956.6

Об одной нелокальной краевой задаче с постоянными коэффициентами для уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка в прямоугольнике

С.З. Джамалов[1]

Институт математики Академии наук Узбекистана, г.Ташкент, 100125, Академгородок, ул. Дурмон йули, 29. E-mail: siroj63@mail.ru[1]

Аннотация: Доказывается однозначная разрешимость и гладкость обобщенного решения одной нелокальной краевой задачи с постоянными коэффициентами для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в пространствах Соболева $W_2^{\ell}(Q)$, ($2 \leq \ell$- целое число).

Ключевые слова: Уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка, нелокальная краевая задача с постоянными коэффициентами, единственность, существование и гладкость обобщенного решения, метод "ε-регуляризации,"метод Галеркина.

1. Введение и постановки задачи

В прямоугольнике $Q = (0,\,\ell) \times (0, T) = \{(x, t);\, 0 < x < \ell < +\infty; 0 < t < T < +\infty\}$ рассмотрим уравнения второго порядка

$$Lu = K(t)\, u_{tt} + \alpha\,(x, t)\, u_t - u_{xx} + c\,(x, t)\, u = f(x, t) \tag{1}$$

Пусть $K(0) \leq 0 \leq K(T)$, предположим что, коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции. Уравнение (1) относится к уравнениям смешанного типа второго рода, так как на знак функции $K(t)$ по переменной t внутри области Q не налагается никаких ограничений ([3, 10]).

Нелокальная краевая задача. Найти обобщенное решение уравнения (1) из пространства Соболева $W_2^l(Q)$, ($2 \leq l$ -целое число), удовлетворяющее нелокальным краевым условиям.

$$\gamma \cdot u\,(x, 0) = u\,(x, T), \tag{2}$$

$$\eta \cdot D_x^p u|_{x=0} = D_x^p u|_{x=\ell}, \quad p = 0, 1. \tag{3}$$

где, $D_x^p u = \frac{\partial^p u}{\partial x^p}$, $p = 0, 1$; $D_x^0 u = u$, γ и $\eta-$некоторые постоянные числа, отличные от нуля, величины которого будут уточнено ниже. Различные другие нелокальные краевые задачи для уравнения смешанного типа второго рода (1) изучены в работах ([1], [4]-[8], [12]), а для уравнения смешанного типа первого рода, задача типа (2),(3) предложена и изучена в работе автора ([6]).

В данной работе в случае, когда $K(0) \leq 0 \leq K(T)$, для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка (1) впервые изучаются однозначная разрешимость и гладкость обобщенного решения нелокальной краевой задачи (2),(3)в пространствах Соболева $W_2^{\ell}(Q)$, ($2 \leq \ell$- целое число).

2. Единственность решения задачи

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены вышеуказанные условия для коэффициентов уравнения (1), кроме того, пусть $2\alpha - K_t + \lambda K \geq \delta_1 > 0$, $\lambda\, c - c_t \geq \delta_2 > 0$, где $\lambda = \frac{2}{T}\ln\gamma$, причём $\gamma \in (1,\infty)$, $\eta \in [1,\infty)$, $c(x,0) \leq c(x,T)$. Тогда для любой функции $f(x,t) \in L_2(Q)$ если существует обобщенное решение задачи (1)-(3) в пространстве $W_2^2(Q)$ то, оно единственно и для нее справедливо следующее неравенство

$$\|u\|_1 \leq m\|f\|_0.$$

где $(,)_l$ и $\|\cdot\|_l$ соответственно обычное скалярное произведение и норма из пространства Соболева $W\,{}_2^l(Q)$, ($2 \leq l$-целое число,) а при $l=0$, $W\,{}_2^0(\,Q\,) = L_2(\,Q\,)$ ([3], [9]- [11]).

Через m здесь и далее обозначены положительные, вообще говоря, разные постоянные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть существует обобщенное решение задачи (1)-(3) из пространства $W_2^2(Q)$, тогда для любой функции $u \in W_2^2(Q)$, интегрируя по частям и применяя неравенства Коши с σ ([11]), легко получить следующее тождество

$$\int\limits_Q Lu \cdot \exp(-\lambda\, t - \mu\, x) \cdot u_t dxdt \;\geq\; \int\limits_Q \exp(-\lambda\, t - \mu\, x)\ \{(2a - K_t + \lambda\, K) \cdot u_t^2 + \lambda\ u_x^2 +$$

$$+(\lambda\, c - c_t) \cdot u^2\}\ dxdt + \int\limits_{\partial Q} \exp(-\lambda\, t - \mu\, x)\ \left\{K u_t^{\,2}\, \nu_t - 2 \cdot u_x\, u_t\, \nu_x + u_x^2\, \nu_t + c \cdot u^2\, \nu_t\right\}\ ds -$$

$$-\sigma \cdot \|u_x\|_0^2 - \mu^2 \cdot \sigma^{-1} \cdot \|u_t\|_0^2\,, \tag{4}$$

где $0 < \lambda = \frac{2}{T}\ln\gamma, \gamma \in (1,\infty)$, $0 \leq \mu = \frac{2}{\ell}\ln\eta, \eta \in [1,\infty)$, $\nu = (\nu_t = \cos(\nu,t); \nu_x = \cos(\nu,x))-$ единичный вектор внутренней нормали к границе ∂Q, σ и $\sigma^{-1}-$ коэффициенты неравенства Коши с σ ([11]). Условия теоремы-1 обеспечивают неотрицательность интеграла по области Q. Пусть $u \in W_2^2(Q)$ удовлетворяет краевым условиям (2),(3) учитывая условия теоремы-1 получим, что граничные интегралы положительно определены , т. е.

$$\int\limits_{\partial Q} \exp(-\lambda\, t - \mu\, x)\ \cdot \left\{K(t) u_t^{\,2}\, \nu_t - 2 \cdot u_x\, u_t\, \nu_x + u_x^2\, \nu_t + c \cdot u^2\, \nu_t\right\}\ ds \quad =$$

$$= \int\limits_0^\ell \exp(-\mu x) \cdot \{[K(T)e^{-\lambda T}\gamma^2 - K(0)] \cdot u_t^2(x,0) + [e^{-\lambda T}\gamma^2 - 1] \cdot u_x^2(x,0)\}dx +$$

$$-2[\exp(-\mu\ell) \cdot \eta^2 - 1] \int\limits_0^T \exp(-\lambda t) \cdot u_x(0,t) u_t(0,t) dt +$$

$$+ \int\limits_0^\ell \exp(-\mu x) \cdot \{[c(x,T)e^{-\lambda T}\gamma^2 - c(x,0)] \cdot u^2(x,0)dx \geq$$

$$\geq \int\limits_0^\ell \exp(-\mu x) \cdot [K(T) - K(0)] u_t^2(x,0) dx +$$

$$+ \int\limits_0^\ell \exp(-\mu x) \cdot \{[c(x,T)e^{-\lambda T}\gamma^2 - c(x,0)] \cdot u^2(x,0)dx \geq 0. \tag{5}$$

Учитывая выше сказанное, из неравенства (4),(5) получим следующее неравенство

$$\int\limits_Q Lu \cdot \exp(-\lambda\, t-\mu\, x)\cdot u_t dxdt \ \geq \ \int\limits_Q \exp(-\lambda\, t-\mu\, x)\ \{(2\alpha-K_t+\lambda K\ )\cdot u_t^2+\lambda\ u_x^2+$$

$$+(\lambda\, c-c_t)\cdot u^2\}\ dxdt+\int\limits_0^\ell \exp(-\mu x)\cdot[K(T)e^{-\lambda T}\gamma^2-K(0)]u_t^2(x,0)dx+$$

$$+\int\limits_0^\ell \exp(-\mu x)\cdot\{[c(x,T)e^{-\lambda T}\gamma^2-c(x,0)]\cdot u^2(x,0)dx-$$

$$-\sigma\cdot\|u_x\|_0^2-\mu^2\cdot\sigma^{-1}\cdot\|u_t\|_0^2\,. \tag{6}$$

Выбирая коэффициенты $\lambda-\sigma\geq\lambda_0>0,\quad \delta_1-\mu^2\sigma^{-1}>\delta_0>0$, и отбрасывая положительный граничный интеграл из неравенства (6) получим необходимую первую оценку,

$$\|u\|_1\leq m\|f\|_0,$$

из которой следует единственность обобщенное решение решения задачи (1)-(3) из пространства $W_2^2(Q)$ ([10, 11]).

Тем самым доказана теорема1.

3. Уравнения составного типа

Для доказательства существования решения задачи (1)-(3) из используем метод "ε-регуляризации"в сочетании с методом Галеркина ([3], [5]- [7]).

Рассмотрим нелокальную задачу для уравнения составного типа

$$L_\varepsilon u_\varepsilon=-\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\Delta u_\varepsilon+Lu_\varepsilon=f(x,t), \tag{7}$$

$$\gamma\cdot D_t^q u_\varepsilon|_{t=0}=D_t^q u_\varepsilon|_{t=T}\ ,\qquad q=0,1,2, \tag{8}$$

$$\eta\cdot D_x^p u_\varepsilon|_{x=0}=D_x^p u_\varepsilon|_{x=\ell},\quad p=0,1. \tag{9}$$

где $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}-$ оператор Лапласа в плоскости, $D\,{}_t^q u=\frac{\partial\,{}^q u}{\partial\, t\,{}^q}$, $q=0,1,2;\ \ D\,{}_t^0 u=u$, ε -достаточно малое положительное число, $\eta,\ \gamma-const\ \ \neq 0$ такие, что $\gamma\in(1,\infty);\ \ \eta\in[1,\infty)$.

Ниже используем уравнение составного типа (7) в качестве ε -регуляризирующего уравнения для уравнения (1) ([3], [5]- [7]).

В дальнейшим через W всюду ниже будем обозначать класс функций $u_\varepsilon(x,t)\in W_2^2(Q)$, $\frac{\partial}{\partial t}\Delta u_\varepsilon\in L_2(Q)$, удовлетворяющих соответствующим условиям (8),(9).

Определение. Регулярным решением задачи (7)-(9) будем называть функцию $u_\varepsilon(x,t)\in W$, удовлетворяющую уравнению (7).

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены вышеуказанные условия для коэффициентов уравнения (1), кроме того, пусть $2\alpha-|K_t|+\lambda K\geq\delta_1>0$, $\lambda\ c-c_t\geq\delta_2>0$, где $\lambda=\frac{2}{T}\ln\gamma$, причем $\gamma\in(1,\infty)$, $\eta\in[1,\infty)$, $\alpha(x,0)=\alpha(x,T), \alpha(0,t)=\alpha(\ell,t)\ \ c(x,0)=c(x,T)$, Тогда для любой функции $f, f_t\in L_2(Q)$ такой что, $\gamma\cdot f(x,0)=f(x,T)$ существует единственное регулярное решение задачи (7)-(9) и для нее справедливы следующие оценки.

$$I).\quad \varepsilon\cdot(\|u_{\varepsilon tt}\|_0^2+\|u_{\varepsilon tx}\|_0^2)+\|u_\varepsilon\|_1^2\leq m\,\|f\|_0^2\,,$$

$$II).\quad \varepsilon\cdot\left\|\frac{\partial}{\partial t}\Delta u_\varepsilon\right\|_0^2+\|u_\varepsilon\|_2^2\leq m\ \left[\|f\|_0^2+\|f_t\|_0^2\right]\ .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\phi_j(x,t)-$ собственные функции следующей задачи

$$-\Delta\phi_j = \frac{\partial^2\phi_j}{\partial^2 t} + \frac{\partial^2\phi_j}{\partial^2 x} = \mu_j^2\phi_j; \tag{10}$$

$$D_t^p\phi_j|_{t=0} = D_t^p\phi_j|_{t=T}\ , \quad p=0,1; \tag{11}$$

$$D_x^p\phi_j|_{x=0} = D_x^p\phi_j|_{x=\ell}. \tag{12}$$

Решая задачи (10)-(12) имеем $\phi_j(x,t) = T_j(t)\cdot X_j(x)$ где $\mu_j^2 = (\nu_j^2 + \tau_j^2)$; $\quad \tau_j = \frac{2\pi\, j}{T}$, $\nu_j = \frac{2j\pi}{\ell}$; $\quad j \in N_0 = N \cup \{0\}$, $N-$множества натуральных чисел, собственные функции $T_j(t) = \{\frac{1}{\sqrt{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}}\cos\tau_j t, \sqrt{\frac{2}{T}}\sin\tau_j t\}$, $X_j(x) = \{\frac{1}{\sqrt{\ell}}, \sqrt{\frac{2}{\ell}}\cos\nu_j x, \sqrt{\frac{2}{\ell}}\sin\nu_j x\}$, являются решениями спектральное задачи Штурм- Лиувиля с периодическими условиями. Известно, что система собственных функций $\{\phi_j(x,t)\}-$ фундаментальна в пространстве $W_2^2(Q)$ и в $L_2(Q)$ образует ортонормированный базис ($[2,11]$).

Теперь с помощью этих последовательностей функций построим решение вспомогательной задачи

$$\ell\omega_j = e^{\frac{-(\lambda\cdot t+\mu\cdot x)}{2}}\frac{\partial\omega_j}{\partial t} = \phi_j, \tag{13}$$

$$\gamma\cdot\omega_j(x,0) = \omega_j(x,T), \tag{14}$$

где, $\gamma - const \quad \neq 0$ такое, что $\gamma \in (1,\infty)$. Очевидно, что задача (13),(14) однозначно разрешима и её решение имеет вид

$$\ell^{-1}\phi_j = \omega_j = e^{\frac{\mu\cdot x}{2}}\cdot[\int_0^t \exp(\frac{\lambda\tau}{2})\phi_j d\tau + \frac{1}{\gamma-1}\int_0^T \exp(\frac{\lambda t}{2})\,\phi_j dt]. \tag{15}$$

Ясно, что функции $\omega_j(x,t)$ линейно независимы. Действительно, если $\sum\limits_{j=1}^N c_j\omega_j = 0$ для какого-нибудь набора последовательность $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N$ функций, то, действуя на эту сумму оператором ℓ, имеем $\sum\limits_{j=1}^N c_j\ell\omega_j = \sum\limits_{j=1}^N c_j\phi_j = 0$, отсюда следует, что для всех $j = \overline{1,N}$ коэффициенты $c_j = 0$. Отметим, что из построения функции $\phi_j(x,t)$ вытекают следующие условия на функции $\omega_j(x,t)$.

$$\gamma\cdot D_t^q\omega_j|_{t=0} = D_t^q\omega_j|_{t=T}\ , \quad q=0,1,2 \tag{16}$$

$$\eta\cdot D_x^p\omega_j|_{x=-1} = D_x^p\omega_j|_{x=1}, \quad p=0,1. \tag{17}$$

Теперь приближенное решение задачи (7)-(9) ищем в виде $w = u_\varepsilon^N = \sum\limits_{j=1}^N c_j\omega_j$, где коэффициенты c_j для любого $j = \overline{1,N}$ определяются как решение линейной алгебраической системы

$$\int_Q L_\varepsilon u_\varepsilon^N\cdot e^{\frac{-(\lambda\cdot t+\mu\cdot x)}{2}}\,\phi_j\,dxdt \;=\; \int_Q f\cdot e^{\frac{-(\lambda\cdot t+\mu\cdot x)}{2}}\,\phi_j\,dxdt \tag{18}$$

Докажем однозначно разрешимость алгебраической системы (18). Умножая каждое уравнение из (18) на коэффициент $2c_j$ и суммируя по индексу j от 1 до N, учитывая задачи (13),(14) из (18) получим следующее тождество

$$\int_Q L_\varepsilon w\cdot e^{-(\lambda\cdot t+\mu\cdot x)}\cdot\, w_t dxdt = \int_Q f\cdot e^{-(\lambda\cdot t+\mu\cdot x)}\cdot w_t dxdt, \tag{19}$$

Из которого, в силу условия теоремы-2, интегрированием тождества (19) получим для приближенного решения задачи (7)-(9) оценки I), т.е.

$$\varepsilon \cdot (\left\| u^N_{\varepsilon tt} \right\|^2_0 + \left\| u^N_{\varepsilon tx} \right\|^2_0) + \left\| u^N_{\varepsilon} \right\|^2_1 \leq m \, \| f \|^2_0 . \tag{20}$$

Отсюда вытекает разрешимость системы (18). В частности, из оценки (20) получим существование слабого обобщенного решения задачи (7)-(9)([9]- [11]).

Теперь докажем вторую априорную оценку II).

Благодаря задаче (10)-(14), из тождества (18) получим

$$-\frac{1}{\mu_j^2} \int\limits_Q L_\varepsilon w \cdot e^{\frac{-(\lambda\cdot t+\mu\cdot x)}{2}} \cdot \Delta\ell\omega_j \, dxdt \; = \; -\frac{1}{\mu_j^2} \int\limits_Q f \cdot e^{\frac{-(\lambda\cdot t+\mu\cdot x)}{2}} \cdot \Delta\ell\omega_j \, dxdt \tag{21}$$

где,

$$\Delta \, \ell \, \omega_j = \exp \; [\; \frac{-(\lambda \, t + \mu \, x)}{2}] \cdot (\Delta \, \omega_{j_t} - \lambda \, \omega_{j_{tt}} - \mu \, \omega_{j_{xx}} + \frac{\lambda^{\,2} + \mu^{\,2}}{4} \omega_{j_t}); \;\; \Delta \, \omega_j = \omega_{j_{tt}} + \omega_{j_{xx}} \; .$$

Умножая каждое уравнение из (21) на $2\mu_j^2 c_j$ и суммируя по индексу j от 1 до N, учитывая условия (16),(17), из (21) получим следующее тождество

$$-2 \int\limits_Q L_\varepsilon w \;\cdot e^{\frac{-(\lambda\cdot t+\mu\cdot x)}{2}} \cdot \Delta \, \ell \, w \, dxdt \quad = \; -2 \int\limits_Q f \cdot \; e^{\frac{-(\lambda\cdot t+\mu\cdot x)}{2}} \cdot \Delta \, \ell \, w \; dxdt \tag{22}$$

Интегрируя (22) с учетом условия теоремы-2 и краевых условий (16),(17), получим следующее неравенство

$$m\cdot \left[\, \|f_t\|_0^2 + \|f\|_0^2 \right] \geq \varepsilon \, \left\| \, \frac{\partial \, \Delta w}{\partial \; t} \, \right\|_0^2 + \int\limits_Q e^{-(\lambda\cdot t+\mu\cdot x)} \left\{ (\, 2\alpha - |K_t| + \lambda \, K \,) \, w^{\,2}_{\,tt} + (2\alpha - |K_t| + \lambda \, K \,) w^{\,2}_{\,tx} + \right.$$

$$\left. + \lambda \, w^{\,2}_{\,xx} + \lambda \, w^{\,2}_{\,tx} \right\} dxdt \quad + \int\limits_{\partial Q} e^{-(\lambda\cdot t+\mu\cdot x)} [(K \, w_{tt}^2 - 2\alpha \, w_t \, w_{tt} + w_{xx}^2 + 2w_{xx} \, w_{tt} - w_{xt}^2 + K w_{xt}^2 +$$

$$+ 2c \, w \, (w_{tt} + w_{xx}) \nu_t + (-2K \, w_{tt} \, w_{xt} - 2w_{tt} \, w_{xt} + 2\alpha \, w_t \, w_{xt}) \, \nu_x] ds - \sigma \, (\; \|w_{xx}\|_0^2 + \|w_{xt}\|_0^2 \,)$$

$$-\mu^2 \sigma^{-1} \, \|u_{tt}\|_0^2 - m \, (\, \|f\|_0^2) = \sum_{i=1}^{2} J_i, \tag{23}$$

где, J_1 − интеграл по области, J_2 - интеграл по границе. Выбирая коэффициенты $\lambda - \sigma \geq \lambda_0 > 0$; $\delta_1 - \mu^2 \sigma^{-1} > \delta_0 > 0$, учитывая условие теоремы-2 и краевые условия (16),(17), получим, что $J_1 > 0$ и $J_2 \geq 0$.

Теперь из неравенства (23) получим необходимую вторую оценку

$$\varepsilon \cdot \left\| \frac{\partial}{\partial t} \Delta u^N_\varepsilon \right\|_0^2 + \left\| u^N_\varepsilon \right\|_2^2 \leq m \cdot \; \left[\|f\|_0^2 + \|f_t\|_0^2 \right] \, . \tag{24}$$

Следовательно, полученные оценки (20),(24) позволяют выполнить предельный переход по $N \to \infty$ и заключить, что некоторая подпоследовательность $\left\{ u^{N_k}_\varepsilon \right\}$ сходится в силу единственности (теорема 1) в $L_2(Q)$ вместе с производными первого и второго порядка к искомому регулярному решению $u_\varepsilon(x,t)$ задачи (7)-(9), обладающему свойствами, указанными в теореме-2 ([5]- [7], [9]- [12]).

Для $u_\varepsilon(x,t)$ в силу (24) справедливо следующее неравенство

$$\varepsilon \left\| \frac{\partial}{\partial t} \Delta u_\varepsilon \right\|_0^2 + \|u_\varepsilon\|_2^2 \leq m \;\; \left[\; \|f\|_0^2 + \|f_t\|_0^2 \right] \; . \tag{25}$$

Тем самым доказана теорема 2.

4. Существования решения задачи

Теперь с помощью метода "ε -регуляризации"докажем разрешимость задачи (1)-(3).

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены все условия теоремы-2. Тогда обобщенное решение задачи (1)-(3)из пространства $W_2^2(Q)$ существует и единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Единственность обобщенного решения задачи (1)-(3) из $W_2^2(Q)$ доказана в теореме 1. Теперь докажем существование обобщенного решения задачи (1)-(3) из $W_2^2(Q)$. Для этого рассмотрим в области уравнение (7) с краевыми условиями (8),(9) при $\varepsilon > 0$. Так как выполнены все условия теоремы-2, то существует единственное регулярное решение задачи (7)-(9) при $\varepsilon > 0$ и для нее справедливы первая и вторая оценка. Отсюда следует, что из множества функций $\{u_\varepsilon\}, \varepsilon > 0$ можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность функций такую что, $\{u_{\varepsilon_i}\} \to u$ при $\varepsilon_i \to 0$.

Покажем, что предельная функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению $Lu = f$.

В самом деле, последовательность $\{u_{\varepsilon_i}\}$ слабо сходится в $W_2^2(Q)$ и так как последовательность $\{\frac{\partial \Delta u_{\varepsilon_i}}{\partial t}\}$ равномерно ограничена в $L_2(Q)$, а оператор $L-$ линейный, то имеем

$$Lu - f = Lu - Lu_{\varepsilon_i} + \varepsilon_i \frac{\partial \Delta u_{\varepsilon_i}}{\partial t} = L(u - u_{\varepsilon_i}) + \varepsilon_i \frac{\partial \Delta u_{\varepsilon_i}}{\partial t} \tag{26}$$

Из равенства (26), переходя к пределу при $\varepsilon_i \to 0$, получим единственное решение задачи (1)-(3) из пространства $W_2^2(Q)$ ([3], [5]- [7]). **Таким образом, теорема 3 доказана.**

5. Гладкость обобщенного решения

Теперь докажем более общий случай, когда $l \geq 3$. Всюду ниже для простоты предполагаем, что коэффициенты уравнения (1) бесконечно дифференцируемы в замкнутой области $\overline{Q}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены условия теоремы 3, кроме того, пусть,

$$2(\alpha + pK_t) - |K_t| + \lambda K \geq \delta > 0,$$

$D_t^p K|_{t=0} = D_t^p K|_{t=T}$, $D_t^p \alpha|_{t=0} = D_t^p \alpha|_{t=T}$; $D_t^p c|_{t=0} = D_t^p c|_{t=T}$. Тогда для любой функции $f(x,t)$, такой что $f \in W_2^p(Q)$, $\quad D_t^{p+1} f \in L_2(Q)$, $\gamma D_t^p f|_{t=0} = D_t^p f|_{t=T}$, существует, и притом единственное, обобщенное решение задачи (1)-(3) из пространства $W_2^{p+2}(Q)$, где $p = 1, 2, 3, ...$

Доказательство. Из гладкости решения задачи (10)-(14) возникает следующее условие для приближенного решения задачи (7)-(9)

$w = u_\varepsilon^N \in C^\infty(Q)$;

$$\gamma \cdot D_t^q w|_{t=0} = D_t^q w|_{t=T}, \quad q = 0, 1, 2, ...$$

$$\eta \cdot D_x^p w|_{x=0} = D_x^p w|_{x=\ell}, \quad p = 0, 1$$

Учитывая условия теоремы 2 при $\varepsilon > 0$ и нелокальные условия при $t = 0$, $t = T$, из равенства

$$(^{-\frac{\lambda t}{2}} \cdot L_\varepsilon u_\varepsilon)|_{t=0}^{t=T} = (-\varepsilon \cdot e^{\frac{-\lambda t}{2}} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \Delta u_\varepsilon + e^{\frac{-\lambda t}{2}} \cdot Lu_\varepsilon)|_{t=0}^{t=T} = (e^{\frac{-\lambda t}{2}} \cdot f(x,t))|_{t=0}^{t=T}$$

получим $\|\gamma \cdot u_{\varepsilon\, ttt}(x,0) - u_{\varepsilon\, ttt}(x,T)\|_0 \leq const$.

Отсюда следует, что функция $v_\varepsilon(x,t) = u_{\varepsilon\, t}(x,t)$ принадлежит классу W и удовлетворяет следующему уравнению

$$P_\varepsilon v_\varepsilon = L_\varepsilon v_\varepsilon = f_t - \alpha_t\, u_{\varepsilon t} - c_t\, u_\varepsilon = F_\varepsilon. \tag{27}$$

Из теоремы 2 следует, что семейство функций $\{F_\varepsilon\}$ равномерно ограничено в пространстве $L_2(Q)$, т.е.

$$\|F_\varepsilon\|_0 \leq m \ \left[\ \|f\|_0^2 + \|f_t\|_0^2 \right] .$$

Далее из условий теоремы 3 легко получить, что оператор $P_\varepsilon\,(\varepsilon > 0)$ удовлетворяет условиям теоремы 4, отсюда на основании оценки I, II теоремы 2 для функции $\{v_\varepsilon\}$ получим аналогичные оценки

$$\varepsilon \cdot (\left\| \frac{\partial^2}{\partial t^2} v_\varepsilon \right\|_0^2 + \left\| \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} v_\varepsilon \right\|_0^2) + \|v_\varepsilon\|_1^2 \leq m\,(\|f\|_0^2 + \|f_t\|_0^2), \tag{28}$$

$$\varepsilon \cdot \left\| \frac{\partial}{\partial t} \Delta v_\varepsilon \right\|_0^2 + \|v_\varepsilon\|_2^2 \leq m \ \left[\|f\|_1^2 + \|f_{tt}\|_0^2 \right] . \tag{29}$$

Далее, функция $\{\,u_\varepsilon\}$ удовлетворяет параболическому уравнению с условиями (2),(3)

$$Pu_{\,\varepsilon} = u_{\ \varepsilon\, t} - u_{\,\varepsilon\, xx} = f + \varepsilon \frac{\partial}{\partial\, t} \Delta\, u_{\,\varepsilon} - K(t) u_{\varepsilon\ \ tt} - (\,\alpha\, - 1)\, u_{\,\varepsilon\, t} - c\, u_{\,\varepsilon} = \quad \Phi_\varepsilon\ , \tag{30}$$

причем $\Phi_\varepsilon \in L_2(Q)$, в силу вышедоказанного, семейство функций $\{\Phi_\varepsilon\}$ равномерно ограничено в пространстве $W\ _2^2(\,Q\,)$, т.е.

$$\|\Phi_\varepsilon\|_0^2 \leq m \left[\|f\|_1^2 + \|f_{tt}\|_0^2 \right] \leq m\, \|f\|_2^2\ . \tag{31}$$

Отсюда на основании априорных оценок для параболических уравнений ([11]) и неравенства (29) получим

$$\|\, u_\varepsilon\|_3^2 \leq m\, \|f\|_2^2\, .$$

Далее аналогично доказываются неравенства ([3], [5]- [7], [11]).

$$\|u_\varepsilon\|_{p+2}^2 \leq m\, \|f\|_{p+1}^2\ ,$$

где $p = 2, 3, ...$

Тем самым доказана теорема 4.

6. Заключение

В данной работе в случае, когда $K(0) \leq 0 \leq K(T)$ для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка (1) доказано однозначная разрешимость и гладкость обобщенного решения нелокальной краевой задачи (2),(3) в пространствах Соболева $W\,_2^\ell(Q)$, $(2 \leq \ell$- целое число).

Литература

1. Алимов Н.А. О нелокальной краевой задаче для одного неклассического уравнения. В. кн: Теория и методы решения некорректно поставленных задач и их приложения. Новосибирск. 1983. С. 237-239.

2. Березинский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев. «Наукова думка». 1965. С. 798.

3. Врагов В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск. «НГУ». 1983. С. 84.

4. Глазатов С.Н. Нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного типа в прямоугольнике // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26. №. 6. С. 162 - 164.

5. Джамалов С.З. Об одной нелокальной краевой задачи для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка // Узб. мат. журн. 2014. № 1. С. 5 - 14.

6. Джамалов С.З. Об одной нелокальной краевой задаче с постоянными коэффициентами для уравнения Трикоми // Узб. мат. журн. 2016. № 2. С. 51 - 60.

7. Djamalov S.Z. On the correctness of a nonlocal problem for the second order mixed type equations of the second kind in a rectangle // IIUM journal. 2016. Vol. 17. No. 2. P. 95 - 104.

8. Каратопраклиева М.Г.Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения смешанного типа // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27. С. 68 - 79.

9. Кожанов А.И. Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка. Учебное пособие. Новосибирск. «НГУ». 1990. С. 130.

10. Кузьмин А.Г. Неклассические уравнения смешенного типа и их приложения к газодинамике. Ленинград. «ЛГУ». 1990. С. 204.

11. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. Москва: «Наука». 1973. С. 407.

12. Терехов А.Н. "Нелокальные краевые задачи для уравнений переменного типа". В кн: Неклассические уравнения математической физики, ИМ СО АН СССР, Новосибирск. 1985. С. 148-158.

MSC 35M10, 35M20

The nonlocal boundary value problem with constant coefficients for the mixed type of equation of the second kind the second order in a rectangle

S.Z. Dzhamalov[1]

Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, 100125, Academgorodok, Do'rmon yo' li, 29 str. E-mail: siroj63@mail.ru [1]

Abstract: In the present work for the second order mixed type equation of the second kind we study unique solvability and smoothness of the generalized solution of nonlocal boundary value problem with constant coefficients in Sobolev,s spaces.

Keywords: second order mixed type equation of the second kind, Sobolev space, Galerkin's and "ε-regularization"methods.

References

1. Alimov N.A. [On a nonlocal boundary value problem for a non-classical equation]. //In book [The theory and methods for solving ill-posed problems and their applications], Novosibirsk, Publishing of the "NGU". 183. P. 237 – 239.
2. Berezinsky Yu.M. [Expansion in eigenfunctions of selfadjoint operators]. Kyev, Publishing of the "Naukova dumka". 1965. P. 798.
3. Vragov V.N.[Boundary problems for non-classical equations of mathematical physics]. Novosibirsk,Publishing of the "NGU", 1983. P. 84.
4. Glazatov S.N. [Nonlocal boundary problems for mixed type equations in a rectangle]. [Siberian Math. Journ.]. 1985. Vol. 26. No. 6. P. 162 – 164.
5. Dzhamalov S.Z. [About one nonlocal boundary value problem for the equation of the mixed type of the second kind of the second order]. [Uzbek mathematical journal]. 2014. No. 1. P. 5 – 14.
6. Dzhamalov.S.Z.[The nonlocal boundary value problem with constant coefficients for the equation of Trikomi]. [Uzbek mathematical journal]. 2016. No. 2. P. 51 – 60.
7. Djamalov S.Z. On the correctness of a nonlocal problem for the second order mixed type equations of the second kind in a rectangle. IIUM journal. 2016. Vol. 17. No. 2. P. 95 - 104.
8. Karatopraklieva M.G. [A nonlocal boundary-value problem for an equation of mixed type]. [Differents Uravneniy]. 1991. Vol. 27, No. 1. P. 68 – 79.
9. Kozhanov A.I. [Boundary problems for equations of mathematical physics of odd order]. Novosibirsk, Publishing of the "NGU". 1990.
10. Kuzmin A.G. [Non-classical mixed type equations and their applications to the gas dynamics]. Leningrad, Publishing of the "LGU". 1990.
11. Ladyjenskaya O.A. [Boundary problems of mathematical physics]. Moscow, Publishing of the "Nauka". 1973.

12. Terekhov A.N. [Nonlocal boundary problems for equations of variable type]. In book [Non-classical equations of mathematical physics]. Novosibirsk, Publishing of the "NGU". 1985. P. 148 – 158.