

УДК 534.11

Нейросетевое моделирование продольных колебаний каната с подвижной границей

Литвинов В.Л.¹, Литвинова К.В.²

Самарский государственный технический университет¹, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова²

Аннотация: Предложен подход к расчёту свободных продольных колебаний каната переменной длины, основанный на применении физически-информированных нейронных сетей. В отличие от классических аналитических методов, сеть обучается непосредственно в области с движущейся границей, без перехода к неподвижным координатам. Полученное решение хорошо согласуется с известными результатами. Метод может быть распространён на более сложные законы движения границ с учётом диссипативных факторов.

Ключевые слова: волновое уравнение, канат переменной длины, подвижная граница, машинное обучение, физически-информированные нейронные сети.

Динамика одномерных объектов с перемещающимися границами – канатов грузоподъёмных машин, гибких передач, бурильных колонн – традиционно описывается дифференциальными уравнением в частных производных в области, размер которой зависит от времени. Присутствие подвижной границы делает классические аналитические приёмы, такие как метод разделения переменных или метод характеристик, пригодными лишь для простейших линейных законов движения и при отсутствии диссипации. Приближенные методы, в частности метод Канторовича–Галеркина, расширяют круг решаемых задач, однако требуют перехода к неподвижной области и априорного выбора системы базисных функций. В настоящей работе демонстрируется альтернативная стратегия, опирающаяся на аппарат физически-информированных нейронных сетей, которая свободна от указанных ограничений.

Рассматривается канат, один конец которого жёстко закреплён, а второй перемещается с постоянной скоростью, что приводит к линейному изменению длины во времени. Искомая функция смещения аппроксимируется полносвязной нейронной сетью, на вход которой подаются безразмерные координата и время. Обучение сети сводится к минимизации составного функционала невязок. В него включаются среднеквадратичное отклонение от выполнения волнового уравнения во внутренних точках области, невязки граничных условий на левом и правом концах, а также, при необходимости, штраф за нарушение начальных условий.

Для контроля граничных условий дополнительные точки размещаются на кривых, отвечающих неподвижному левому торцу и перемещающемуся правому. Такой подход позволяет обучать сеть непосредственно в физическом пространстве без каких-либо замен переменных, преобразующих подвижную область в стационарную. После завершения обучения сеть способна почти мгновенно предсказывать продольное смещение для любой пары координата–время из рассматриваемого диапазона.

Для извлечения динамических характеристик решение, генерируемое сетью, раскладывается по синусоидальным базисным функциям, аргумент которых явно зависит от текущей длины каната. Коэффициенты разложения, имеющие смысл амплитуд отдельных мод, находятся методом наименьших квадратов. Процедура позволя-

ет проследить эволюцию амплитуд во времени без аналитического интегрирования. Численная иллюстрация выполнена для значения безразмерной скорости границы, равного пяти сотым. Использовалась сеть с четырьмя скрытыми слоями по пятьдесят нейронов и функцией активации гиперболический тангенс. Оптимизация проводилась методом Adam при начальной скорости обучения одна тысячная; обучающая выборка содержала несколько тысяч внутренних и несколько сотен граничных точек. Сопоставление амплитуды первой динамической моды, полученной нейросетевым способом, с известным аналитическим решением, построенным ранее для аналогичной задачи [1-10], показало, что максимальная относительная погрешность не превышает пяти процентов.

Анализ результатов позволяет исследовать влияние скорости движения границы на собственные частоты системы. В частности, с ростом скорости наблюдается смещение частот, качественно согласующееся с данными, полученными традиционными методами. Важно, что методика легко обобщается на случай нелинейного закона изменения длины: для этого достаточно лишь изменить способ генерации граничных точек, не модифицируя ни архитектуру сети, ни процедуру обучения.

Таким образом, физически-информированные нейронные сети продемонстрировали способность эффективно решать задачу о свободных продольных колебаниях каната с подвижной границей. Предложенный подход не требует громоздких аналитических преобразований, не чувствителен к виду закона движения границы и естественным образом масштабируется на более сложные постановки, включающие диссипацию, геометрическую нелинейность или быстро движущиеся границы. Развитие метода может идти по пути применения глубоких архитектур с остаточными связями, что сделает его применимым к ещё более широкому кругу технических систем с переменной длиной.

Литература

1. Савин Г.Н., Горошко О.А. Динамика нити переменной длины. Киев: Наук. думка, 1962. 332 с.
2. Самарин Ю.П. Об одной нелинейной задаче для волнового уравнения в одномерном пространстве // Прикладная математика и механика. 1964. Т. 26, вып. 3. С. 77-80.
3. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. Исследование резонансных свойств механических объектов с движущимися границами при помощи метода Канторовича-Галеркина // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико-математические науки». 2009. № 1 (18). С. 149-158.
4. Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. Москва: Физматлит, 2001. 320 с.
5. Литвинов В.Л., Литвинова К.В. Применение метода Канторовича-Галеркина для анализа резонансных характеристик систем с затуханием // Теоретическая и математическая физика. 2025. Т. 224, № 1. С. 95-104.
6. Литвинов В.Л., Литвинова К.В. Приближенный метод решения краевых задач с подвижными границами путем сведения к интегродифференциальным уравнениям // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2022. Т. 62, № 6. С. 977-986.

7. Литвинов В.Л., Шамолин М.В. Об одном асимптотическом методе решений однородных интегро-дифференциальных уравнений, описывающих колебания объектов с движущимися границами // Сибирский журнал индустриальной математики. 2025. Т. 28, № 2. С. 39-54.
8. Литвинов В.Л., Литвинова К.В. Об одном обратном методе решения задач о колебаниях механических систем с движущимися границами // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2024. № 3. С. 53-59.
9. Ерофеев В.И., Леонтьева А.В. Квазигармоническая продольная волна, распространяющаяся в стержне Миндлина-Германа, погруженном в нелинейно-упругую среду // Теоретическая и математическая физика. 2022. Т. 211, № 2. С. 216-235.
10. Литвинов В.Л., Шамолин М.В. Математическое моделирование и методы анализа колебаний механических систем с движущимися границами // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2025. Т. 249. С. 79-93.

MSC 74H45, 74K05

Neural network modeling of longitudinal oscillations of a rope with a moving boundary

V.L. Litvinov¹, K.V. Litvinova²

Samara State Technical University¹, Lomonosov Moscow State University²

Abstract: An approach to calculating free longitudinal oscillations of a variable-length rope is proposed, based on the use of physically-informed neural networks. Unlike classical analytical methods, the network is trained directly in the domain with a moving boundary, without transitioning to fixed coordinates. The resulting solution is in good agreement with existing results. The method can be extended to more complex laws of boundary motion, taking into account dissipative factors.

Keywords: wave equation, variable-length rope, moving boundary, machine learning, physically-informed neural networkss.