

УДК 519.65; 519.62; 517.521

Аппроксимация производных второго и третьего порядка коэффициентами Фурье

Кузьмичев Н.Д.¹

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет¹

Аннотация: Приведено доказательство теорем, согласно которым вторую и третью производные функции, принадлежащие классу Гёльдера-Липшица $C^\alpha(G)$ можно с любой наперед заданной точностью аппроксимировать конечной суммой коэффициентов Фурье функции для гармонически модулированного аргумента.

Ключевые слова: класс Гёльдера-Липшица, функция, вторая и третья производные функции, зависимости коэффициентов Фурье, аппроксимация, гармонически модулированный аргумент.

1. Введение

В экспериментальной физике и технике широко применяется модуляционный метод измерения. Он позволяет на несколько порядков увеличить точность измерений по сравнению с обычными методами. В традиционном методе не учитываются высшие гармоники сигнала отклика. Как было показано в работах [1, 2], при изучении зависимостей с резкими особенностями необходимо их учитывать. Ранее в работе [3] показано, что любые функцию $f(y)$ и ее производную $f'(y)$, принадлежащие классу Гёльдера-Липшица C^α ($0 < \alpha \leq 1$) на некотором множестве, можно аппроксимировать с любой наперед заданной точностью конечной суммой коэффициентов (гармоник) её ряда Фурье. В настоящей работе мы приводим математическое обоснование формул, выраженные через коэффициенты Фурье функции, которые аппроксимируют её вторую и третью производные.

2. Теорема о приближении второй производной функции коэффициентами Фурье

Теорема 1. Вторую производную $f''(y)$ функции $f(y)$, принадлежащую классу Гёльдера-Липшица $f''(y) \in C^\alpha$ на множестве $G = [a-h, b+h]$, можно аппроксимировать с любой наперед заданной точностью ε следующей суммой коэффициентов ряда Фурье функции $f(y)$ для гармонически модулированного аргумента $y = x + h \cos t$:

$$\left| \frac{1}{h^2} \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} (2n)^2 A_{2n}(x, h) - f''(x) \right| < \varepsilon.$$

Здесь h – амплитуда модуляции, $A_m(x, h) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x + h \cos t) \cos(mt) dt$, $t \in [-\pi, \pi]$, $x \in [a, b]$ и $y \in G$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем считать, что функция $f(y)$ имеет производную $f''(y)$ принадлежащую классу Гёльдера-Липшица [4, 5] на множестве G : $f''(y) \in$

C^α ($0 < \alpha \leq 1$). Аргумент y заставим изменяться по гармоническому закону: $y(t) = x + h \cos t$, $t \in [-\pi, \pi]$. Тогда, если $x \in [a, b]$, то $y \in G = [a - h, b + h]$. Здесь h – амплитуда модуляции. Суперпозиция функций $f(y(t))$ удовлетворяет условию: $f(-\pi) = f(\pi), \dots, f''(-\pi) = f''(\pi)$ для любых $x \in [a, b]$. Из выше отмеченных условий следует, что ряд Фурье функции $f(x + h \cos t)$ сходится равномерно для любых $x \in [a, b]$ [4]:

$$f(x + h \cos t) = \frac{A_0(x, h)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x, h) \cos(nt). \quad (1)$$

Левую и правую часть (1) дважды продифференцируем по t и положим $t = \pi/2$:

$$h^2 f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (2n)^2 A_{2n}(x, h). \quad (2)$$

Докажем справедливость выражения (2).

Рассмотрим сумму составленную из $A_n(x, h) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x + h \cos t) \cos(nt) dt$:

$$h^2 f''_N(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x + h \cos t) \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} (2n)^2 \cos(2nt) dt. \quad (3)$$

Подынтегральную сумму (3) просуммируем. Получим следующий интеграл:

$$h^2 f''_N(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x + h \cos t) K_{2N}(t) dt. \quad (4)$$

В выражении (4) интегральное ядро $K_{2N}(t)$ имеет вид: $K_{2N}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{\sin[(2N+1)(t + \frac{\pi}{2})]}{2\sin(t + \frac{\pi}{2})} \right]$. Интеграл (4) дважды вычислим по частям. В итоге имеем три интеграла:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x + h \cos t) K_{2N}(t) dt &= \frac{2h^2}{\pi} \int_0^\pi f''(x + h \cos t) \frac{\sin[(2N+1)(t + \frac{\pi}{2})]}{2\sin(t + \frac{\pi}{2})} dt - \\ &- \frac{h^2}{\pi} \int_0^\pi f''(x + h \cos t) \cos t \sin[(2N+1)(t + \frac{\pi}{2})] dt - \\ &- \frac{h}{\pi} \int_0^\pi f'(x + h \cos(t)) \sin[(2N+1)(t + \frac{\pi}{2})] dt. \quad (5) \end{aligned}$$

Первый интеграл согласно теореме об аппроксимации функции, принадлежащей C^α ее коэффициентами Фурье [3] равен $h^2 f''_N(x)$, т. к. $f''(y) \in C^\alpha G$. Разность первого интеграла и правой части (5) по модулю равна:

$$\left| h^2 f''_N(x) - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x + h \cos(t)) K_{2N}(t) dt \right|.$$

Второй и третий интегралы стремятся к 0 при $N \rightarrow \infty$ на основании леммы [4, с. 316]. Поэтому для каждого интеграла найдутся такие номера N_2 и N_3 соответственно, что для всех $N > N_2$ и N_3 , каждый из интегралов будет меньше $\varepsilon/2$. В итоге мы имеем:

$$\left| \frac{1}{h^2} \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} (2n)^2 A_{2n}(x, h) - f''(x) \right| < \varepsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

3. Теорема о приближении третьей производной функции коэффициентами Фурье

Теорема 2. Третью производную $f'''(y)$ функции $f(y)$, принадлежащую классу Гёльдера-Липшица $f'''(y) \in C^\alpha$ на множестве $G = [a-h, b+h]$, можно аппроксимировать с любой наперёд заданной точностью ε следующей суммой коэффициентов ряда Фурье функции $f(y)$ для гармонически модулированного аргумента $y = x + h \cos t$:

$$\left| \frac{1}{h^3} \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} [(2n+1)^3 - (2n+1)] A_{2n+1}(x, h) - f'''(x) \right| < \varepsilon.$$

Здесь h – амплитуда модуляции, $t \in [-\pi, \pi]$, $x \in [a, b]$, $y \in G$ и

$$A_m(x, h) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x + h \cos t) \cos(mt) dt.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f'''(y)$ принадлежит классу Гёльдера-Липшица [4, 5] на множестве $G = [a-h, b+h]$: $f'''(y) \in C^\alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$) G . Аргумент y равен: $y = x + h \cos t$, $t \in [-\pi, \pi]$. Если $x \in [a, b]$, то $y \in G$. Суперпозиция функций $f(y(t))$ удовлетворяет условию: $f(x + h \cos(-\pi)) = f(x + h \cos \pi)$ и $f'''(x + h \cos(-\pi)) = f'''(x + h \cos \pi)$ для любых $x \in [a, b]$. Ряд Фурье (1) для функции $f(y(t))$ сходится равномерно для любых $x \in [a, b]$ [4, 5]. Выражение (1) трижды продифференцируем по t и положим $t = \pi/2$:

$$h^3 f'''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n [(2n-1)^3 - (2n-1)] A_{2n-1}(x, h). \quad (6)$$

Докажем справедливость формулы (6) для функций, у которых третья производная $f'''(y) \in C^\alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$) G . Опираясь на работы [3, 4] и теорему 1, составим следующую конечную сумму из коэффициентов $A_n(x, h)$ ряда (6):

$$\begin{aligned} h^3 f_N'''(x) &= \sum_{n=1}^N (-1)^n [(2n-1)^3 - (2n-1)] A_{2n-1}(x, h) = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x + h \cos t) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n [(2n-1)^3 - (2n-1)] \cos((2n-1)t) dt. \end{aligned} \quad (7)$$

Докажем, что (7) сходится к $h^3 f'''(x)$ при $N \rightarrow \infty$. Подынтегральную сумму (7) просуммируем:

$$K_{3N}(t) = \sum_{n=1}^N (-1)^n [(2n-1)^3 - (2n-1)] \cos((2n-1)t) =$$

$$= \frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{\sin[(2N+1)(t + \frac{\pi}{2})]}{2(\cos(t))^2} + (-1)^{N+1}(2N+1) \frac{\cos(2Nt)}{2\cos(t)} \right] + \\ + \left[\frac{\sin[(2N+1)(t + \frac{\pi}{2})]}{2(\cos(t))^2} + (-1)^{N+1}(2N+1) \frac{\cos(2Nt)}{2\cos(t)} \right] = K''_{1N} + K_{1N}. \quad (8)$$

Запишем (7) через $K_{1N}(t)$, где $K_{1N}(t)$ – ядро для первой производной [3]:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x + h \cos(t)) K_{3N}(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x + h \cos(t)) [K''_{1N}(t) + K_{1N}(t)] dt. \quad (9)$$

Интегрируя (9) последовательно по частям, получим следующие интегралы:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x + h \cos(t)) K_{3N}(t) dt = \frac{2h^2}{\pi} \int_0^\pi f''(x + h \cos(t)) K_{1N}(t) dt + \\ + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x + h \cos(t)) K_{1N}(t) dt - \frac{2h}{\pi} \int_0^\pi f'(x + h \cos(t)) \frac{\sin[(2N+1)(t + \frac{\pi}{2})]}{2\sin(t + \frac{\pi}{2})} dt + \\ + \frac{h^2}{\pi} \int_0^\pi f''(x + h \cos t) \sin[(2N+1)(t + \frac{\pi}{2})] dt + \\ + \frac{(-1)^N(2N+1)h^2}{\pi} \int_0^\pi f''(x + h \cos t) \cos t \cos(2Nt) dt + \\ + \frac{(-1)^N(2N+1)h}{\pi} \int_0^\pi f'(x + h \cos t) \cos(2Nt) dt. \quad (10)$$

В правой части выражения (10) первый интеграл равен $h^3 f'''_N(x)$ [3], второй и третий интегралы равны $h f'_N(x)$ с разными знаками в сумме дают 0, а четвертый, пятый и шестой интегралы стремятся к нулю при $N \rightarrow \infty$ на основании леммы [4, с. 316] и теоремы Лоренца [5, с. 678]. При интегрировании по частям 5-го и 6-го интегралов правой части (10) множители $(2N+1)$ перед ними исчезают и эти интегралы стремятся к 0 [4, с. 316]. Таким образом, мы получили, что третью производную функции $f'''(x)$, принадлежащую классу Гёльдера-Липшица C^α на множестве G , можно аппроксимировать с любой наперёд заданной точностью ε следующей конечной суммой коэффициентов её ряда Фурье для гармонически модулированного аргумента $y = x + h \cos t$:

$$\left| \frac{1}{h^3} \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} [(2n+1)^3 - (2n+1)] A_{2n+1}(x, h) - f'''(x) \right| < \varepsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Литература

1. Кузьмичев Н.Д. Оценки ошибок модуляционного восстановления функции отклика и ее производных // ЖТФ. 1997. Т. 67, № 8. С. 124-127.
2. Кузьмичев Н.Д. Применение рядов Тейлора-Фурье для численного и экспериментального определения производных изучаемой зависимости // Журнал Средневолжского математического общества. 2011. Т. 13, № 1. С. 70-80.

3. Кузьмичев Н.Д. Аппроксимация функции и ее производной, принадлежащих классу Гёльдера-Липшица, их коэффициентами Фурье для гармонически модулированного аргумента // ЖВМ и МФ. 2025. Т. 65, № 4. С. 417-425.
4. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ. Продолжение курса. Москва: Изд-во МГУ, 1987. 358 с.
5. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. Москва: Государственное изд-во физико-математической литературы, 1961. 936 с.

MSC 41A05; 42A10; 42B05

Approximation of second and third order derivatives by Fourier coefficients

N.D. Kuzmichev¹

National Research Mordovian State University¹

Abstract: The proof of the theorems is given, according to which the second and other higher derivatives of a function belonging to the Helder-Lipschitz class $C^\alpha(G)$ can be approximated with any predetermined accuracy by a finite sum of the Fourier coefficients of the function for a harmonically modulated argument.

Keywords: Gelder-Lipschitz lass, function, second, third and higher derivatives of a function, Fourier coefficient dependencies, approximation, harmonically modulated argument.