

УДК 519.63

## Сравнительный анализ линейных решателей для безматричного метода Ньютона-Крылова при решении задач газовой динамики неявной схемой для разрывного метода Галёркина\*

Жалнин Р.В.<sup>1</sup>, Мулюгин А.Д.<sup>1</sup>, Вдовин В.В.<sup>1</sup>

ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва»<sup>1</sup>

*Аннотация:* Проведено сравнительное исследование эффективности методов решения линейных систем в составе безматричного метода Ньютона-Крылова (JFNK) для численного моделирования двумерных уравнений газовой динамики на основе разрывного метода Галёркина. Рассматривались классический метод минимальных невязок (MINRES) и современный метод индуцированной размерности IDR(s) с различными значениями параметра  $s$ . Исследование выполнено на примере задачи о развитии неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. Проанализировано качество получаемых численных решений, спектральные характеристики течения, а также вычислительная производительность алгоритмов. Показано, что все варианты метода IDR(s) обеспечивают сопоставимое с MINRES качество воспроизведения вихревых структур и энергетических спектров. При этом все методы семейства IDR(s) демонстрируют существенно меньшее время выполнения одного шага по времени по сравнению с MINRES, обеспечивая ускорение от 1.5 до 2.5 раз в зависимости от размерности вспомогательного подпространства. Наилучший баланс между скоростью сходимости и вычислительными затратами показал метод IDR(4), что позволяет рекомендовать его в качестве эффективного линейного решателя в составе JFNK для нестационарных задач вычислительной гидродинамики.

*Ключевые слова:* разрывный метод Галёркина, неявная схема, безматричный метод Ньютона-Крылова, метод MINRES, метод IDR(s).

### 1. Введение

Разрывный метод Галёркина (Discontinuous Galerkin, DG) – эффективный инструмент численного решения уравнений гиперболического и параболического типов, обеспечивающий высокий порядок точности на неструктурированных сетках [1]. При малых числах Маха явные схемы дискретизации по времени становятся неэффективными из-за жёстких ограничений на шаг по времени (условие Куранта). Переход к неявным схемам снимает это ограничение, но требует решения на каждом временном шаге больших, часто плохо обусловленных систем нелинейных уравнений. Для этого эффективен безматричный метод Ньютона-Крылова (Jacobian-free Newton-Krylov, JFNK) [2], выполняющий ньютоновские итерации без явного построения матрицы Якоби; ключевым элементом JFNK является выбор итерационного метода для решения линейной системы на каждой итерации. В работе сравниваются классический метод минимальных невязок (MINRES) [3] и семейство методов индуцированной раз-

---

\*Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 25-21-00308, <https://rscf.ru/project/25-21-00308/>.

мерности  $IDR(s)$  [4, 5] в этом качестве.

## 2. Математическая модель и численный метод

Рассматривается двумерная система уравнений газовой динамики в консервативной форме

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(U) = 0, \quad (1)$$

где  $U = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E, \rho c)^T$  — вектор консервативных переменных,  $\mathbf{F}(U)$  — вектор конвективных потоков,  $\rho$  — плотность,  $u, v$  — компоненты скорости,  $p$  — давление ( $p = \rho \varepsilon(\gamma - 1)$ ),  $E$  — полная энергия,  $c$  — массовая концентрация примеси.

Пространственная дискретизация (1) выполняется методом Галёркина с разрывными кусочно-полиномиальными базисными функциями на ячейках расчётной сетки. Подстановка приближённого решения в слабую форму уравнений и интегрирование по частям приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, интегрирование которой по времени неявной схемой даёт нелинейную систему  $\mathcal{Q}_h(U_h) = F_h$ , решаемую методом JFNK: на внешних ньютоновских итерациях поправка  $\Delta_h$  находится из линейной системы  $J \Delta_h = F_h - \mathcal{Q}_h(U_h^{(\alpha)})$ , где действие якобиана  $J$  на вектор аппроксимируется конечно-разностной формулой без явного построения матрицы. Для решения этой линейной системы применяются метод MINRES, обладающий гарантированной сходимостью для симметричных невырожденных систем, но медленно сходящийся на плохо обусловленных системах, характерных для DG-дискретизаций высокого порядка, и метод  $IDR(s)$ , основанный на построении вложенных подпространств убывающей размерности; параметр  $s$  задаёт размерность вспомогательного подпространства и управляет балансом между затратами на итерацию и скоростью сходимости.

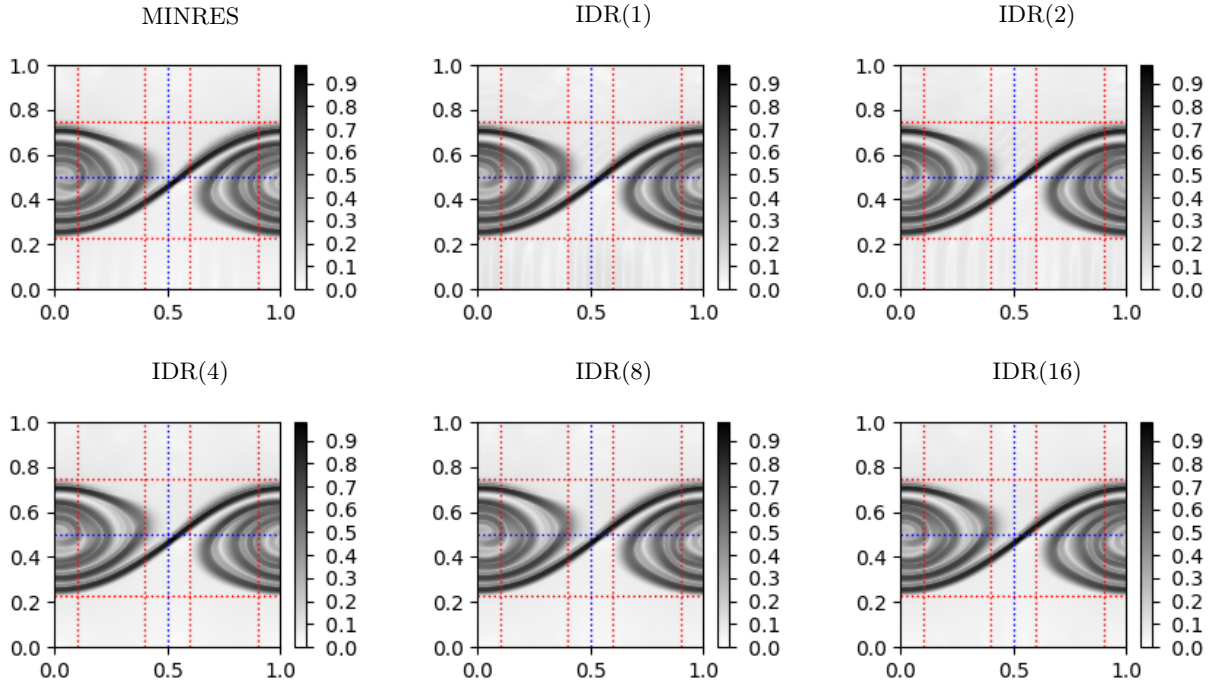
## 3. Тестовая задача

В качестве тестовой рассматривается задача о развитии неустойчивости Кельвина–Гельмгольца [6] в области  $\Omega = [0, 1] \times [0, 2]$  с периодическими граничными условиями: начальные условия задают два противоположно направленных сдвиговых слоя (профили плотности, скорости и концентрации в виде  $\tanh$ ) с малым синусоидальным возмущением поперечной скорости. Расчёты выполнены на сетке  $256 \times 512$  на гибридной системе CPU+GPU (Intel Xeon, NVIDIA T4) при  $\varepsilon_J = 10^{-5}$  — оптимальном, по данным предварительных расчётов, компромиссе между точностью и временем счёта.

## 4. Результаты

Сопоставление графиков (рис. 1) полей завихренности на момент времени  $t = 3$  с показывает, что основные вихревые структуры воспроизводятся единообразно для всех решателей: их положение и размеры совпадают независимо от выбора метода. Для MINRES и  $IDR(4)$ ,  $IDR(8)$ ,  $IDR(16)$  картины более гладкие, тогда как для  $IDR(1)$  и  $IDR(2)$  вблизи нижней границы области наблюдаются слабые периодические возмущения — увеличение  $s$  подавляет численные артефакты. Энергетические спектры  $E_k$  и спектры энтропии  $Z_k$  (рис. 2) также практически совпадают для всех методов; наклон спектра в инерционном интервале ( $E_k$  между  $k^{-3}$  и  $k^{-4}$ ,  $Z_k \sim k^{-1}$ ) соответствует классической картине двумерной турбулентности. Таким образом, за-

мена MINRES на  $IDR(s)$  не искажает физическую картину течения.



**Рис. 1.** Шлирен картина течения в области  $[0, 1] \times [0, 1]$  на момент времени  $t = 3$  с. Синие линии:  $x = 0.5$  и  $y = 0.5$ . Красные линии:  $x = 0.1, x = 0.4, x = 0.6, x = 0.9, y = 0.23, y = 0.75$ .

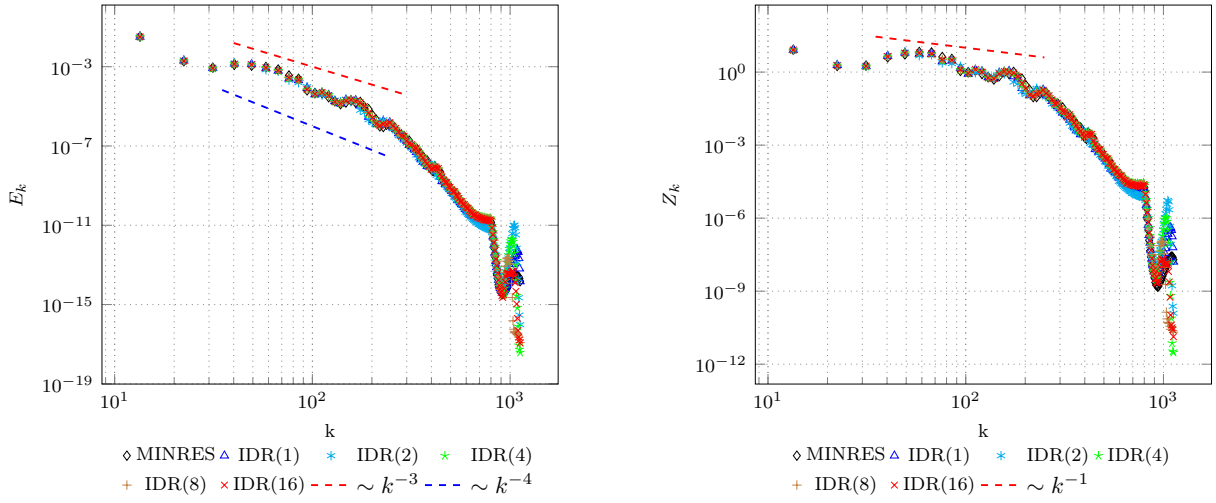
По быстродействию (рис. 3) все варианты  $IDR(s)$  в среднем превосходят MINRES: наименьшее нормированное время — у  $IDR(1)$ ,  $IDR(2)$  и  $IDR(4)$  (0.4–0.45 от времени MINRES, ускорение в 2–2.5 раза);  $IDR(8)$  — около 0.48–0.5; наиболее затратный  $IDR(16)$  — 0.58–0.6, но всё же быстрее MINRES. Метод  $IDR(4)$  в среднем требует около трёх внутренних итераций; среднее время шага сокращается с  $\approx 0.438$  с (MINRES) до  $\approx 0.396$  с ( $IDR(4)$ ) — общее ускорение  $\approx 1.5$  раза при устойчивой сходимости итераций Ньютона.

## 5. Заключение

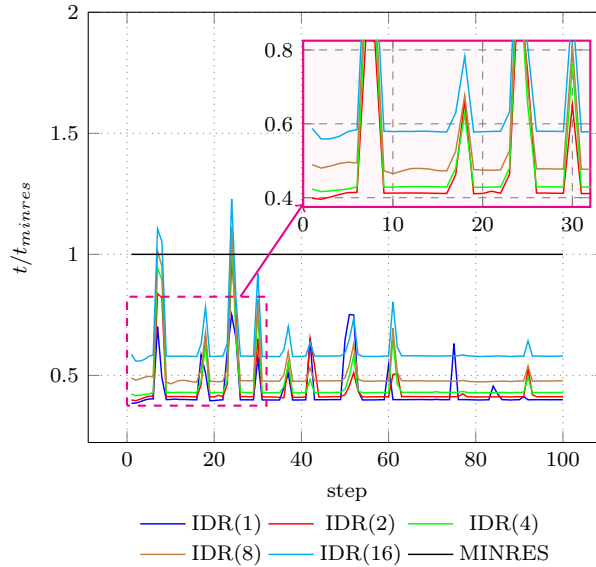
В работе проведено сравнительное исследование эффективности классического метода минимальных невязок (MINRES) и семейства методов индуцированной размерности  $IDR(s)$  в составе безматричного метода Ньютона–Крылова. Рассмотрение выполнено в контексте численного решения двумерных уравнений газовой динамики с помощью неявной схемы для разрывного метода Галёркина на примере задачи о развитии неустойчивости Кельвина–Гельмгольца.

Анализ полученных численных решений, включающий сопоставление шлирен-картин течения и распределений завихренности, показал, что все рассмотренные методы воспроизводят идентичную крупномасштабную вихревую структуру. Сравнение энергетических спектров и спектров энтропии не выявило между методами значимых различий. Это свидетельствует о том, что замена MINRES на  $IDR(s)$  не вносит искажений в физическую картину течения и не ухудшает спектральные свойства численного решения.

Методы семейства  $IDR(s)$  обеспечивают устойчивое ускорение расчётов по сравнению с MINRES в 1.5–2.5 раза, причём наиболее экономичные варианты  $IDR(1)$ ,



**Рис. 2.** Энергетические спектры  $E_k$  (слева) и спектры энтропии  $Z_k$  (справа) на момент времени  $t = 3$  с.



**Рис. 3.** Время вычислений (нормированное) для методов IDR( $s$ ) относительно MINRES.

IDR(2) и IDR(4) затрачивают лишь 40-45% времени MINRES. Хотя при больших  $s$  наблюдается возрастание времени счёта на некоторых шагах по времени, производительность IDR(8) и IDR(16) даже в эти моменты не опускается ниже уровня MINRES. Оптимальным выбором по совокупности критериев – быстродействию, стабильности сходимости и качеству решения – является метод IDR(4).

Таким образом, метод IDR( $s$ ) является эффективной и целесообразной альтернативой традиционному MINRES в качестве линейного решателя в составе JFNK-алгоритмов для нестационарных задач газовой динамики, решаемых с помощью DG-дискретизаций высокого порядка. Полученные результаты особенно актуальны для крупномасштабных расчетов, где сокращение времени выполнения является критически важным. В качестве рекомендованного значения параметра метода обоснован выбор  $s = 4$ , обеспечивающий оптимальное сочетание быстродействия и надежности

на гибридных вычислительных системах с GPU.

**Благодарности.** Авторы выражают благодарность Зининой С.Х. и Нефедову М.С. за интерес к работе и ценные замечания.

## Литература

1. Cockburn B. An introduction to the Discontinuous Galerkin method for convection-dominated problems // *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 1998. Vol. 1697. P. 151-268.
2. Knoll D.A., Keyes D.E. Jacobian-free Newton-Krylov methods: a survey of approaches and applications // *Journal of Computational Physics*. 2004. Vol. 193, No. 2. P. 357-397.
3. Paige C.C., Saunders M.A. Solution of sparse indefinite systems of linear equations // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1975. Vol. 12, No. 4. P. 617-629.
4. Sonneveld P., van Gijzen M.B. IDR(s): a family of simple and fast algorithms for solving large nonsymmetric linear systems // *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2008. Vol. 31, No. 2. P. 1035-1062.
5. van Gijzen M.B., Sonneveld P. Algorithm 913: An elegant IDR(s) variant that efficiently exploits biorthogonality properties // *ACM Transactions on Mathematical Software*. 2009. Vol. 38, No. 1. P. 1-19.
6. Lecoanet D., McCourt M., Quataert E., Burns K. J., Vasil G. M., Oishi J. S., Brown B. P., Stone J. M., O’Leary R. M. A validated non-linear Kelvin–Helmholtz benchmark for numerical hydrodynamics // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2016. Vol. 455, No. 4. P. 4274–4288.

MSC 65F10

## Comparative analysis of linear solvers for the Jacobian-free Newton–Krylov method for solving gas dynamics problems using an implicit scheme for the Discontinuous Galerkin Method

R.V. Zhalnin<sup>1</sup>, A.D. Mulyugin<sup>1</sup>, V.V. Vdovin<sup>1</sup>

National Research Mordovia State University<sup>1</sup>

*Abstract:* A comparative study of the efficiency of linear solvers within the Jacobian-free Newton–Krylov (JFNK) framework for the numerical simulation of two-dimensional gas dynamics equations using the discontinuous Galerkin method is presented. The classical MINRES method and the modern induced dimension reduction method IDR(s) with various values of parameter  $s$  are considered. The study is performed on the example of the Kelvin–Helmholtz instability problem. The accuracy of the obtained numerical solutions, spectral characteristics of the flow, and computational performance of the algorithms are analyzed. All IDR(s) variants are shown to provide a quality of vortex structure resolution and energy spectra comparable to that of MINRES. Meanwhile, all methods from the IDR(s) family require significantly less wall-clock time per time step compared to MINRES, achieving a speedup factor from 1.5 to 2.5, depending on the dimension of the auxiliary subspace. The IDR(4) method demonstrates the best balance between convergence rate and computational cost, which allows us to recommend it as an efficient linear solver within the JFNK approach for unsteady computational fluid dynamics problems.

*Keywords:* Discontinuous Galerkin Method, Implicit Scheme, Jacobian-free Newton–Krylov Method, MINRES method, IDR(s) method