

УДК 519.63

Применение схемы КАБАРЕ для численного моделирования двумерной тепловой конвекции

Ерошкина М.С.¹, Головизнин В.М.¹, Дерюгин Ю.Н.¹

Филиал Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова в
городе Сарове¹

Аннотация: Тепловая конвекция играет важную роль во многих областях, от строительства и электроники до ядерной энергетики и космических технологий. В связи с этим актуальной задачей вычислительной гидродинамики является разработка методов, повышающих точность моделирования тепловой конвекции при сохранении стабильности и умеренных вычислительных затратах. Несмотря на разнообразие существующих численных методов, включая схемы высокого порядка, методы второго порядка точности остаются наиболее востребованными: они обеспечивают баланс точности, стабильности и простоты реализации. В связи с этим схема КАБАРЕ представляет особый интерес благодаря своей простой реализации, аппроксимации второго порядка на компактном вычислительном шаблоне и хорошим диссипативно-дисперсионным характеристикам. В этой статье предлагается новый явно-неявный метод, основанный на схеме КАБАРЕ, для численного моделирования конвективного теплообмена в двумерных областях, использующий приближение слабой сжимаемости и применяемый как к плоской, так и к осесимметричной постановке задачи.

Ключевые слова: математическое моделирование, численные методы, схема КАБАРЕ.

Тепловая конвекция играет важную роль во многих сферах – от строительства и электроники до ядерной энергетики и космической техники. В связи с этим актуальной задачей вычислительной гидродинамики является разработка методов, обеспечивающих повышение точности моделирования тепловой конвекции при сохранении устойчивости и умеренных вычислительных затратах. Несмотря на многообразие существующих численных методов, в том числе схем высокого порядка, наиболее востребованными остаются методы второго порядка точности: они обеспечивают баланс точности, устойчивости и простоты реализации. В связи с этим схема «КАБАРЕ» [1] представляет особый интерес благодаря простой реализации, второму порядку аппроксимации на компактном вычислительном шаблоне и хорошими диссипативно-дисперсионными характеристиками. В данной работе для численного моделирования конвективного теплообмена в двумерных областях предложена новая явно-неявная методика, основанная на схеме «КАБАРЕ», использующая приближение слабой сжимаемости и применяемая как к плоским, так и к осесимметричным постановкам задач.

Система уравнений Навье–Стокса в приближении слабой сжимаемости [2] представляет собой смешанную гиперболически-параболическую систему законов сохранения массы, импульса и полной энергии:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial a^2 p u}{\partial x} + \frac{\partial y^v a^2 p v}{\partial y} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial p u}{\partial t} + \frac{\partial p u^2 + p}{\partial x} + \frac{\partial y^v p u v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(y^v \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \rho \beta g_x (T - T^0); \quad (2)$$

$$\frac{\partial p v}{\partial t} + \frac{\partial p u v}{\partial x} + \frac{\partial y^v p v^2}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(y^v \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \beta \rho g_y (T - T^0); \quad (3)$$

$$\frac{\partial C_p T}{\partial t} + \frac{\partial p u C_p T}{\partial x} + \frac{\partial y^v p v C_p T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\chi \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{1}{y^v} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^v \chi \frac{\partial T}{\partial y} \right). \quad (4)$$

Для построения численной методики в расчетной области строится декартова сетка и, в соответствии со схемой КАБАРЕ, вводятся два типа переменных: консервативные переменные, определенные в центрах ячеек, и потоковые переменные, определенные на гранях ячеек.

Алгоритм расчета шага состоит из трех фаз. На первой фазе определяются консервативные переменные на промежуточном временном слое. На этой фазе система уравнений законов сохранения аппроксимируется явно-неявной схемой, в которой конвективные потоки аппроксимируются явно и определяются по потоковым переменным. Диффузионные потоки аппроксимируются неявно по консервативным переменным, а получающаяся система разностных уравнений решается с использованием скалярной прогонки и метода расщепления по направлениям. На второй фазе определяются потоковые переменные на новом временном слое. Здесь используется характеристическая форма уравнений записанная относительно переноса инвариантов. Новые значения инвариантов на гранях ячеек определяются методом экстраполяции в пределах одной ячейки с последующей нелинейной коррекцией на основе принципа максимума. Затем, по инвариантам определенных на гранях ячеек, определяются значения примитивных переменных. На заключительной третьей фазе определяются значения консервативных переменных на новом временном слое. Здесь, как и на первой фазе, система уравнений законов сохранения аппроксимируется явно-неявной схемой, в которой конвективные потоки аппроксимируются явно и определяются по новым потоковым переменным, а диффузионные потоки аппроксимируются неявно по консервативным переменным. Получающаяся система разностных уравнений решается также с использованием метода расщепления по направлениям и скалярной прогонки.

Вычислительный алгоритм реализован на языке C++ и был проверен на ряде задач, имеющих точное решение и задачах, решенных другими методами. В частности, была решена задача о развитии неустойчивости Релея–Тейлора между холодной и горячей жидкостью и задача Девиса [3] о тепловой конвекции в квадратной области для различных чисел Релея. С использованием построенного алгоритма были проведены численные исследования тепловой конвекции в осесимметричных областях.

Литература

1. Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А., Короткин И.А. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. Москва: Издательство МГУ, 2013. 406 с.
2. Chorin A.J. A numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems // Journal of Computational Physics. 1967. Vol. 2, No. 1. P. 12-26.
3. De Vahl Davis G. Natural Convection of Air in a Square Cavity: A Bench Mark Numerical Solution // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 1983. Vol. 3. P. 249-264.

MSC 80A20

Application of the CABARE scheme for numerical simulation of two-dimensional thermal convection

M.S. Eroshkina¹, V.M. Goloviznin¹, Yu.N. Deryugin¹

Branch of Lomonosov Moscow State University in Sarov¹

Abstract: Thermal convection plays an important role in many fields, from construction and electronics to nuclear power and space technology. In this regard, an urgent task of computational fluid dynamics is the development of methods that improve the accuracy of modeling thermal convection while maintaining stability and moderate computational costs. Despite the variety of existing numerical methods, including high-order schemes, the methods of the second order of accuracy remain the most in demand: they provide a balance of accuracy, stability and ease of implementation. In this regard, the CABARE scheme is of particular interest due to its simple implementation, second-order approximation on a compact computational template, and good dissipative-dispersion characteristics. In this paper, a new explicit-implicit technique based on the "CABARE" scheme is proposed for numerical modeling of convective heat transfer in two-dimensional regions, using the weak compressibility approximation and applied to both planar and axisymmetric problem statements.

Keywords: mathematical modeling, numerical methods, CABARET scheme.