УДК 517+531.01

Интегрируемые системы с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия*

М.В. Шамолин[1]

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова[1]

Аннотация: Во многих задачах динамики возникают механические системы с пространствами положений — двумерными многообразиями. Фазовыми пространствами таких систем естественным образом становятся касательные расслоения к ним. Так, например, изучение пространственного маятника на сферическом шарнире в потоке среды приводит к динамической системе на касательном расслоении к двумерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий. В данном случае динамические системы обладают переменной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Известен также класс задач о движении точки по двумерной поверхности, при этом метрика на ней индуцирована евклидовой метрикой всеобъемлющего пространства. В работе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательных расслоениях к двумерным многообразиям. При этом силовые поля обладают переменной диссипацией и обобщают ранее рассмотренные.

Ключевые слова: динамическая система, переменная диссипация, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл

1. Уравнения геодезических на касательном расслоении к двумерному многообразию

1.1. Общие обозначения

Рассмотрим гладкое двумерное риманово многообразие M^2 с метрикой g_{ij}, которая в заданных локальных координатах $x = (x^1, x^2)$ на многообразии порождает аффинную связность $\Gamma^i_{jk}(x)$.

Рассмотрим также касательное расслоение $T_*M^2\{z_2, z_1; x^1, x^2\}$, где $z = (z_2, z_1)$ — координаты в касательном пространстве.

Если $z_i = \dot{x}^i, i = 1, 2$, то уравнения геодезических линий на нем примут вид

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{11}(x)(\dot{x}^1)^2 + 2\Gamma^i_{12}(x)(\dot{x}^1)(\dot{x}^2) + \Gamma^i_{22}(x)(\dot{x}^2)^2 = 0, \ i = 1, 2. \tag{1}$$

1.2. Специальные обозначения

Обозначим для наглядности в случае двумерного многообразия координаты (x^1, x^2) через (α, β). Тогда уравнения (1) на касательном расслоении $T_*M^2\{\dot{\alpha}, \dot{\beta}; \alpha, \beta\}$ примут вид

$$\begin{aligned} &\ddot{\alpha} + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha, \beta)\dot{\alpha}^2 + 2\Gamma^\alpha_{\alpha\beta}(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta} + \Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha, \beta)\dot{\beta}^2 = 0, \\ &\ddot{\beta} + \Gamma^\beta_{\alpha\alpha}(\alpha, \beta)\dot{\alpha}^2 + 2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta} + \Gamma^\beta_{\beta\beta}(\alpha, \beta)\dot{\beta}^2 = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (Грант № 15-01-00848 «Растекание по поверхностям и выдавливание из тонких слоёв и конфузоров материалов с нелинейными физико-механическими свойствами и внутренней структурой»)

Пример 1. В случае сферических координат (α, β), когда метрика на двумерной сфере индуцирована евклидовой метрикой трехмерного пространства, уравнения (2) примут вид [4]

$$\ddot{\alpha} - \dot{\beta}^2 \sin\alpha\cos\alpha = 0, \ \ddot{\beta} + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 0, \tag{3}$$

т.е. ненулевые коэффициенты связности примут вид

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta) = -\sin\alpha\cos\alpha, \ \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Пример 2. В случае сферических координат (α, β), но когда метрика на двумерной сфере индуцирована метрикой специального силового поля (см. [2,3]), уравнения (2) примут вид

$$\ddot{\alpha} - \dot{\beta}^2 \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0, \ \ddot{\beta} + \dot{\alpha}\dot{\beta}\frac{1+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha} = 0, \tag{4}$$

т.е. ненулевые коэффициенты связности примут вид

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta) = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \ \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) = \frac{1+\cos^2\alpha}{2\cos\alpha\sin\alpha}.$$

1.3. Замены координат касательного пространства

Одной из целей исследования является изучение структуры уравнений (1) при изменении координат на касательном расслоении T_*M^2.

Рассмотрим замену координат касательного пространства:

$$\dot{\alpha} = R_1 z_1 + R_2 z_2, \ \dot{\beta} = R_3 z_1 + R_4 z_2, \tag{5}$$

которую можно обратить:

$$z_1 = T_1\dot{\alpha} + T_2\dot{\beta}, \ z_2 = T_3\dot{\alpha} + T_4\dot{\beta}, \tag{6}$$

при этом $R_k, T_k, k = 1, \ldots, 4,$ — функции от α, β, а также $RT = E$, где

$$R = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix}, \ T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix}.$$

Назовем также уравнения (5) (или (6)) *новыми кинематическими соотношениями*, т.е. соотношениями на касательном расслоении T_*M^2. Справедливы тождества:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= T_{1\alpha}\dot{\alpha}^2 + T_{1\beta}\dot{\alpha}\dot{\beta} + T_{2\alpha}\dot{\alpha}\dot{\beta} + T_{2\beta}\dot{\beta}^2 + T_1\ddot{\alpha} + T_2\ddot{\beta}, \\ \dot{z}_2 &= T_{3\alpha}\dot{\alpha}^2 + T_{3\beta}\dot{\alpha}\dot{\beta} + T_{4\alpha}\dot{\alpha}\dot{\beta} + T_{4\beta}\dot{\beta}^2 + T_3\ddot{\alpha} + T_4\ddot{\beta}, \end{aligned} \tag{7}$$

$$T_{k\alpha} = \frac{\partial T_k}{\partial\alpha}, \ T_{k\beta} = \frac{\partial T_k}{\partial\beta}, \ k = 1, \ldots, 4.$$

Подставляя в (7) уравнения (2), имеем:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 = \dot{\alpha}^2\{T_{1\alpha} - T_1\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha} - T_2\Gamma^{\beta}_{\alpha\alpha}\} + \dot{\alpha}\dot{\beta}\{T_{1\beta} + T_{2\alpha} - 2T_1\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} - 2T_2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\} + \\ + \dot{\beta}^2\{T_{2\beta} - T_1\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta} - T_2\Gamma^{\beta}_{\beta\beta}\}, \\ \dot{z}_2 = \dot{\alpha}^2\{T_{3\alpha} - T_3\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha} - T_4\Gamma^{\beta}_{\alpha\alpha}\} + \dot{\alpha}\dot{\beta}\{T_{3\beta} + T_{4\alpha} - 2T_3\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} - 2T_4\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\} + \\ + \dot{\beta}^2\{T_{4\beta} - T_3\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta} - T_4\Gamma^{\beta}_{\beta\beta}\}, \end{aligned} \tag{8}$$

при этом в последней системе вместо $\dot{\alpha}, \dot{\beta}$ надо подставить формулы (5).

Предложение 1. *Система (2) в той области, где* $\det R(\alpha,\beta)\neq 0$, *эквивалентна составной системе (5), (8).*

Таким образом, результат перехода от уравнений геодезических (2) к эквивалентной системе уравнений (5), (8) зависит как от замены переменных (5) (или (6)) (т.е. вводимых кинематических соотношений), так и от аффинной связности Γ^i_{jk}.

Следствие 1. *В случае сферических координат* (α,β), *когда метрика на двумерной сфере индуцирована евклидовой метрикой трехмерного пространства (см. также пример 1), система, эквивалентная уравнениям геодезических (3), примет следующий вид:*

$$\dot\alpha=-z_2,\ \dot z_2=-z_1^2\frac{1}{\cos\alpha\sin\alpha},\ \dot z_1=z_1z_2\frac{1}{\cos\alpha\sin\alpha},\ \dot\beta=z_1\frac{1}{\cos\alpha\sin\alpha},\tag{9}$$

если первое и четвертое уравнения системы (9) рассматривать как новые кинематические соотношения.

Следствие 2. *В случае сферических координат* (α,β), *но когда метрика на двумерной сфере индуцирована метрикой специального силового поля (см. [2, 5, 6], а также пример 2), система, эквивалентная уравнениям геодезических (4), примет следующий вид:*

$$\dot\alpha=-z_2,\ \dot z_2=-z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \dot z_1=z_1z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \dot\beta=z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\tag{10}$$

если первое и четвертое уравнения системы (10) рассматривать как новые кинематические соотношения.

1.4. Полный список первых интегралов для уравнений геодезических

Рассмотрим достаточно общий случай задания кинематических соотношений в следующем виде:

$$\dot\alpha=-z_2,\ \dot\beta=z_1f(\alpha),\tag{11}$$

где $f(\alpha)$ — достаточно гладкая функция. Тогда справедливо утверждение.

Предложение 2. *В случае (11) уравнения (8) примут вид*

$$\begin{gathered}\dot z_1=-\tfrac{1}{f(\alpha)}\Gamma^\beta_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)z_2^2+\left[2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)+\tfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_2-f(\alpha)\Gamma^\beta_{\beta\beta}(\alpha,\beta)z_1^2,\\ \dot z_2=\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)z_2^2-2\Gamma^\alpha_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)f(\alpha)z_1z_2+f^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta)z_1^2.\end{gathered}\tag{12}$$

Таким образом, уравнения геодезических (2) после соответствующего выбора кинематических соотношений почти всюду эквивалентны составной системе (11), (12) на многообразии $T_*M^2\{z_2,z_1;\alpha,\beta\}$.

Для полного интегрирования системы (11), (12) четвертого порядка необходимо знать, вообще говоря, три независимых первых интеграла.

Следствие 3. *Если выполнены следующие свойства*

$$\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\equiv\Gamma^\alpha_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)\equiv\Gamma^\beta_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\equiv\Gamma^\beta_{\beta\beta}(\alpha,\beta)\equiv 0,\tag{13}$$

то система, эквивалентная уравнениям геодезических (2), может быть приведена к следующему виду:

$$\dot\alpha=-z_2,\ \dot z_2=\Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)z_1^2,\ \dot z_1=\left[2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_2,\ \dot\beta=z_1f(\alpha).\tag{14}$$

Предложение 3. *Если всюду справедливо равенство*

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)+2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\equiv 0, \tag{15}$$

то система (14) имеет аналитический первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_1(z_2,z_1)=z_1^2+z_2^2=C_1^2=const. \tag{16}$$

Предложение 4. *Если функция $\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)$ является функцией лишь α:*

$$\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)=\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha), \tag{17}$$

то система (14) имеет первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_2(z_1;\alpha)=z_1\Phi_0(\alpha)=C_2=const,\ \Phi_0(\alpha)=f(\alpha)\exp\left\{2\int_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(b)db\right\}. \tag{18}$$

Если выполнено свойство (17) и функция $\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta)$ также является функцией лишь α:

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta)=\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha), \tag{19}$$

то в системе (14) появляется независимая подсистема третьего порядка, состоящая из первых трех уравнений (уравнение на $\dot\beta$ отделяется):

$$\dot\alpha=-z_2,\ \dot z_2=\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha)f^2(\alpha)z_1^2,\ \dot z_1=\left[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_2, \tag{20}$$

$$\dot\beta=z_1f(\alpha). \tag{21}$$

В частности, если выполнены свойства (15), (17), то такая независимая подсистема (20) появляется.

Предложение 5. *Если выполнены условия (15), (17), то система (20), (21) имеет первый интеграл следующего вида:*

$$\Phi_3(z_2,z_1;\alpha,\beta)=\beta\pm\int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{C_2f(a)}{\sqrt{C_1^2\Phi_0^2(a)-C_2^2}}\,da=C_3=const, \tag{22}$$

где, после взятия интеграла (22), вместо постоянных C_1,C_2 нужно подставить левые части равенств (16), (18), соответственно.

Теорема 1. *Если выполнены условия (15), (17), то система (20), (21) обладает полным набором (тремя) независимых первых интегралов вида (16), (18), (22).*

2. Уравнения движения на касательном расслоении к двумерному многообразию в потенциальном силовом поле

2.1. Приведенная система

Теперь несколько модифицируем систему (14). При этом получим систему консервативную. А именно, наличие силового поля характеризует коэффициент $F(\alpha)$ во втором уравнении системы (23) (в отличие от системы (14)). Рассматриваемая система на касательном расслоении $T_*M^2\{z_2,z_1;\alpha,\beta\}$ примет вид

$$\begin{gathered}\dot\alpha=-z_2,\ \dot z_2=F(\alpha)+\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)z_1^2,\ \dot z_1=\left[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)+\tfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_2,\\ \dot\beta=z_1f(\alpha).\end{gathered} \tag{23}$$

Система (23) почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\ddot\alpha+F(\alpha)+\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta)\dot\beta^2=0,\ \ddot\beta+2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta=0. \tag{24}$$

2.2. Полный список первых интегралов для системы в потенциальном силовом поле

Предложение 6. *Если всюду справедливо равенство (15) то система (23) имеет аналитический первый интеграл следующего вида:*

$$\Phi_1(z_2, z_1; \alpha) = z_1^2 + z_2^2 + F_1(\alpha) = C_1 = const, \; F_1(\alpha) = 2\int_{\alpha_0}^{\alpha} F(a)da. \tag{25}$$

Предложение 7. *Если функция $\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha, \beta)$ является функцией лишь α (условие (17)), то система (23) имеет первый интеграл следующего вида:*

$$\Phi_2(z_1; \alpha) = z_1\Phi_0(\alpha) = C_2 = const, \; \Phi_0(\alpha) = f(\alpha)\exp\left\{2\int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(b)db\right\}. \tag{26}$$

Если выполнено свойство (17) и функция $\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha, \beta)$ также является функцией лишь α (условие (19)) то в системе (23) появляется независимая подсистема третьего порядка, состоящая из первых трех уравнений (уравнение на $\dot\beta$ отделяется):

$$\dot\alpha = -z_2, \; \dot z_2 = F(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha)f^2(\alpha)z_1^2, \; \dot z_1 = \left[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_2, \tag{27}$$

$$\dot\beta = z_1 f(\alpha). \tag{28}$$

В частности, если выполнены свойства (15), (17), то такая независимая подсистема (27) появляется.

Предложение 8. *Если выполнены условия (15), (17), то система (27), (28) имеет первый интеграл следующего вида:*

$$\Phi_3(z_2, z_1; \alpha, \beta) = \beta \pm \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{C_2 f(a)}{\sqrt{\Phi_0^2(a)(C_1 - F_1(a)) - C_2^2}}\, da = C_3 = const, \tag{29}$$

где, после взятия интеграла (29), вместо постоянных C_1, C_2 нужно подставить левые части равенств (25), (26), соответственно.

Теорема 2. *Если выполнены условия (15), (17), то система (27), (28) обладает полным набором (тремя) независимых первых интегралов вида (25), (26), (29).*

3. Уравнения движения на касательном расслоении к двумерному многообразию в силовом поле с диссипацией

3.1. Приведенная система

Теперь несколько модифицируем систему (23). При этом получим систему с диссипацией. А именно, наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует коэффициент $bg(\alpha), b > 0$, в первом уравнении системы (30) (в отличие от системы (23)). Рассматриваемая система на касательном расслоении $T_*M^2\{z_2, z_1; \alpha, \beta\}$ примет вид

$$\begin{gathered}\dot\alpha = -z_2 + bg(\alpha), \; \dot z_2 = F(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha, \beta)f^2(\alpha)z_1^2, \; \dot z_1 = \left[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) + \tfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_2, \\ \dot\beta = z_1 f(\alpha).\end{gathered} \tag{30}$$

Система (30) почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\ddot\alpha - bg'(\alpha)\dot\alpha + F(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha, \beta)\dot\beta^2 = 0, \; \ddot\beta - bg(\alpha)f(\alpha)\dot\beta + 2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha, \beta)\dot\alpha\dot\beta = 0. \tag{31}$$

3.2. Полный список первых интегралов для системы с диссипацией

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы четвертого порядка (30) при выполнении свойств (15), (17). Тогда система (30) допускает отделение независимой подсистемы третьего порядка:

$$\dot{\alpha} = -z_2 + bg(\alpha),\ \dot{z}_2 = F(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha) f^2(\alpha) z_1^2,\ \dot{z}_1 = \left[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_2, \tag{32}$$

$$\dot{\beta} = z_1 f(\alpha). \tag{33}$$

Для начала сопоставим системе третьего порядка (32) неавтономную систему второго порядка

$$\frac{dz_2}{d\alpha} = \frac{F(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha) f^2(\alpha) z_1^2}{-z_2 + bg(\alpha)},\ \frac{dz_1}{d\alpha} = \frac{\left[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_2}{-z_2 + bg(\alpha)}. \tag{34}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$z_k = u_k g(\alpha),\ k = 1, 2, \tag{35}$$

приводим систему (34) к следующему виду:

$$\begin{gathered} g(\alpha)\tfrac{du_2}{d\alpha} + g'(\alpha) u_2 = \tfrac{F(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha) f^2(\alpha) g^2(\alpha) u_1^2}{-u_2 g(\alpha) + bg(\alpha)}, \\ g(\alpha)\tfrac{du_1}{d\alpha} + g'(\alpha) u_1 = \tfrac{\left[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] g^2(\alpha) u_1 u_2}{-u_2 g(\alpha) + bg(\alpha)}, \end{gathered} \tag{36}$$

что, учитывая (15), почти всюду эквивалентно

$$\begin{gathered} g(\alpha)\tfrac{du_2}{d\alpha} = \tfrac{F_3(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha) f^2(\alpha) g(\alpha) u_1^2 + g'(\alpha) u_2^2 - bg'(\alpha) u_2}{-u_2 + b}, \\ g(\alpha)\tfrac{du_1}{d\alpha} = \tfrac{-\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha) f^2(\alpha) g(\alpha) u_1 u_2 + g'(\alpha) u_1 u_2 - bg'(\alpha) u_1}{-u_2 + b},\ F_3(\alpha) = \tfrac{F(\alpha)}{g(\alpha)}. \end{gathered} \tag{37}$$

Теперь для интегрирования системы (37) потребуем выполнения следующих двух условий.

- Для некоторого $\kappa \in \mathbf{R}$ должно выполняться равенство

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha) f^2(\alpha) = \kappa \frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)}; \tag{38}$$

- Для некоторого $\lambda \in \mathbf{R}$ должно выполняться равенство

$$F_3(\alpha) = \lambda g'(\alpha). \tag{39}$$

Условия (38) и (39) можно переписать соответственно как

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha) f^2(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln|g(\alpha)|; \tag{40}$$

$$F(\alpha) = \lambda \frac{d}{d\alpha} \frac{g^2(\alpha)}{2}. \tag{41}$$

Действительно, после выполнения условий (38) и (39) (или (40) и (41)) система (37) приводится к уравнению первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda + \kappa u_1^2 + u_2^2 - bu_2}{(1-\kappa) u_1 u_2 - bu_1}. \tag{42}$$

Уравнение (42) имеет вид уравнения Абеля [1,8,9]. В частности, при $\kappa = -1$ оно имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 - bu_2 + \lambda}{u_1} = C_1 = \text{const}, \tag{43}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(z_2, z_1; \alpha) = \frac{z_2^2 + z_1^2 - bz_2 g(\alpha) + \lambda g^2(\alpha)}{z_1 g(\alpha)} = C_1 = \text{const}. \tag{44}$$

Если α — периодическая координата периода 2π, то система (32) (как часть системы (32), (33)) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним [2,7]. При этом она превращается в систему консервативную при $b = 0$:

$$\dot{\alpha} = -z_2,\ \dot{z}_2 = F(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha) f^2(\alpha) z_1^2,\ \dot{z}_1 = \left[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_2. \tag{45}$$

Система (45) обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (25), (26). Преобразуем их. В силу (39) (или (41)) имеем:

$$\Phi_1(z_2, z_1; \alpha) = z_1^2 + z_2^2 + 2\int_{\alpha_0}^{\alpha} F(a)da = z_1^2 + z_2^2 + \lambda \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d}{da} g^2(a) da \cong z_1^2 + z_2^2 + \lambda g^2(\alpha), \tag{46}$$

где "$\cong$" означает равенство с точностью до аддитивной постоянной.

Далее, в силу (15) имеем:

$$\Phi_2(z_1; \alpha) = z_1 f(\alpha) \exp\left\{2\int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(b)db\right\} = z_1 f(\alpha) \exp\left\{-\int_{\alpha_0}^{\alpha}\left[\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(b) f^2(b) + \frac{d\ln|f(b)|}{db}\right] db\right\} \cong$$

$$\cong z_1 \exp\left\{-\int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(b) f^2(b) db\right\},$$

где "$\cong$" означает равенство с точностью уже до мультипликативной постоянной.

Теперь, в силу (38) (или (40)) последняя величина при $\kappa = -1$ перепишется в виде

$$z_1 \exp\left\{\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d}{db} \ln|g(b)| db\right\} \cong z_1 g(\alpha) \tag{47}$$

с точностью до мультипликативной постоянной.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (46), (47) (или (25), (26)) также является первым интегралом системы (45). Но при $b \neq 0$ каждая из функций

$$z_2^2 + z_1^2 - bz_2 g(\alpha) + \lambda g^2(\alpha) \tag{48}$$

и (47) по отдельности не является первым интегралом системы (32). Однако отношение функций (48), (47) является первым интегралом системы (32) (при $\kappa = -1$) при любом b.

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (32) при $\kappa = -1$. Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (43) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + C_1^2}{4} - \lambda. \tag{49}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b^2 + C_1^2 - 4\lambda \geq 0, \tag{50}$$

и фазовое пространство системы (32) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (49).

Таким образом, в силу соотношения (43) первое уравнение системы (37) при условиях (38) и (39) и при $\kappa = -1$ примет вид

$$\frac{g(\alpha)}{g'(\alpha)}\frac{du_2}{d\alpha} = \frac{2(\lambda - bu_2 + u_2^2) - C_1 U_1(C_1, u_2)}{-u_2 - b_*}, \tag{51}$$

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2}\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + \lambda)}\}, \tag{52}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (50).

Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (32) примет вид

$$\int \frac{dg(\alpha)}{g(\alpha)} = \int \frac{(b - u_2)du_2}{2(\lambda - bu_2 + u_2^2) - C_1\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 + b_* u_2 + \lambda)}\}/2}. \tag{53}$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна $\ln|g(\alpha)|$. Если

$$u_2 - \frac{b}{2} = r_1,\ b_1^2 = b^2 + C_1^2 - 4\lambda, \tag{54}$$

то правая часть равенства (53) примет вид

$$-\frac{1}{4}\int \frac{d(b_1^2 - 4r_1^2)}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} - b\int \frac{dr_1}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}}{C_1} \pm 1\right| \mp \frac{b}{2}I_1, \tag{55}$$

$$I_1 = \int \frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}(r_3 \pm C_1)},\ r_3 = \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}. \tag{56}$$

При вычислении интеграла (56) возможны три случая.

I. $b > 2$.

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{b^2-4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b^2-4} + \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{b^2-4}}\right| +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{b^2-4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b^2-4} - \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{b^2-4}}\right| + \mathrm{const}. \tag{57}$$

II. $b < 2$.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4-b^2}}\arcsin\frac{\pm C_1 r_3 + b_1^2}{b_1(r_3 \pm C_1)} + \mathrm{const}. \tag{58}$$

III. $b = 2$.

$$I_1 = \mp\frac{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{C_1(r_3 \pm C_1)} + \mathrm{const}. \tag{59}$$

Возвращаясь к переменной

$$r_1 = \frac{z_2}{g(\alpha)} - \frac{b}{2}, \tag{60}$$

имеем окончательный вид для величины I_1:

I. $b > 2$.

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{b^2-4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b^2-4} \pm 2r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{b^2-4}}\right| +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{b^2-4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b^2-4}\mp 2r_1}{\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1}\mp\frac{C_1}{\sqrt{b^2-4}}\right|+\text{const}. \tag{61}$$

II. $b<2$.

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{4-b^2}}\arcsin\frac{\pm C_1\sqrt{b_1^2-4r_1^2}+b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1)}+\text{const}. \tag{62}$$

III. $b=2$.

$$I_1=\mp\frac{2r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1)}+\text{const}. \tag{63}$$

Итак, только что был найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (27) при $\kappa=-1$ — предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных.

В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (43).

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(z_2,z_1;\alpha)=G\left(g(\alpha),\frac{z_2}{g(\alpha)},\frac{z_1}{g(\alpha)}\right)=C_2=\text{const}. \tag{64}$$

Таким образом, для интегрирования системы четвертого порядка (27), (28) при некоторых условиях уже найдены два независимых первых интеграла системы (27). Для полной же ее интегрируемости достаточно найти еще один (дополнительный) первый интеграл, "привязывающий" уравнение (28).

Поскольку

$$g(\alpha)\frac{du_1}{d\alpha}=\frac{u_1((1-\kappa)u_2-b)g'(\alpha)}{b-u_2},\ g(\alpha)\frac{d\beta}{d\alpha}=\frac{u_1g(\alpha)f(\alpha)}{b-u_2}, \tag{65}$$

то

$$\frac{du_1}{d\beta}=[(1-\kappa)u_2-b]\frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)f(\alpha)}. \tag{66}$$

Опуская дальнейшие выкладки, заключаем, что искомый дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_3(z_2,z_1;\alpha,\beta)=G_1\left(g(\alpha),\beta,\frac{z_2}{g(\alpha)},\frac{z_1}{g(\alpha)}\right)=C_2=\text{const}. \tag{67}$$

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (32), (33) имеет три первых интеграла, выражающихся соотношениями (44), (64), (67), являющихся трансцендентными функциями фазовых переменных (в смысле комплексного анализа).

Теорема 3. *Система (32), (33) обладает полным набором (тремя) независимых первых интегралов. При $\kappa=-1$ они имеют вид (44), (64), (67).*

4. Заключение

Напомним, что самому понятию интегрируемости придают различные значения в соответствии с тем, в каких функциях производится интегрирование (аналитических, гладких, мероморфных и др.), каким образом понимается смысл интегрируемости. В данной работе обсуждается вопрос интегрируемости систем обыкновенных дифференциальных уравнений в классе трансцендентных функций, т.е. функций, которые после продолжения в комплексную область имеют существенно особые точки. Понятие интегрируемости в классе трансцендентных функций возникает по причине наличия у системы асимптотических (притягивающих или отталкивающих) предельных множеств, т.е. множеств, окрестности которых состоят из многообразий размерности выше 1, полностью притягиваемых или отталкиваемых данными предельными множествами.

Более того, если разрыв трансцендентных интегралов происходит на асимптотических предельных множествах (т.е. на целых многообразиях), то удается выяснить наличие в системе предельных циклов. И хотя в последнем случае трансцендентный первый интеграл, как правило, не выражается через элементарные функции, он имеет многообразие неизолированных существенно особых точек.

Литература

1. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. Москва: ВИНИТИ, 1985. 304 с.

2. Шамолин М.В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. Москва: Изд-во “Экзамен”, 2007. 352 с.

3. Шамолин М.В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фундаментальная и прикладная математика. 2008. Т. 14. Вып. 3. С. 3 – 237.

4. Трофимов В.В., Шамолин М.В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундаментальная и прикладная математика. 2010. Т. 16. Вып. 4. С. 3 – 229.

5. Шамолин М.В. Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил // Итоги науки и техники. Сер. «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». 2013. Т. 125. С. 5 – 254.

6. Шамолин М.В. Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения // Фундаментальная и прикладная математика. 2015. Т. 20. Вып. 4. С. 3 – 231.

7. Шамолин М.В. Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования // Доклады РАН. 2015. Т. 464. №. 6. С. 688 – 692.

8. Шамолин М.В. Многомерный маятник в неконсервативном силовом поле при наличии линейного демпфирования // Доклады РАН. 2016. Т. 470. №. 3. С. 288 – 292.

9. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемости систем с диссипацией на касательных расслоениях к двумерной и трехмерной сферам // Доклады РАН. 2016. Т. 471. №. 5. С. 547 – 551.

MSC 37C, 37J, 70F

Integrable systems with dissipation on the tangent bundle of two-dimensional manyfold

M.V. Shamolin[1]

Lomonosov Moscow State University[1]

Abstract: The mechanical systems with position spaces as two-dimensional manifolds are arising in many problems of dynamics. The phase spaces of such systems naturally become the tangent bundles to them. For example, the study of three-dimensional pendulum on a spherical hinge in a medium flow leads to a dynamical system on the tangent bundle to two-dimensional sphere with a special metric on it. This metric is induced by an additional group of symmetries. In this case the dynamical systems have the variable dissipation, and the complete list of first integrals consists of the transcendental functions expressed in terms of a finite combination of elementary functions. There is also a class of problems on the motion of a point in two-dimensional surface with the metric which is induced by the Euclidean metric of a comprehensive space. The activity shows the integrability of certain classes of dynamical systems on the tangent bundles of two-dimensional manifolds. In this case, the force fields have the variable dissipation and generalize the previously considered.

Keywords: dynamical system, variable dissipation, integrability, transcendental first integral

References

1. Arnol'd V.I., Kozlov V.V., Neishtadt A.I. Matematicheskie aspekty klassicheskoy i nebesnoy mekhaniki [Mathematical aspects of classical and celestial mechanics]. Moscow, Publishing of VINITI, 1985. 304 p.

2. Shamolin M.V. Metody analiza dinamicheskikh sistem s peremennoy dissipatsiey v dinamike tverdogo tela [Methods of analysis of variable dissipation dynamical systems in dynamics of a rigid body]. Moscow, Publishing of "Ekzamen", 2007. 352 p.

3. Shamolin M.V. Dinamicheskie sistemy s peremennoy dissipatsiey: podkhody, metody, prilozheniya [Dynamical systems with variable dissipation: approaches, methods, and applications]. // Fundamentalnaya i prikladnaya matematika [Fundamental and applied mathematics]. 2008. V. 14. No. 3. P. 3 – 237.

4. Trofimov V.V., Shamolin M.V. Geometricheskie i dinamicheskie invarianty integriruemykh gamil'tonovykh i dissipativnykh sistem [Geometric and dynamical invariants of integrable Hamiltonian and dissipative systems]. // Fundamentalnaya i prikladnaya matematika [Fundamental and applied mathematics]. 2010. V. 16. No. 4. P. 3 – 229.

5. Shamolin M.V. Mnogoobrazie sluchaev integriruemosti v dinamike malomernogo i mnogomernogo tverdogo tela v nekonservativnom pole sil [Variety of integrable cases in dynamics of low- and multi-dimensional rigid bodies in nonconservative force fields]. // Itogi nauki i tekhniki. Ser. "Sovremennaya matematika i ee prilozheniya. Tematicheskie obzory" [Contemporary mathematics and its applications. Thematic surveys]. 2013. V. 125. P. 5 – 254.

6. Shamolin M.V. Integriruemye sistemy s peremennoy dissipatsiey na kasatel'nom rassloenii k mnogomernoy sfere i prilozheniya [Integrable variable dissipation systems on the tangent

bundle of a multi-dimensional sphere and some applications]. // Fundamentalnaya i prikladnaya matematika [Fundamental and applied mathematics]. 2015. V. 20. No. 4. P. 3 – 231.

7. Shamolin M.V. Polniy spisok pervikh integralov uravneniy dvizheniya mnogomernogo tverdogo tela v nekonservativnom pole pri nalichii lineynogo dempfirovaniya [Complete list of the first integrals of dynamic equations of a multidimensional solid in a nonconservative field under the assumption of linear damping]. // Doklady RAN [Doklady physics]. 2015. V. 464. No. 6. P. 688 – 692.

8. Shamolin M.V. Mnogomerniy mayatnik v nekonservativnom silovom pole pri nalichii lineynogo dempfirovaniya [A multidimensional pendulum in a nonconservative force field under the presence of linear damping]. // Doklady RAN [Doklady physics]. 2016. V. 470. No. 3. P. 288 – 292.

9. Shamolin M.V. Novye slushai integriruemosti sistem s dissipatsyey na kasatel'nykh rassloeniyakh k dvumernoy i trekhmernoy sferam [New cases of integrable systems with dissipation on tangent bundles of two- and three-dimensional spheres]. // Doklady RAN [Doklady physics]. 2016. V. 471. No. 5. P. 547 – 551.