УДК 519.217.2

Математическая модель медицинского страхования

С.И. Спивак [1], Г.К. Хисаметдинова [1]

Башкирский государственный университет, г.Уфа[1]

На основе теории марковских процессов разработана математическая модель медицинского страхования, выписана соответствующая модели система дифференциальных уравнений Колмогорова и соответствующая ей графическая интерпретация. Сформулированы прямая и обратная задача для математических моделей медицинского страхования. В результате решения обратной задачи находятся интенсивности переходов между различными состояниями процесса, сохраняющие неизменными страховые тарифы. Решение двойственных задач позволяет оценить чувствительность границ интервалов к вариации исходных статистических данных. Проведен актуарный анализ математической модели медицинского страхования профилактики и лечения сахарного диабета. Разработанные математическая модель и компьютерная программа использованы при анализе реальных данных по заболеванию сахарным диабетом. Исследования проходились над реальными данными, предоставлеными Медицинским Информационно-Аналитическим Центром при Министерстве Здравоохранения Республики Башкортостан. Проведенные исследования дают специалистам по медицинскому страхованию реальные механизмы расчета страховых тарифов

Ключевые слова: Марковские процессы, интенсивности перехода, вероятность, уравнение Колмогорова.

Научное направления, изучающее применение математических методов и моделей в страховании, именуется актуарная математика. Примером такого процесса многих состояний являются задачи медицинского страхования. Картина заболеваемости той или иной болезнью может быть описана методом математического моделирования с помощью марковских процессов. Теория марковских процессов имеет большое применение при моделировании ситуаций как процессов многих состояний. Модель многих состояний применяется для описания состояний застрахованного лица [1] - [3].

В качестве примера рассмотрим процесс заболевания сахарным диабетом с четырьмя состояния системы:

A_1 - «здоров»,

A_2 – «болен сахарным диабетом инсулин независим»,

A_3 – «болен сахарным диабетом инсулин зависим»,

A_4 – «умер»,

где λ_{ij} - интенсивности переходов из одного состояния в другое.

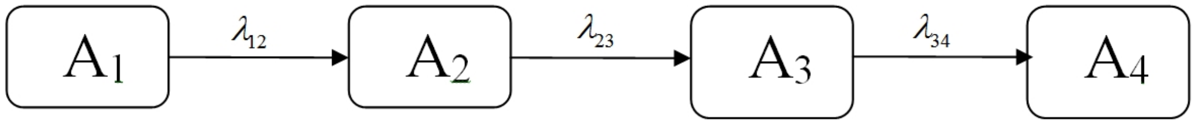

Рис. 1. Граф состояний.

Для нахождения вероятностей присутствия индивида в том или ином состоянии составим уравнения Колмогорова. Система дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dp_1(t)}{dt} = -\lambda_{12}p_1(t), \\ \frac{dp_2(t)}{dt} = \lambda_{12}p_1(t) - \lambda_{23}p_2(t), \\ \frac{dp_3(t)}{dt} = \lambda_{23}p_2(t) - \lambda_{34}p_3(t), \\ \frac{dp_4(t)}{dt} = \lambda_{34}p_3(t). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $p_i(t)$ $(i = \overline{1,4})$ вероятность состояния A_i.

При задании начальных условий предполагается, что первоначально система находится в состоянии «здоров». Таким образом, эти условия имеют следующий вид:

$$p_1(0) = 1,\ p_2(0) = 0,\ p_3(0) = 0,\ p_4(0) = 0 \tag{2}$$

Кроме того, для любого момента времени t выполняется нормировочное условие:

$$p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) + p_4(t) = 1 \tag{3}$$

Когда интенсивности переходов известны, ситуация сводится к прямой задаче – решению уравнений Колмогорова. Но если интенсивности переходов неизвестны, возникает обратная задача, то есть задача оценивания интенсивностей переходов по статистическим данным.

Для прямой и обратной задачи разработана программа на языке программирования C++. Методом Кутта—Мерсона рассчитываются вероятности нахождения системы в том или ином состоянии при средних значениях интенсивностей, которые были найдены на основе статистической информации.

Найдем интенсивности переходов для математической модели. Для вероятности p_1 выражаем интенсивность перехода по формуле $\lambda_{12} = -\frac{ln(\frac{p_1}{0,998458})}{t}$. Значение других находим из статистической информации и находим среднее значение для всех интенсивностей:

$$\lambda_{12} = 0,001395776, \lambda_{23} = 0,000121424, \lambda_{34} = 0,000020951.$$

На основании средних значений показателей интенсивностей с помощью программы получаем расчетные значения вероятностей нахождения системы в состояниях A_1 - «здоров», A_2 – «болен сахарным диабетом инсулин независим», A_3 – «болен сахарным диабетом инсулин зависим», A_4 – «умер».

Графическое сравнение экспериментальных и расчетных данных приведено на рисунках (Рис. 2). Видно, что расчет достаточно хорошо сопоставим с экспериментом.

Сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными дает основание утверждать, что модель, описываемая системой (1), адекватна реальным данным и может быть использована при практических расчетах определения интервалов необходимых средств для лечения сахарного диабета.

Определим область неопределенности по интенсивностям λ_{ij} как решение системы неравенств [4]:

$$|p_i^{\text{ст}} - p_i^{\text{р}}| \leq \varepsilon_i, \tag{4}$$

где $p_i^{\text{ст}}$ - табличные(статистические) данные по вероятности, $p_i^{\text{р}}$ - вероятности, рассчитанные по системе (1).

В результате вычислений получили интервалы изменения интенсивностей:

$$\lambda_{12} = [0,001; 0,0031], \lambda_{23} = [0,00001; 0,2108], \lambda_{34} = [0,000001; 0,0281].$$

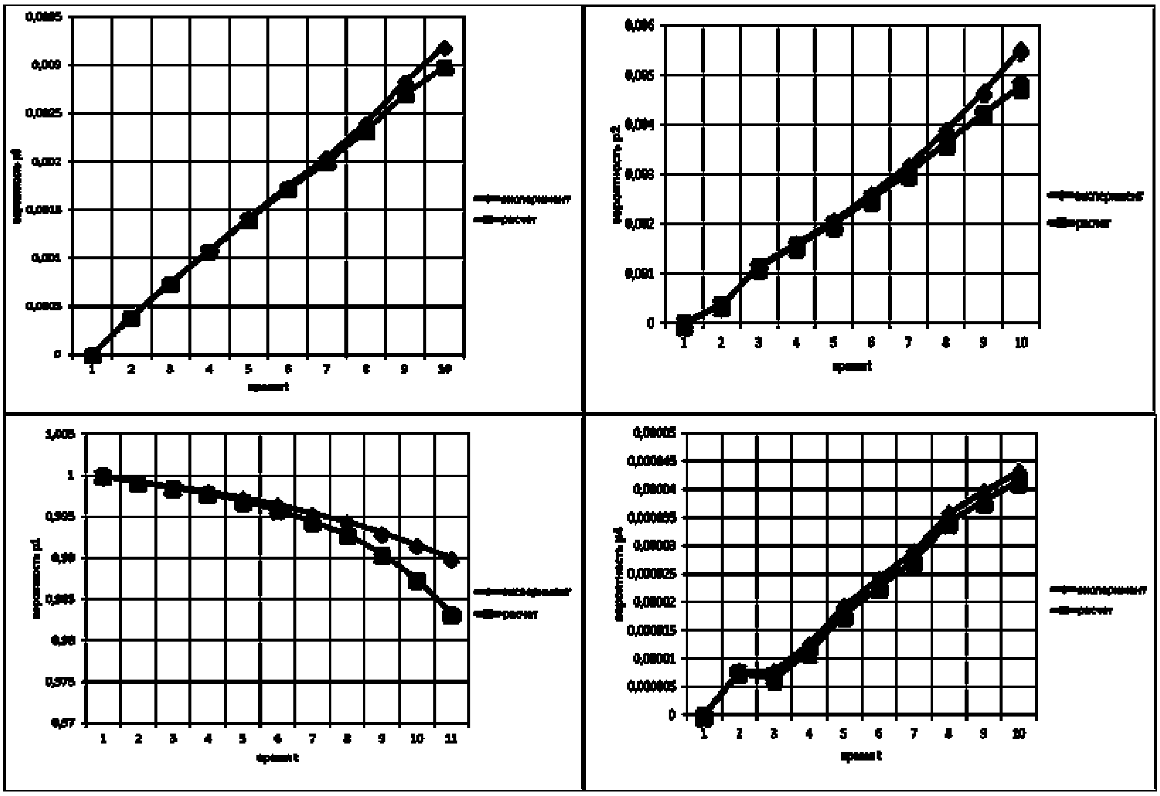

Рис. 2. Сравнение расчетных и экспериментальных данных.

На основе математических ожиданий численности количества больных определены величины расходов на медицинскую помощь больным сахарным диабетом $[8,3*109; 5,89*1011]$. Из интервала изменения интенсивности перехода был построен интервал изменения средств, необходимых для лечения больных сахарным диабетом $[5,3*1010; 8,2*1010]$. Найденный интервал входит в интервал изменения средств, выделяемых для борьбы с сахарным диабетом. Рассчитанный по модели интервал требуемых средств на медицинское страхование по лечению сахарного диабета сопоставим с реальным.

Таким образом данный метод определения интервала изменения требуемых средств на медицинское страхование позволяет эффективно решать задачи, возникающие в страховании.

Литература

1. Г.К. Райманова. Математическое моделирование в задачах медицинского страхования профилактики и лечения туберкулеза. Диссертация / Уфа, 2009. 100 с.

2. С.И. Спивак, Г.К. Райманова, С.Р.Абдюшева. Обратные задачи для марковских моделей медицинского страхования // Страховое дело – 2008. № 9(188) С. 36-42.

3. Спивак С.И., Райманова Г.К. Математическая модель процесса заболевания туберкулезом// Системы управления и информационные технологии, 2009, 2.2(36). С. 293-297.

4. Канторович Л.В. Сибирский математический журнал, 1962, Т. 3, № 5, С. 701-709.

MSC 60J28

Mathematical model of medical insurance

S.I. Spivak[1], G.K. Khisametdinova[2]

Professor, head of department of mathematical modeling, Bashkir State University, Ufa; semen.spivak@mail.ru [1],
Associate professor at the department ofmathematical modeling, Bashkir State University, Ufa; gulli_rgk@mail.ru [2]

Based on the theory of Markov processes, a mathematical model of health insurance, issued the corresponding model system of the differential Kolmogorov equations and the corresponding graphical interpretation. Formulated direct and inverse problem for mathematical models of medical insurance. The result of solving the inverse problem are the intensity of transitions between different States of the process, preserving constant insurance rates. The solution to the dual problems allows to assess the sensitivity of the boundaries of the intervals to the variation of initial statistical data. Conducted actuarial analysis of mathematical model for medical insurance prevention and treatment of diabetes. The mathematical model and computer program used in the analysis of real data on the disease diabetes. The study was held over real data, to provide Medical Information and Analytical Centre under the Ministry of Health of the Republic of Bashkortostan. The conducted studies give the specialists in health insurance the actual mechanism of calculation of insurance rates.

Keywords: Markov processes, the intensity of the transition, probability, Kolmogorov equation.

References

1. G.K. Raymanova. Matematicheskoe modelirovanie v zadachakh meditsinskogo strakhovaniya profilaktiki i lecheniya tuberkuleza [Mathematical modeling in tasks of medical insurance of prophylaxis and treatment of tuberculosis]. Dissertatsiya / Ufa, 2009. 100 p.

2. S.I. Spivak, G.K. Raymanova, S.R.Abdyusheva. Obratnye zadachi dlya markovskikh modeley meditsinskogo strakhovaniya [The Return tasks for Markov models of medical insurance]. // Strakhovoe delo [Insurance business] 2008. No. 9(188) P. 36-42.

3. Spivak S.I., Raymanova G.K. Matematicheskaya model' protsessa zabolevaniya tuberkulezom [Mathematical model of process of a disease of tuberculosis]// Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii [Control systems and information technologies], 2009, 2.2(36). P. 293-297.

4. Kantorovich L.V. Sibirskiy matematicheskiy zhurnal [Siberian mathematical magazine]. 1962. V.3, No. 5. P. 701-709.