

УДК 519.853.4

Исследование схем редукции размерности для алгоритма поиска нуля неотрицательной функции*

Зайцев А.С.¹, Баркалов К.А.¹

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского¹

Аннотация: В работе рассматривается задача поиска глобального минимума многомерной многоэкстремальной функции, принимающей неотрицательные значения и достигающей в области определения нулевого значения. Такую задачу можно интерпретировать как задачу минимизации невязки между теоретическими и экспериментальными данными. Для ускорения сходимости алгоритма поиска нуля неотрицательной многомерной функции предлагается редуцировать размерность задачи с помощью аппроксимации кривой Пеано – неинъективной развертки. Проведены вычислительные эксперименты, подтверждающие эффективность предложенного подхода к редукции размерности в данной задаче.

Ключевые слова: глобальная оптимизация, редукция размерности, кривые Пеано, поиск нуля функции.

1. Введение

Данная работа является продолжением исследования Алгоритма Поиска Нуля (АПН) неотрицательной функции [1, 2]. Для редукции размерности АПН использует кривые Пеано [3, 4], которые отображают N -мерную область D на единичный отрезок вещественной оси. Новым элементом исследования является использование аппроксимации кривой Пеано [5], которая для любой точки из N -мерной области D ставит в соответствие множество точек на единичном отрезке вещественной оси. Это позволяет ускорить сходимость алгоритма к глобальному минимуму.

В проведенных вычислительных экспериментах АПН, использующий разные аппроксимации кривых Пеано, сравнивается с широко известным методом глобальной оптимизации DIRECT [6].

2. Постановка задачи

Классическая задача поиска минимума многомерной многоэкстремальной функции $\phi(y)$, где $y \in R^n (n > 1)$ в N -мерном гиперкубе D записывается в следующем виде:

$$\phi(y^*) = \min\{\phi(y), y \in D\}, D = \{y \in R^n, a_i \leq y_i \leq b_i, i = \overline{1, n}\} \quad (1)$$

Дополнительно потребуем, чтобы функция $\phi(y)$ удовлетворяла следующим условиям:

1. $\phi(y) \geq 0, y \in D$ (неотрицательность функции);
2. Существует вектор $y^* \in D$ такой, что $\phi(y^*) = 0$ (существование нуля функции);

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, проект FSWR-2026-0007.

3. Функция удовлетворяет условию:

$$|\phi(y') - \phi(y'')| \leq L |y' - y''|, y', y'' \in D, 0 < L < \infty,$$

где значение L не задано (липшицевость функции).

Функцию $\phi(y)$, удовлетворяющую описанным выше условиям, будем обозначать $\psi(y)$, где $y \in R^n$ ($n > 1$). Очевидно, что для рассматриваемой функции $\psi(y)$ ($y \in D$) задача поиска глобального минимума эквивалентна задачи поиска нуля функции (поиска корня функции).

Чтобы избежать экспоненциального роста вычислений при росте размерности задачи N поставленная многомерная задача редуцируется до одномерной. Для редукции размерности можно использовать кривые Пеано [3,4]. Аппроксимации таких кривых (развертки) обычно обладают свойством однозначности (инъективности): любой точке (прообразу) отрезка $[0, 1]$ вещественной оси соответствует единственная точка (образ) в N -мерной области D . В результате точкам, близким в области D , могут соответствовать расположенные далеко друг от друга прообразы на отрезке $[0, 1]$ вещественной оси. Данный эффект в некоторых случаях может негативно сказаться на скорости сходимости метода оптимизации. Чтобы избежать подобного эффекта, предлагается использовать так называемую неинъективную развертку. В работе [5] предложены развертки, обладающие следующим свойством: любой точке в N -мерной области D соответствует множество (но не более чем 2^N) прообразов на отрезке $[0, 1]$ вещественной оси. Таким образом исходная многомерная задача (1) сводится к одномерной задаче следующего вида:

$$\psi(y^*(x)) = \min\{\psi(y(x)), x \in [0, 1]\} \quad (2)$$

Функция $\psi(y(x))$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $\psi(y(x)) \geq 0, x \in [0, 1]$ (неотрицательность функции);
2. Существует точка $x^* \in [0, 1]$ такая, что $\psi(y^*(x)) = 0$ (существование нуля функции);
3. Функция удовлетворяет условию:

$$|\psi(y(x')) - \psi(y(x''))| \leq H \sqrt[N]{|x' - x''|}, x', x'' \in [0, 1], 0 < H < \infty,$$

где значение H не задано. Из [4] известно, что константа Гёльдера H связана с константой Липшица L соотношением $H = 4L\sqrt[N]{N}$ (гёльдеровость функции).

Для решения редуцированной задачи применим Алгоритм Поиска Нуля (АПН) [1,2]. Данный алгоритм специально разрабатывается для такого класса задач.

3. Описание алгоритма

Алгоритм поиска нуля функции $\psi(y(x))$ порождает последовательность точек x^k . В этих точках вычисляется значение функции $z^k = \psi(y(x^k)), k = 0, 1, 2, \dots$. Предполагается, что погрешность пренебрежимо мала. Первые два испытания осуществляются в граничных точках, то есть $x^0 = 0$ и $x^1 = 1$ соответственно. А выбор точек $x^{k+1}, k \geq 1$, очередного $(k+1)$ -го испытания осуществляются по следующим правилам:

1. Перенумеруем (нижнем индексом) точки $x_i, 0 \leq i \leq k$, в порядке возрастания значения координаты:

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_k = 1. \quad (3)$$

2. Для каждого интервала $(x_i - x_{i-1}), 1 \leq i \leq k$, вычислим величину:

$$K(i) = \frac{z_i + z_{i-1}}{\Delta_i} \quad (4)$$

где $\Delta_i = \sqrt[n]{x_i - x_{i-1}}, z_i = \psi(y(x_i))$, называемую характеристикой этого интервала.

3. Определим интервал $(x_t - x_{t-1})$, которому соответствует минимальная характеристика K :

$$K(t) = \min\{K(i), 1 \leq i \leq k\}. \quad (5)$$

Если минимальное значение соответствует нескольким интервалам, то в качестве значения t выбирается наименьшее число, удовлетворяющее условию (3).

4. Определим точку x^{k+1} очередного испытания следующим образом:

$$x^{k+1} = \frac{x_t + x_{t-1}}{2}. \quad (6)$$

5. Проведем очередное испытание в точке x^{k+1} :

$$z^{k+1} = \psi(y(x^{k+1})). \quad (7)$$

и примем $k = k + 1$.

6. Проверим условие остановки алгоритма:

- а. Число итераций k достигло значения k_{max} (исчерпание вычислительного ресурса).
- б. Было достигнуто значение:

$$\psi_k^* = \min\{\psi(y(x_i)) : 0 \leq i \leq k\} \leq \sigma, \quad (8)$$

где $\sigma > 0$ (предустановленная допустимая погрешность в оценке нулевого значения функции $\psi(y(x))$).

4. Результаты экспериментов

В вычислительных экспериментах было проведено сравнение трех алгоритмов: АПН с кусочно-линейной разверткой, АПН с неинъективной разверткой, и метода DIRECT [6]. Во всех методах в критерии остановки использовалось значение $\sigma = 10^{-2}$; в АПН использовалась развертка с параметром построения $m = 10$, а в методе DIRECT – параметр $\epsilon = 10^{-4}$. Сравнение проводилось путем решения 100 задач, сформированных на основе функций вида:

$$f(y) = \sum_{i=1}^{14} (A_i(2i\pi y_1) + B_i(2i\pi y_2)), \quad y \in [0, 1]^2, \quad (9)$$

где значения $A_i, B_i, 1 \leq i \leq 14$, независимо и равномерно распределены на отрезке $[-1, 1]$. Указанные функции преобразовывались к неотрицательным следующим образом:

$$\phi(y) = f(y) - f^*, \quad (10)$$

где f^* являлось известным значением в точке глобального минимума. Линии уровня одной из функций $\phi(y)$ представлены на рис. 1; на нем же отмечены точки 55 поисковых испытаний, выполненных АПН с неинъективной разверткой (левый рисунок), и точки 232 поисковых испытаний, выполненных при решении той же задачи методом DIRECT (правый рисунок).

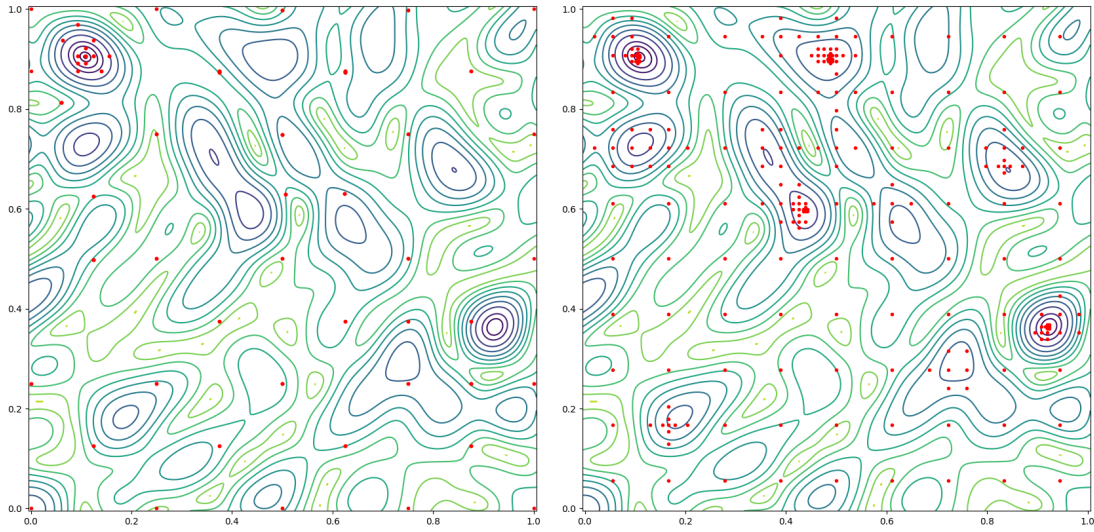


Рис. 1. График целевой функции и точек испытаний, выполненных АПН с неинъективной разверткой (слева) и DIRECT (справа)

В результате решения всей серии из 100 задач было установлено, что среднее число поисковых испытаний, необходимое для решения задачи, составляет 140 для метода DIRECT, 147 для исходного варианта АПН с кусочно-линейной разверткой, и 100 для АПН с неинъективной разверткой. Медианное число испытаний для перечисленных методов составило 101, 111, и 84 соответственно. Результаты показывают, что АПН с неинъективной разверткой требует значительно меньшего числа поисковых испытаний как по сравнению со своим прототипом, так и по сравнению с методом DIRECT.

5. Заключение

По результатам проведенного вычислительного эксперимента можно отметить, что тип развертки оказывает влияние на работу АПН. В большей степени это влияние сказывается на локальной фазе поиска, т.е. когда алгоритм попал в область притяжения глобального минимума. Это связано с тем, что кусочно-линейная развертка, обеспечивающая однозначное отображение единичного отрезка вещественной оси на N -мерную область D , приводит к порождению локальных минимумов, которые существуют только в редуцированной одномерной задаче. Неинъективная развертка лишена подобного эффекта, что позволяет АПН за значительно меньшее число итераций по сравнению с методом DIRECT и по сравнению со своим прототипом решать задачи минимизации многоэкстремальных функций.

Литература

1. Зайцев А.С., Баркалов К.А. Об алгоритме поиска глобального минимума для одного класса многоэкстремальных задач // Сборник трудов IV Молодёжной школы. Н.Новгород: Издательство ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2025. С. 39-42.
2. Баркалов К.А., Зайцев А.С., Стронгин Р.Г. Алгоритм поиска нуля неотрицательной многоэкстремальной функции // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2026. Т. 66, № 3. С. 348-360.
3. Стронгин Р.Г. Численные методы в многоэкстремальных задачах (информационно-статистический подход). Москва: Наука, 1978. 240 с.
4. Стронгин Р.Г. Поиск глобального оптимума. Москва: Знание, 1990.
5. Sergeyev D.Y., Strongin R.G., Lera D. Introduction to Global Optimization Exploiting Space-Filling Curves // Springer Briefs in Optimization. 2013.
6. Jones D.R., Perttunen C.D., Stuckman B.E. Lipschitzian optimization without the Lipschitz constant // Journal of Optimization Theory and Applications. 1993. Vol. 79, No. 1. P. 157-181.

MSC 90C26

Investigation of dimensionality reduction schemes for an algorithm for finding the zero value of a non-negative function

A.S. Zaitsev¹, K.A. Barkalov¹

Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod¹

Abstract: The paper addresses the problem of finding the global minimum of a multi-dimensional multiextremal function that takes non-negative values and attains zero within its domain. Such a problem can be interpreted as minimizing the residual between theoretical and experimental data. To accelerate the convergence of an algorithm for locating the zero of a non-negative multidimensional function, it is proposed to reduce the dimensionality of the problem using an approximation of the Peano curve – a non-injective evolut. Computational experiments have been carried out confirming the effectiveness of the proposed approach to dimensionality reduction in this problem.

Keywords: global optimization, dimensionality reduction, Peano curves, zero value of a function.