

УДК 517.929.4

Устойчивость однородных дифференциально-разностных систем нейтрального типа

Евтина Д.С.¹, Жабко А.П.¹

Санкт-Петербургский государственный университет¹

Аннотация: Работа посвящена исследованию устойчивости однородных дифференциально-разностных систем нейтрального типа методом Разумихина. Показано, что за счёт выбора определённой окрестности теорема Разумихина обеспечивает асимптотическую устойчивость нулевого решения рассматриваемых систем. В дальнейшем планируется получить оценку такой окрестности методом функционалов Ляпунова–Красовского и сравнить эти два результата.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, системы с запаздыванием, запаздывание нейтрального типа, однородные системы, устойчивость.

1. Введение

Однородные системы уравнений с отклоняющимся аргументом [1, 2] описывают многие механические, биологические и экономические процессы. Для исследования устойчивости таких систем существует два наиболее распространённых метода: метод функций Разумихина [3] и метод функционалов Ляпунова–Красовского [1]. Целью данной работы является исследование возможности применения теоремы Разумихина к анализу асимптотической устойчивости нулевого решения однородной системы с запаздыванием нейтрального типа.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений:

$$\dot{x}(t) = D\dot{x}(t-h) + F(x(t)) + G(x(t-\tau)), \quad (1)$$

где $h > 0$, $\tau > 0$ – запаздывания, а F и G – непрерывные однородные порядка $\mu > 1$ функции.

Предположим, что вспомогательная система без запаздывания

$$(E - D)\dot{x}(t) = F(x(t)) + G(x(t)) \quad (2)$$

асимптотически устойчива по Ляпунову.

Нашей задачей является исследование устойчивости системы (1) методом Разумихина.

3. Основной результат

Известно [4], что, если система без запаздывания (2) асимптотически устойчива, то существует положительно определённая и однородная порядка $k > 2$ функция

Ляпунова $V(z)$, удовлетворяющая в некоторой окрестности $\|z\| < H$, $H > 0$ следующему уравнению:

$$\left(\frac{\partial V(z)}{\partial z}\right)^T \left(\tilde{F}(z) + \tilde{G}(z)\right) = -W(z),$$

где $W(z)$ – заданная положительно определённая однородная функция порядка $k + \mu - 1$, а

$$\tilde{F}(z) = F((E - D)^{-1}z), \quad \tilde{G}(z) = G((E - D)^{-1}z).$$

Пусть $y(t) = x(t) - Dx(t - h)$. Перепишем систему (1) в виде

$$\dot{y}(t) = \tilde{F}(y(t)) + \tilde{G}(y(t - \tau)). \quad (1')$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left.\frac{dV(y(t))}{dt}\right|_{(1')} &= \left(\frac{\partial V(y(t))}{\partial y}\right)^T \left[\tilde{F}((E - D)x(t)) + \tilde{G}((E - D)x(t - \tau))\right] = -W(y(t)) + \\ &+ \left(\frac{\partial V(y(t))}{\partial y}\right)^T \left[\left(\tilde{F}((E - D)x(t)) - \tilde{F}(y(t))\right) + \left(\tilde{G}((E - D)x(t - \tau)) - \tilde{G}(y(t))\right)\right]. \end{aligned}$$

Далее применим следующие равенства:

$$\begin{aligned} \tilde{F}((E - D)x(t)) - \tilde{F}(x(t) - Dx(t - h)) &= \\ &= \int_0^1 \left(\tilde{F}'((E - D)x(t) + (\nu - 1)D(x(t - h) - x(t)))\right)'_{\nu} d\nu = \\ &= \int_0^1 \frac{\partial \tilde{F}(z_1)}{\partial z_1} d\nu D(x(t - h) - x(t)), \quad z_1 = (E - D)x(t) + (\nu - 1)D(x(t - h) - x(t)), \\ \tilde{G}((E - D)x(t - \tau)) - \tilde{G}(x(t) - Dx(t - h)) &= \\ &= \int_0^1 \tilde{G}'_{\nu}(\nu(E - D)x(t - \tau) + (1 - \nu)(x(t) - Dx(t - h))) d\nu = \\ &= \int_0^1 \frac{\partial \tilde{G}(z_2)}{\partial z_2} d\nu \left[(E - D)x(t - \tau) + Dx(t - h) - x(t)\right], \\ &\quad z_2 = \nu((E - D)x(t - \tau)) + (1 - \nu)(x(t) - Dx(t - h)) \end{aligned}$$

и получим представление производной от функции $V(z)$ в силу системы (1'):

$$\begin{aligned} \left.\frac{dV(y(t))}{dt}\right|_{(1')} &= \underbrace{-W(y(t))}_{I_1} + \underbrace{\left(\frac{\partial V(y(t))}{\partial y}\right)^T \int_0^1 \frac{\partial \tilde{F}(z_1)}{\partial z_1} d\nu D(x(t - h) - x(t))}_{I_2} + \\ &+ \underbrace{\left(\frac{\partial V(y(t))}{\partial y}\right)^T \int_0^1 \frac{\partial \tilde{G}(z_2)}{\partial z_2} d\nu \left[(E - D)x(t - \tau) + Dx(t - h) - x(t)\right]}_{I_3}. \end{aligned} \quad (3)$$

Чтобы провести анализ поведения решений исходной системы (1), покажем, что существует $H > 0$ такое, что в окрестности $U_H(\mathbb{O})$ функция $\left. \frac{dV(y(t))}{dt} \right|_{(1')}$ является отрицательно определённой функцией на множестве кривых Разумихина

$$R_t(c) = \left\{ y(\sigma) \in C^1([t-2h, t] \times R^n) \left| V(y(\sigma)) \leq V(y(t)) = c, \quad \sigma \in [t-2h, t] \right. \right\}.$$

Поскольку слагаемое I_1 в формуле (3) является отрицательно определённой и однородной порядка $k + \mu - 1$ функцией, а слагаемые I_2 и I_3 являются однородными по y функциями порядка $k + \mu - 2$, то далее покажем, что $[x(t) - x(t-h)]$, $[x(t) - x(t-\tau)]$, $[x(t-\tau) - x(t-h)]$ – суть однородные функции порядка μ .

Рассмотрим положительно определённую функцию $v(x) = x^T Q x$, в которой матрица Q выбрана таким образом, что $v(x) > v(Dx)$ для всех $x \in R^n$.

Пусть $d = \min_{\|x\|=1} (v(x) - v(Dx))$.

Лемма 1. Если $x(t) = Dx(t-h) + y(t)$, то при $v(x(t-h)) \leq v(x(t))$ имеют место оценки:

$$\begin{cases} v(y(t)) \leq (2 - d + 2\sqrt{1-d})v(x(t)) \\ v(y(t)) \geq (2 - d - 2\sqrt{1-d})v(x(t)). \end{cases} \quad (4)$$

Доказательство.

$$v(y(t)) = v(x(t) - Dx(t-h)) = v(x(t)) + v(Dx(t-h)) - 2x^T(t)QDx(t-h).$$

Поскольку $v(Dx(t-h)) \leq (1-d)v(x(t))$ и $|x^T(t)QDx(t-h)| = \sqrt{v(x(t))v(x(t-h))} \leq \sqrt{1-d}v(x(t))$, получаем неравенства (4).

Доказательство завершено.

Следствие 1. Аналогичные оценки для производных можно получить, исходя из равенства $\dot{x}(t) = D\dot{x}(t-h) + \dot{y}(t)$.

Теперь, опираясь на следствие к лемме, оценим норму функций

$$\begin{aligned} \|x(t) - x(t-h)\| &= \|\dot{x}(\theta_1)\|h \leq A\|x_t\|_h^\mu \leq \tilde{A}\|x_t\|_h^{\mu-1}\|x_t\|, \\ \|x(t) - x(t-\tau)\| &= \|\dot{x}(\theta_2)\|\tau \leq B\|x_t\|_\tau^\mu \leq \tilde{B}\|x_t\|_\tau^{\mu-1}\|x_t\|_\tau, \\ \|x(t) - x(t-h)\| &= \|\dot{x}(\theta_3)\|(h-\tau) \leq \tilde{C}\|x_t\|_h^{\mu-1}\|x_t\|_h. \end{aligned}$$

Следовательно

$$\left. \frac{dV(y(t))}{dt} \right|_{(1')} = -W(y(t)) + K\|y_t\|^{\mu-1}\|y_t\|^{k+\mu-1}$$

на множестве Разумихина $R_t(c)$.

4. Выводы

В ходе работы получены следующие выводы:

1. Окрестность $U_H(\mathbb{O})$, в которой теорема Разумихина обеспечивает асимптотическую устойчивость нулевого решения, определяется неравенством

$$0 < KH^{\mu-1} < \min_{\|\varphi\|_{h+\theta}=1} W(\varphi).$$

2. Верхняя оценка решения $y(t)$ может быть получена в виде $V(y(t)) = z(t)$, где $z(t)$ является решением обыкновенной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{z}(t) = \Phi(z(t)), \quad \Phi(z) = \max_{\varphi \in R(z)} (-W(z) + K \|\varphi\|_{h+\tau}^{k+2\mu-2}).$$

Литература

1. Kharitonov V.L. Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices. Basel: Birkhäuser, 2013. 311 p.
2. Эльсгольц Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Москва: Наука, 1964. 128 с.
3. Разумихин Б.С. Метод исследования устойчивости систем с последействием // Доклады Академии наук. 1966. Т. 167, № 6. С. 1234-1237.
4. Зубов В.И. Устойчивость движения (методы Ляпунова и их применение). 2-е изд. Москва: Высшая школа, 1984. 232 с.

MSC 34K40

Stability of homogeneous differential-difference systems of neutral type

D.S. Evtina¹, A.P. Zhabko¹

Saint Petersburg State University¹

Abstract: This work is devoted to the analysis of the stability of homogeneous differential-difference systems of neutral type using the Razumikhin method. It is demonstrated that choosing a specific neighborhood, Razumikhin's theorem ensures asymptotic stability of the zero solution of such type of systems. In the future the estimation of this neighborhood using the Lyapunov-Krasovskii functional method and the comparison of these two results is planned.

Keywords: differential equations, time-delay systems, neutral type delay, homogeneous systems, stability.