

УДК 519.63

## Об одном алгоритме разрешения пространственных структур с внутренними несогласованными границами\*

Губайдуллин И.М.<sup>1,2</sup>, Янгляев И.Р.<sup>1,3</sup>, Повещенко Ю.А.<sup>4</sup>,  
Подрыга В.О.<sup>4,5</sup>, Язовцева О.С.<sup>1,3</sup>

УГНТУ<sup>1</sup>, ИНК УФИЦ РАН<sup>2</sup>, Национальный исследовательский Мордовский  
государственный университет<sup>3</sup>, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН<sup>4</sup>, МАДИ<sup>5</sup>

*Аннотация:* В работе представлен алгоритм прямого разрешения доменных структур с внутренними несогласованными границами. На всей области интегрирования организована сетка с большим пространственным разбиением (макросетка с макроячейками), внутри некоторых из ее ячеек с целью детализации расчетов построены сетки с более мелким пространственным шагом (микросетки с микроячейками). Границы макроячеек с примыкающими к ним микроячейками являются несогласованными по шагам пространственных сеток. На микросетках реализован алгоритм символьной прогонки – модификация алгоритма классической прогонки, основное отличие которого заключается в полиномиальном представлении сеточной функции, прогоночных коэффициентов и невязки. Полиномы зависят от значений функции в узлах декомпозированных макроячеек. Для согласования решений на несогласованных границах применены предобуславливатели, позволяющие сохранить свойства самосопряженности, знакоопределенности и монотонности полного оператора краевой задачи.

*Ключевые слова:* математическое моделирование, двухфазная фильтрация, метод прогонки, mortarные сетки, уравнение пьезопроводности, трещиновато-пористая среда, карбонатный коллектор.

Современная нефтепромышленность требует постоянного развития производства. Натурные испытания требуют значительных вложений и в большей части случаев оказываются невыгодными [1]. Математическое моделирование выступает эффективным инструментом решения современных промышленных задач [2]. В современной нефтегазовой инженерии остро стоит вопрос построения вычислительных алгоритмов для задач флюидодинамики. К подобным относятся задачи моделирования процессов двухфазной фильтрации в нефтесодержащих пористых структурах.

Построенный в работе на основе метода символьной прогонки вычислительный алгоритм применен к решению двумерного уравнения пьезопроводности. Он позволяет исследовать динамику пластового давления в трещиновато-пористых коллекторах, характерных для карбонатных нефтяных месторождений [3].

Пьезопроводное уравнение для задачи Дирихле в изотермическом приближении, учитывающее двухфазный характер течения несмешивающихся жидкостей в пористой среде, решается во внутренних микроузлах выбранной макроячейки при заранее неизвестных значениях давления в ее угловых вершинах. Данная математическая постановка позволяет эффективно моделировать процессы пьезопроводности при двухфазной флюидодинамике в трещиновато-пористом коллекторе. Для реше-

---

\*Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда, проект № 25-71-20005, <https://rscf.ru/project/25-71-20005/>.

ния уравнения в области интегрирования построена равномерная прямоугольная сетка с большим пространственным шагом – макросетка с макроячейками. Внутри данной выбранной макроячейки реализовано более мелкое пространственное разбиение – микросетка с микроячейками. Граница декомпозированной макроячейки с прилегающими к ней микроячейками является несогласованной (мортарной) по шагам пространственных сеток.

На микросетке реализован алгоритм символьной прогонки. Его основное отличие от классического варианта заключается в представлении сеточной функции, свободного члена в балансных соотношениях (невязки) и прогоночных коэффициентов в полиномиальном виде. Коэффициенты и свободный член полиномов подлежат вычислению с помощью метода переменных направлений в процессе внутренних итераций.

Верификация разработанного алгоритма символьной прогонки проведена на задачах с известными аналитическими решениями. Анализ алгоритма для разностной схемы второго порядка показал сохранение второго порядка точности.

Вычислительный алгоритм для «сшивки» решений на мортарной границе построен с использованием предобуславливателей, обеспечивающих сохранение свойств самосопряженности, знакоопределенности и монотонности полного оператора краевой задачи. Практическая значимость исследования состоит в разработке вычислительного алгоритма, позволяющего проводить быстрые параметрические исследования трещиновато-пористых коллекторов без повторной сборки глобальной матрицы разрешения всего месторождения, а также в подтверждении потенциала символьных методов для задач локального уточнения в гидродинамическом моделировании пластов.

## Литература

1. Bratton T., Canh D.V., Que N.V., Sonnerland L. The nature of naturally fractured reservoirs // Oilfield Rev. 2006. Vol. 18. P. 4–23.
2. Panaedova G., Frumina S., Mityushina I. Digital Technologies in the Oil and Gas Industry: Main Directions and Development Trends // Digital Transformation in Sustainable Value Chains and Innovative Infrastructures / Ed. by G. Mutanov, A. Serikbekuly. Cham: Springer, 2022. Vol. 443. P. 67–76. DOI: 10.1007/978-3-031-07067-9\_6.
3. Uzyanbaev R.M., Bobreneva Yu.O., Poveshchenko Yu.A., Podryga V.O., Polyakov S.V., Rahimly P.I., Gubaydullin I.M. Numerical modeling of two-phase fluid filtration for carbonate reservoir in two-dimensional formulation // Mathematics. 2024. Vol. 12. P. 3412. DOI: 10.3390/math12213412.
4. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.

MSC 65N06

## On an algorithm for resolving spatial structures with internal non-matching boundaries

I.M. Gubaydullin<sup>1,2</sup>, I.R. Yanglyayev<sup>1,3</sup>, Yu.A. Poveshchenko<sup>4</sup>, V.O. Podryga<sup>4,5</sup>,  
O.S. Yazovtseva<sup>1,3</sup>

USPTU<sup>1</sup>, IPC UFRC RAS<sup>1</sup>, National Research Mordovian State University<sup>3</sup>,  
KIAM<sup>4</sup>, MADI<sup>5</sup>

*Abstract:* The work presents an algorithm for the direct resolution of domain structures with internal non-matching boundaries. A grid with a coarse spatial partition (a macrogrid with macrocells) is organized in the integration area, and grids with a finer spatial step (microgrids with microcells) are built inside some of its cells for detailed computations. The boundaries of macrocells with adjoining microcells are non-matching in the steps of spatial grids. The symbolic tridiagonal matrix algorithm (TDMA) is implemented on microgrids, a modification of the classical tridiagonal matrix algorithm, the main difference of which is in the polynomial representation of the grid function, the TDMA coefficients and the residual. The polynomials depend on the function values at the nodes of the decomposed macrocells. To coupling solutions on non-matching boundaries, preconditioners are used to preserve the properties of self-conjugacy, sign-definiteness, and monotonicity of the complete operator of the boundary value problem.

*Keywords:* mathematical modeling, two-phase filtration, tridiagonal matrix algorithm, mortar grids, piezoconductivity equation, fractured-porous medium, carbonate reservoir.