

УДК 517.958

Сходящиеся разностные схемы в анализе сетеподобных гидродинамических процессов

Гусельникова И.В.¹

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого¹

Аннотация: Указаны принципы построения сходящихся разностных схем при анализе краевой и начально-краевой задач для системы Навье-Стокса-Осина, рассматриваемых в пространстве Соболева вектор-функций с носителями в трехмерной сетеподобной области.

Ключевые слова: сетеподобная область, краевая задача, устойчивость и сходимость разностной схемы.

1. Введение

Рассматриваются метод конечных разностей для доказательства существования слабого решения линеаризованной по Осину системы Навье-Стокса и принципы построения разностных схем, устойчивых в метриках, соответствующим энергетическим.

2. Используемые обозначения.

Связная сетеподобная область $\mathfrak{S} \subset \mathbb{R}^3$ ($\partial\mathfrak{S}$ — граница $\mathfrak{S}$) состоит из совокупности ограниченных подобластей $\mathfrak{S}_j$ ($\partial\mathfrak{S}_j$ — граница $\mathfrak{S}_j$), $j = 1, 2, \dots, N$, и совокупности двухсторонних поверхностей S_j ($S_j \subset \partial\mathfrak{S}_j$, а S_j^+ , S_j^- — стороны поверхности S_j), $j = 1, 2, \dots, N - 1$, которые являются частями границ смежных подобластей и определяют поверхности взаимного примыкания этих подобластей, при этом $\partial S_j \subset \partial\mathfrak{S}$ ($j = 1, 2, \dots, N - 1$) ([1, 2]).

Используются пространства Соболева действительных, измеримых по Лебегу скалярных функций $u(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathfrak{S}$, $\mathfrak{S} \subset \mathbb{R}^3$, имеющих обобщенные производные 1-го порядка $\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \in L_2(\mathfrak{S})$ ($i = 1, 2, 3$), скалярное произведение и норма определены соотношениями $(u, v)_{\mathfrak{S}}^1 = \int_{\mathfrak{S}} \left(u(x)v(x) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \right) dx$, $\|u\|_{\mathfrak{S}}^1 = \sqrt{(u, u)_{\mathfrak{S}}^1}$.

3. Стационарная система Навье-Стокса-Осина.

Для вектор-функций $u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))$ с переменной $x = (x_1, x_2, x_3) \in \bigcup_{j=1}^N \mathfrak{S}_j$, рассмотрим систему (здесь Δ — оператор Лапласа)

$$\nu \Delta u + \sum_{i=1}^3 a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} = \text{grad } p + f, \quad (1)$$

$$\text{div } u = 0 \quad \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \right), \quad (2)$$

$$u(x)|_{S_j^+} = u(x)|_{S_j^-}, \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n_j^+} + \frac{\partial u(x)}{\partial n_j^-} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (4)$$

где n_j^+ и n_j^- — внешние нормали к S_j^+ и S_j^- , соответственно;
 Добавляя к (1)–(4) граничное условие

$$u(x)|_{x \in \partial \mathfrak{S}} = 0, \quad (5)$$

получаем краевую задачу (1)–(5) для линейризованной системы Навье-Стокса относительно функций $u(x)$, $p(x)$ в замкнутой области $\bar{\mathfrak{S}}$ ($\bar{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S} \cup \partial \mathfrak{S}$).

Пусть $\mathcal{X}(\mathfrak{S}) = \{u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x)) : u_k(x) \in C^1(\bar{\mathfrak{S}}), k = 1, 2, 3, \operatorname{div} u = 0\}$ (через $\tilde{C}^1(\bar{\mathfrak{S}})$ обозначено множество непрерывно дифференцируемых на $\bar{\mathfrak{S}}_j$ ($j = 1, 2, \dots, N$) функций, удовлетворяющих условиям (3), (4)), а $\mathcal{X}_0(\mathfrak{S}) = \{u(x) : u(x) \in \mathcal{X}(\mathfrak{S}), u(x)|_{\partial \mathfrak{S}} = 0\}$.

Определение 1. Пространства $(\tilde{W}^1(\mathfrak{S}))^3$, $(\tilde{W}_0^1(\mathfrak{S}))^3$ — замыкания множеств $\mathcal{X}(\mathfrak{S})$, $\mathcal{X}_0(\mathfrak{S})$ в норме $(W_2^1(\mathfrak{S}))^3$, соответственно; $(\tilde{W}_0^1(\mathfrak{S}))^3 \subset (\tilde{W}^1(\mathfrak{S}))^3$.

Используя формулу Грина, получим интегральные тождества

$$\nu \int_{\mathfrak{S}} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} dx - \int_{\mathfrak{S}} \sum_{i=1}^3 a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta dx = - \int_{\mathfrak{S}} f \eta dx \quad (6)$$

на $\mathfrak{S}$ и

$$\int_{S_j^-} \frac{\partial u(x)}{\partial n_j^-} \eta dS + \int_{S_j^+} \frac{\partial u(x)}{\partial n_j^+} \eta dS = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N-1. \quad (7)$$

на каждой поверхности S_j .

4. Сходящаяся разностная схема задачи (1)–(5).

Обратимся вначале к построению дискретного аналога пространства $(\tilde{W}_0^1(\mathfrak{S}))^3$.

Используются простейшая (кусочно-постоянная) интерполяции

$$\hat{u}_h(x) = u_h|_{x=(mh)}$$

при $x \in \omega_{(mh)}$, где $(mh) = (m_1 h_1, m_2 h_2, m_3 h_3)$ — фиксированная вершина ячейки $\omega_{(mh)}$, используется также полилинейная интерполяция

$$\begin{aligned} \acute{u}_h(x) = & u_h + u_{x_1}(x_1 - m_1 h_1) + u_{x_2}(x_2 - m_2 h_2) + u_{x_3}(x_3 - m_3 h_3) + \\ & + u_{x_2 x_3}(x_2 - m_2 h_2)(x_3 - m_3 h_3) + u_{x_1 x_3}(x_1 - m_1 h_1)(x_3 - m_3 h_3) + \\ & + u_{x_1 x_2}(x_1 - m_1 h_1)(x_2 - m_2 h_2) + u_{x_1 x_2 x_3}(x_1 - m_1 h_1)(x_2 - m_2 h_2)(x_3 - m_3 h_3) \end{aligned}$$

при $x = (x_1, x_2, x_3) \in \bar{\omega}_{(mh)}$, $\bar{\omega}_{(mh)} = \{x : m_i h_i \leq x_i \leq (m_i + 1)h_i, i = 1, 2, 3\}$ [4, с. 284].
 Дискретный аналог условий (4) принимает вид

$$\hat{u}_h|_{S_j^-(mh)} = \hat{u}_h|_{S_j^+(mh)}, \quad (\hat{u}_{h,n_j^-} + \hat{u}_{h,n_j^+})|_{S_j(mh)} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (8)$$

Дискретный аналог соотношения (2) для интерполяции $\hat{u}_h$ слабого решения $u(x) \in (\tilde{W}_0^1(\mathfrak{S}))^3$ определяется соотношением

$$\hat{u}_{1hx_1}(mh) + \hat{u}_{2hx_2}(mh) + \hat{u}_{3hx_3}(mh) = 0 \quad (9)$$

в вершинах (mh) сетки $(\mathfrak{S})_h$, равенство (5) для сеточных функций $\hat{u}_h$ заведомо выполнены.

В соответствии со сказанным, тождество (6) для $\hat{u}_h(x), \hat{\eta}_h(x) \in (\Sigma_{0h}(\mathfrak{S}_h))^3$ заменяется соотношением

$$\nu \Delta_h \sum_{\mathfrak{S}_h^+} \sum_{i=1}^3 u_{x_i} \eta_{x_i} - \Delta_h \sum_{\mathfrak{S}_h^+} \sum_{i=1}^3 a_{ih} u_{x_i} \eta_h = -\Delta_h \sum_{\mathfrak{S}_h^+} f_h \eta_h, \quad (10)$$

Можно преобразовать соотношение (10) в систему разностных уравнений

$$\nu \sum_{i=1}^3 u_{x_i \bar{x}_i} + \sum_{i=1}^3 a_{ih} u_{x_i} = f_h \quad (11)$$

$$\begin{aligned} u_h|_{S_j^+(mh)} &= u_h|_{S_j^-(mh)}, \quad (u_{h,n_j^-} + u_{h,n_j^+})|_{S_j(mh)} = 0, \quad j = \overline{1, N-1}, \\ (u_{1x_1} + u_{2x_2} + u_{3x_3})|_{(\mathfrak{S})_h} &= 0, \quad u_h|_{\partial \mathfrak{S}_h} = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

Теорема 1. Пусть $a(x)$ — ограниченная функция из $(\tilde{W}_0^1(\mathfrak{S}))^3$, $f(x) \in (L_2(\mathfrak{S}))^3$ и пусть $\delta > 0$. Тогда алгебраическая система (11), (12) однозначно разрешима и ей соответствующая разностная схема устойчива в сеточной норме дискретного аналога $(\Sigma_{0h}(\mathfrak{S}_h))^3$ пространства $(\tilde{W}_0^1(\mathfrak{S}))^3$.

Теорема 2. При выполнении условий теоремы 1 разностная схема (12), (13) устойчива в энергетической норме, причем интерполяции $\{\hat{u}_h(x)\}$ для решений $\{u_h\}$ системы разностных уравнений (11), (12) сходятся сильно в $(L_2(\mathfrak{S}))^3$ к слабому решению $u(x) \in \tilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ задачи (1)–(5), производные $\frac{\partial \hat{u}_h(x)}{\partial x_i}$ сходятся слабо в $(L_2(\mathfrak{S}))^3$ к $\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, 3$.

Теорема 3. Если выполнены условия теоремы 1, тогда интерполяции $\hat{u}_h(x)$ сильно сходятся к $u(x)$ в $(\tilde{W}_0^1(\mathfrak{S}))^3$.

Литература

1. Guselnikova I.V., Provotorov V.V. A Difference Scheme for the Stationary Navier–Stokes–Oseen System in the Class of Summable Functions Supported on a Network-like Domain // Proceedings of the IXth International School-Seminar on Nonlinear Analysis and Extremal Problems (NLA-2026). Irkutsk, Russia, June 22-26. Irkutsk: ISDCT SB RAS, 2026. P. 67-68.
2. Жабко А.П., Провоторов В.В., Тран З., Еремин А.С. Сходящиеся разностные схемы эллиптического уравнения в классе суммируемых функций с сетеподобным носителем // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2025. Т. 21, Вып. 2. С. 197-216.

3. Гусельникова И.В. Слабая разрешимость задачи о напряженно-деформированном состоянии слоистой композиционной среды // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Сборник материалов Международной научной конференции (г. Воронеж, 1-3 декабря 2025 г.). Воронеж: Издательство «Прометей», 2026. С. 532-535.
4. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. Москва: Наука, 1973. 407 с.

MSC 74G55

Convergent difference schemes in the analysis of network-like hydrodynamic processes

I.V. Guselnikova¹

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University¹

Abstract: The principles of constructing convergent difference schemes in the analysis of boundary and initial boundary value problems for the Navier-Stokes-Osin system considered in the Sobolev space of vector functions with carriers in a three-dimensional network-like domain are indicated.

Keywords: Network-like domain, boundary value problem, stability and convergence of the difference scheme