

УДК 539.376

Проникновение агрессивной среды в трубчатый стержень кольцевого поперечного сечения

Кузнецов Е.Б.¹, Леонов С.С.^{1,2}

¹ФГАОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

²ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»

Аннотация: При решении проблемы проникновения агрессивной среды в материал конструкции необходимо знать движение фронта агрессии, но классическое уравнение диффузии, описывающее этот процесс, является уравнением параболического типа и не задает движение этого фронта. В работе впервые этот процесс описывается уравнением гиперболического типа, задающим движение фронта агрессии: диффузия агрессивной среды в материал стержня моделируется уравнением тепловой волны, что позволяет выделить движение диффузионного фронта.

Ключевые слова: фронт диффузии, фронт агрессии, тепловая волна, метод Фурье, ряды Фурье-Бесселя.

1. Введение

Обычно проникновение некоторой среды в другую среду моделируется уравнением диффузии, которое является уравнением в частных производных параболического типа. Недостаток такого подхода заключается в том, что это уравнение не описывает движение фронта проникающей среды, внедрение которой происходит не с конечной скоростью, а мгновенно. Поэтому исследователи движение этого фронта задают искусственно [1].

Чтобы избежать искусственных конструкций воспользуемся следующим уравнением [2, 3]

$$\tau \frac{\partial^2 u(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial u(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \operatorname{div}(a^2 \operatorname{grad} u(\mathbf{r}, t)), \quad (1)$$

где $a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}$ – коэффициент температуропроводности.

Уравнение (1) описывает движение тепловой волны. Оно является уравнением гиперболического типа, задающим движение фронта тепловой волны и носит волновой характер с затуханием.

Используя такой подход в [4] процесс диффузии в тонком стержне прямоугольного поперечного сечения моделировался волновым уравнением гиперболического типа.

2. Диффузия агрессивной среды в материал стержня

В данной статье рассматривается осесимметричное проникновение в материал стержня агрессивной среды интенсивностью c_1 , находящейся внутри длинного металлического стержня кольцевого поперечного сечения и интенсивностью c_2 , находящейся снаружи стержня. Внутренний радиус стержня равен r_1 , а внешний r_2 .

Уравнение диффузии для функции $c(r, t)$ в полярной системе координат примет вид

$$\tau c_{tt} + c_t = D \left(c_{rr} + \frac{c_r}{r} \right), \quad (2)$$

где r – полярный радиус, $r \in (r_1, r_2)$.

Перепишем уравнение (2) в безразмерной форме:

$$U_{TT} + 2bU_T = U_{RR} + \frac{U_R}{R},$$

где $U = \frac{c}{c_0}$; $R = \frac{r}{r_0}$; $T = \frac{t}{r_0} \sqrt{\frac{D}{\tau}}$; $b = \frac{r_0}{2\sqrt{D\tau}}$; c_0, r_0 – некоторые константы обезразмеривания.

Вернувшись к старым обозначениям уравнения (2), получим безразмерный вид уравнения

$$c_{tt} + 2bc_t = c_{rr} + \frac{c_r}{r}. \quad (3)$$

Полагаем, что в начальный момент времени внутри образца агрессивная среда присутствует, тогда начальные условия будут следующими:

$$c(r, 0) = \phi(r), \quad c_t(r, 0) = \psi(r). \quad (4)$$

На внутренней и на внешней поверхностях стержня концентрации сред остаются постоянными, поэтому безразмерные краевые условия примут вид

$$c(\alpha_1, t) = \beta_1, \quad c(\alpha_2, t) = \beta_2, \quad (5)$$

где $\alpha_1 = \frac{r_1}{r_0}$, $\alpha_2 = \frac{r_2}{r_0}$, $\beta_1 = \frac{c_1}{c_0}$, $\beta_2 = \frac{c_2}{c_0}$.

Решение задачи (3-5) можно представить в виде

$$\begin{aligned} c(r, t) = & \sum_{n=1}^N \frac{R_n(r)}{k_{2n} - k_{1n}} ((\Omega_{n1} k_{2n} - \Omega_{n2}) e^{k_{1n} t} + (\Omega_{n2} - \Omega_{n1} k_{1n}) e^{k_{2n} t} + \\ & + \Omega_{n3} (\frac{1 - e^{k_{1n} t}}{k_{1n}} - \frac{1 - e^{k_{2n} t}}{k_{2n}})) + \sum_{n=N+1}^{\infty} R_n(r) (e^{-bt} (\Omega_{n1} \cos \omega_n t + \\ & + \frac{b\Omega_{n1} + \Omega_{n2}}{\omega_n} \sin \omega_n t) + \frac{\Omega_{n3}}{\omega_n (b^2 + \omega_n^2)} (\omega_n - \\ & - (b \sin \omega_n t + \omega_n \cos \omega_n t) e^{-bt})) + \beta_1 - \frac{r - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} (\beta_1 - \beta_2). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь N – наибольшее целое число, при котором ещё выполняется неравенство $b > \lambda_n$, где λ_n – собственное значение задачи Штурма-Лиувилля, b – коэффициент

обезразмеривания, $k_{1n} = -b + \sqrt{b^2 - \lambda_n^2}$, $k_{2n} = -b - \sqrt{b^2 - \lambda_n^2}$, $\omega_n = \sqrt{\lambda_n^2 - b^2}$, собственные функции задачи Штурма-Лиувилля $R_n(r)$ можно представить в форме

$$R_n(r) = J_0(\lambda_n r) N_0(\lambda_n \alpha_2) - N_0(\lambda_n r) J_0(\lambda_n \alpha_2).$$

Константы $\Omega_{n1}, \Omega_{n2}, \Omega_{n3}$, входящие в решение (6), вычисляются следующим образом

$$\Omega_{n1} = \frac{\pi^2 \lambda_n^2 J_0^2(\lambda_n \alpha_1)}{2(J_0^2(\lambda_n \alpha_1) - J_0^2(\lambda_n \alpha_2))} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} R_n(r) \left(\phi(r) - \beta_1 + \frac{r - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} (\beta_1 - \beta_2) \right) r dr,$$

$$\Omega_{n2} = \frac{\pi^2 \lambda_n^2 J_0^2(\lambda_n \alpha_1)}{2(J_0^2(\lambda_n \alpha_1) - J_0^2(\lambda_n \alpha_2))} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} R_n(r) \psi(r) r dr,$$

$$\Omega_{n3} = \frac{(\beta_2 - \beta_1) \pi^2 \lambda_n^2 J_0^2(\lambda_n \alpha_1)}{2(\alpha_2 - \alpha_1)(J_0^2(\lambda_n \alpha_1) - J_0^2(\lambda_n \alpha_2))} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} R_n(r) dr,$$

где $J_0(\lambda r)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Литература

1. Локощенко А.М. Ползучесть и длительная прочность металлов. Москва: Физматлит, 2016. 504 с.
2. Лыков А.В. Теория теплопроводности. Москва: Высшая школа, 1967. 600 с.
3. Формалев В.Ф. Теплоперенос в анизотропных твердых телах. Численные методы, тепловые волны, обратные задачи. Москва: Физматлит, 2015. 280 с.
4. Kuznetsov E.B., Leonov S.S. Applying of the heat wave equation in the study of the movement of an aggressive environment front // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2020. Vol. 927, No. 012078.

MSC 65L11

Penetration of an aggressive medium into a tubular rod with an ring cross-section

E.B. Kuznetsov¹, S.S. Leonov^{1,2}

¹Moscow Aviation Institute (National Research University)

²Peoples' Friendship University of Russia
named after Patrice Lumumba (RUDN University)

Abstract: When solving the problem of aggressive media penetration into the construction material, it is necessary to know the movement of the aggression front, but the classical diffusion equation describing this process is a parabolic equation and does not specify the movement of this front. In this paper, for the first time, this process is described by a hyperbolic equation that defines the movement of the aggression front: the diffusion of an aggressive medium into the rod material is modeled by the heat wave equation, which makes it possible to isolate the movement of the diffusion front.

Keywords: diffusion front, aggression front, heat wave, Fourier method, Fourier-Bessel series.