

УДК 519.171

Алгоритмическая сложность проверки изоморфизма графов, являющихся топологическими инвариантами градиентно-подобных диффеоморфизмов на поверхностях

Зинина С.Х.¹, Красулин Н.И.¹

ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва»

Аннотация: Топологическая классификация структурно-устойчивых потоков, а также топологическая классификация некоторых многомерных каскадов сводится к комбинаторной задаче различения графов с точностью до изоморфизма. В работе оценивается алгоритмическая сложность проверки изоморфизма трехцветных и двухцветных графов, которые являются топологическими инвариантами для градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей.

Ключевые слова: топологическая классификация, градиентно-подобные диффеоморфизмы, топологическая сопряженность, трехцветный граф, двухцветный граф, алгоритмическая сложность.

Одной из важнейших задач динамических систем является их топологическая классификация [1], зачастую топологическим инвариантом является тот или иной граф, тем самым исходная задача топологической классификации сводится к задаче проверки изоморфизма графов.

В работе [2] доказано, что трехцветный граф T_f , оснащенный автоморфизмом P_f , является полным топологическим инвариантом градиентно-подобных диффеоморфизмов, для более узкого класса градиентно-подобных диффеоморфизмов, являющихся прямыми произведениями двух грубых преобразований окружности, в работе [3] вводится двухцветный граф D_f , оснащенный автоморфизмом P_f , который также является полным топологическим инвариантом.

Два двухцветных или трехцветных графа называются изоморфными, если существует биекция между множествами их вершин, сохраняющая отношения инцидентности и цветности, а также сопрягающая их автоморфизмы.

В работах [2, 3] доказано, что два диффеоморфизма являются топологически сопряженными тогда и только тогда, когда соответствующие им двухцветные или трехцветные графы являются изоморфными.

Любой трехцветный граф T_f можно однозначно представить в виде набора перестановок трех цветностей $T_f = (\sigma_s, \sigma_t, \sigma_u)$. Задача проверки изоморфизма трехцветных графов и сводится к задаче поиска перестановки, сопрягающей перестановки для четырех пар перестановок $(\sigma_s, \sigma_t, \sigma_u, P_f)$. Алгоритмическая сложность данной задачи равна $O\left(\frac{n^2}{\log n}\right)$, что является более эффективным с точки зрения алгоритмической сложности, чем существовавшие ранее алгоритмы со сложностью $O(n^3 \log n)$ и $O(n^3)$ [4].

Изоморфизм и автоморфизм двухцветного графа D_f также являются перестановками. Любой двухцветный граф D_f можно представить в виде набора перестановок двух цветностей $D_f = (\sigma_s, \sigma_u)$, который, в отличие от аналогичного представления

трехцветного графа, не будет являться однозначным. В общем случае алгоритмическая сложность решения проверки изоморфизма двучетных графов будет эквивалентна задаче для трехцветного графа и равна $O\left(\frac{n^2}{\log n}\right)$ или $O(n)$.

Литература

1. Гринес В.З., Починка О.В. Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три. Серия. Математика и механика. Москва-Ижевск: Издательство «РХД», 2011. 424 с.
2. Гринес В.З., Капкаева С.Х., Починка О.В. Трехцветный граф как полный топологический инвариант для градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей // Математический сборник. 2014. Т. 205, № 10. С. 19-46. DOI: 10.4213/sm8328.
3. Зинина С.Х., Медведева М.А. Двучетный граф как средство классификации декартовых произведений грубых преобразований окружности // Огарёв-online. 2022. Т. 10, № 14. С. 91-96.
4. Grines V.Z., Malyshev D.S., Pochinka O.V., Zinina S.Kh. Efficient Algorithms for the Recognition of Topologically Conjugate Gradient-like Diffeomorphisms // Regular and Chaotic Dynamics. 2016. Vol. 21, No. 2. P. 189-203. DOI: 10.1134/S1560354716020040.

MSC 05C80, 37D15

Algorithmic complexity of checking isomorphism of graphs that are topological invariants of gradient-like diffeomorphisms on surfaces

S.K. Zinina¹, N.I. Krasulin¹

National Research Mordovia State University¹

Abstract: The topological classification of structurally stable flows, as well as the topological classification of some multidimensional cascades, is reduced to the combinatorial problem of distinguishing graphs up to isomorphism. This paper evaluates the algorithmic complexity of isomorphism testing for three-color and two-color graphs, which are topological invariants for gradient-like surface diffeomorphisms.

Keywords: topological classification, gradient-like diffeomorphisms, topological conjugacy, three-color graph, two-color graph, algorithmic complexity.