

УДК 517.977:539.3

Наиточнейший нагрев неограниченной пластины с учетом ограничений на термонапряжения

Морозкин Н.Д.¹, Морозкин Н.Н.¹, Садрисламов М.Ф.¹
 ФГБОУ ВО Уфимский университет науки и технологий¹

Аннотация: Исследуется задача определения изменения во времени температуры греющей среды, позволяющей за фиксированное время получить конечное распределение температуры в теле, максимально близкое к заданной. При этом требуется, чтобы растягивающие и сжимающие термонапряжения, возникающие вследствие неравномерного нагрева, не привели к разрушению нагреваемого изделия. Рассматриваются материалы, у которых пределы прочности на сжатие и растяжение существенно зависят от температуры, а теплофизические коэффициенты и другие механические характеристики можно считать постоянными. Предложен алгоритм поиска оптимального управления в случае нагрева одномерной неограниченной пластины. Результаты расчетов приведены при отсутствии фазовых ограничений.

Ключевые слова: оптимальное управление, теплопроводность, термонапряжения, метод Фурье, метод условного градиента.

1. Постановка задачи

Процесс осесимметричного нагрева неограниченной пластины внешними тепловыми источниками описывается уравнениями:

$$c\rho \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad x \in (0, \bar{x}), \quad t \in (0, \bar{t}), \quad 0 < \bar{t} < \infty, \quad (1)$$

$$T(x, 0) = p = \text{const}, \quad x \in [0, \bar{x}], \quad (2)$$

$$\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=\bar{x}} = \alpha(v(t) - T(\bar{x}, t)), \quad t \in [0, \bar{t}], \quad (3)$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad t \in [0, \bar{t}], \quad (4)$$

где t – время, x – пространственная переменная, $T(x, t)$ – температура, c – удельная теплоемкость, ρ – плотность материала, α – коэффициент теплообмена, λ – коэффициент теплопроводности, $v(t)$ – температура греющей среды (управление):

$$v(t) \in V, \quad V = \{v(t) : 0 \leq v^- \leq v(t) \leq v^+, v(t) \in L_2[0, \bar{t}]\}. \quad (5)$$

В предположении, что модуль упругости E и коэффициент линейного расширения α_T постоянны, а края пластины жёстко защемлены, в квазистатической постановке задача термоупругости решается аналитически [2]:

$$\frac{\alpha_T E}{1 - \nu} \left(-T(0, t) + \frac{1}{\bar{x}} \int_0^{\bar{x}} T(x, t) dx \right) \leq \sigma_p(T(0, t)), \quad (6)$$

$$\frac{\alpha_T E}{1 - \nu} \left(T(\bar{x}, t) + \frac{1}{\bar{x}} \int_0^{\bar{x}} T(x, t) dx \right) \leq \sigma_c(T(\bar{x}, t)). \quad (7)$$

Здесь ν — коэффициент Пуассона, σ_c и σ_p — соответственно пределы прочности на сжатие и растяжение.

Задача 1. Требуется определить управление $v^0(t)$, при котором температурное поле в конечный момент времени $\bar{t}$ максимально приближается к заданному распределению температуры $T^*(r)$:

$$J(v) = \int_0^{\bar{x}} (T(r, \bar{t}) - T^*(r))^2 dr \rightarrow \inf, \quad (8)$$

и с заданной точностью будут выполнены неравенства (6)-(7).

Отметим, что в работе [1] рассматривалась подобная задача достижения заданного распределения температуры в теле, но за минимальное время.

2. Алгоритм решения

Введём безразмерные переменные:

$$\begin{aligned} l = \frac{x}{\bar{x}}, \quad \theta(l, \tau) = \alpha_T(T(x, t) - T_0), \quad \tau = \frac{\lambda t}{c\rho\bar{x}^2}, \quad Bi = \frac{\alpha\bar{x}}{\lambda}, \\ u(\tau) = \alpha_T(v(t) - T_0), \quad u^- = \alpha_T(v^- - T_0), \quad u^+ = \alpha_T(v^+ - T_0), \\ \bar{\theta} = \alpha_T(T^* - T_0), \quad \sigma_c^* = \frac{(1-\nu)\sigma_c}{E}, \quad \sigma_p^* = \frac{(1-\nu)\sigma_p}{E}. \end{aligned}$$

В безразмерном виде задача принимает вид:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial l^2}, \quad \theta(l, 0) = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial l} \Big|_{l=1} = Bi(u(\tau) - \theta(1, \tau)), \quad \frac{\partial \theta}{\partial l} \Big|_{l=0} = 0. \quad (9)$$

Функционал (8) запишется так:

$$I(u) = \int_0^1 [\theta(l, \bar{\tau}) - \bar{\theta}(l)]^2 dl. \quad (10)$$

Применяя косинус-преобразование Фурье, решение системы уравнений (9) запишем в виде:

$$\theta(l, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n x_n(u, \tau) \cos(\mu_n l), \quad D_n = \frac{2Bi^2}{(\mu_n^2 + Bi^2 + Bi) \sin \mu_n}, \quad (11)$$

где μ_n — корни уравнения

$$Bi \cos(\mu_n) - \mu_n \sin(\mu_n) = 0, \quad (12)$$

а $x_n(\tau)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ находятся из решения системы:

$$\frac{dx_n}{d\tau} = -\mu_n^2 x_n(\tau) + \mu_n u(\tau), \quad x_n(0) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

Предположим, что зависимость пределов прочности от температуры можно аппроксимировать линейными функциями: $\sigma_p^*(\theta) = \alpha_1 + \beta_1 \theta$, $\sigma_c^*(\theta) = \alpha_2 + \beta_2 \theta$. Тогда неравенства (6)-(7) в безразмерных единицах можно записать так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n x_n(\tau) \left(\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} - 1 - \beta_1 \right) - \alpha_1 \leq 0, \quad (14)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n x_n(\tau) \left((1 - \beta_2) \cos \mu_n - \frac{\sin \mu_n}{\mu_n} \right) - \alpha_2 \leq 0. \quad (15)$$

С помощью метода множителей Лагранжа свведём задачу на условный экстремум к задаче безусловной оптимизации. Ограничиваясь первыми N уравнениями в соотношении (13) и первыми N членами ряда в соотношениях (11), (14)-(15), задачу 1 заменим задачей 2.

Задача 2. Найти управление $u^0(\tau)$, минимизирующее функционал

$$J_N(u) = \frac{\gamma_1}{\alpha_T} \sum_{n=1}^N \frac{D_n}{\sin \mu_n} [x_n(u, \bar{\tau}) \sin \mu_n - g_n]^2 + \int_0^{\bar{\tau}} \sum_{i=2}^3 \gamma_i C_i^2(u, \tau) d\tau \quad (16)$$

на решениях системы (13), когда $n = \overline{1, N}$, где

$$C_1(u, \tau) = \max \left\{ \sum_{n=1}^N D_n x_n(u, \tau) \left(\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} - 1 - \beta_1 \right) - \alpha_1, 0 \right\}, \quad (17)$$

$$C_2(u, \tau) = \max \left\{ \sum_{n=1}^N D_n x_n(u, \tau) \left[(1 - \beta_2) \cos \mu_n - \frac{\sin \mu_n}{\mu_n} \right] - \alpha_2, 0 \right\}, \quad (18)$$

$$g_n = \int_0^1 \bar{\theta}(l) \cos(\mu_n l) dl, \quad \gamma_i, \quad i = 1, 2, 3 - \text{множители Лагранжа}. \quad (19)$$

Для решения задачи 2 используется метод условного градиента [3]. Опишем кратко итерационную процедуру метода условного градиента. Пусть известно u_k – k -ое приближение оптимального управления. Управление u_{k+1} вычисляется по формуле

$$u_{k+1} = u_k + \alpha_k (\bar{u}_k - u_k), \quad (20)$$

где $\bar{u}_k$ – решение вспомогательной задачи

$$\bar{u}_k : \min_{u \in U} (J'(u_k), u - u_k), \quad (21)$$

$\alpha_k \in [0, 1]$ и находится с использованием метода золотого сечения как решение задачи одномерной минимизации

$$\min_{\alpha \in [0, 1]} (J(u_k + \alpha(\bar{u}_k - u_k))). \quad (22)$$

В рассматриваемом случае градиент функционала (16) записывается в виде [4]:

$$J'_u(\tau) = - \sum_{n=1}^N \mu_n \Psi_n(\tau), \quad (23)$$

где μ_n , $n = \overline{1, N}$ – корни уравнения (12), $\Psi_n(\tau)$, $\tau \in [0, \bar{\tau}]$, $n = \overline{1, N}$ – решение сопряжённой системы:

$$\frac{d\Psi_n}{d\tau} = \mu_n^2 \Psi_n(\tau) + 2\gamma_2 D_n C_1(u, \tau) \left(\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} - 1 - \beta_1 \right) + 2\gamma_3 D_n C_2(u, \tau) \left((1 - \beta_2) \cos \mu_n - \frac{\sin \mu_n}{\mu_n} \right), \quad (24)$$

$$\Psi_n(\bar{\tau}) = \frac{2\gamma_1 D_n}{\alpha_T} [x_n(u, \bar{\tau}) \sin \mu_n - g_n]. \quad (25)$$

3. Численный эксперимент

Приведем результаты расчетов для сплава ЖС6У в случае отсутствия ограничений на термонапряжения.

Исходные данные: $\bar{x} = 0.18$ м, $\lambda = 18$ Вт/(м·°C), $\alpha = 200$ Вт/(м²·°C), $\alpha_T = 0.16 \cdot 10^{-4}$ 1/°C, $T_0 = 20^\circ\text{C}$, $T^* = 820^\circ\text{C}$.

Расчеты были проведены для $N = 4, 5, 6, 7$. При $N = 6$ и $N = 7$ результаты расчетов мало отличались от случая $N = 5$, поэтому приведены для $N = 5$ и представлены на рис. 1.

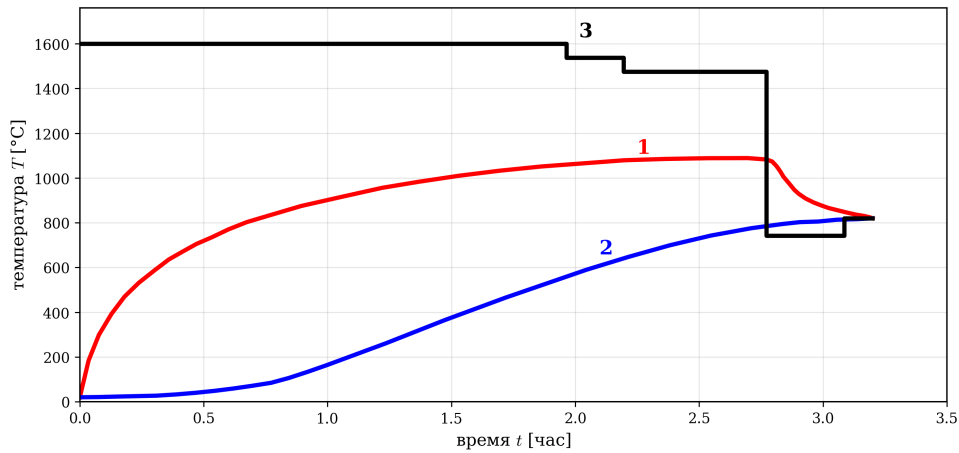


Рис. 1. График зависимости температуры поверхности (1), температуры центра (2) и оптимального управления (3) от времени

Литература

1. Morozkin N.D., Morozkin Y.N., Bayramgulov R.A. On optimal high-speed heating of an unlimited plate with restrictions on thermal stresses. *Tran. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Mechanics*. 2025. Vol. 45, No. 8. P. 22-28. URL: <https://doi.org/10.30546/2706-7734.45.8.2025.026>.
2. Филоненко-Бородич М.И. Механические теории прочности. Москва: МГУ, 1961. 92 с.
3. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. Москва: Факториал Пресс, 2002. 824 с.
4. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. Москва: Наука, 1978. 488 с.

MSC 49M05

Precise heating of an unlimited plate with constraints on thermal stresses

N.D. Morozkin¹, N.N. Morozkin¹, M.F. Sadrislamov¹

Ufa University of Science and Technology¹

Abstract: The problem of determining the time-varying temperature of the heating medium is investigated, which allows obtaining, over a fixed time, a final temperature distribution in the body as close as possible to the desired one. It is required that the tensile and compressive thermal stresses arising due to non-uniform heating do not lead to the failure of the heated product. Materials are considered in which the ultimate strengths under compression and tension depend significantly on temperature, while the thermophysical coefficients and other mechanical characteristics can be assumed constant. An algorithm for finding the optimal control is proposed for the case of heating a one-dimensional infinite plate. The results of calculations are presented in the absence of phase constraints.

Keywords: optimal control, thermal conductivity, thermal stresses, Fourier method, conditional gradient method.