

УДК 539.3:533.6

О построении стабилизирующего управления для трубопроводной системы

Гладун А.В.¹, Вельмисов П.А.²

Ульяновский институт гражданской авиации имени Главного маршала авиации
Б.П. Бугаева¹, Ульяновский государственный технический университет²

Аннотация: Рассматривается задача построения стабилизирующего управления, обеспечивающего гашение продольно-поперечных колебаний упругого трубопровода, транспортирующего жидкость. Математическая модель представляет собой систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, учитывающую продольные и поперечные деформации трубопровода при взаимодействии трубопровода с движущейся жидкостью. С помощью метода Галеркина исходная система сводится к конечномерной системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Для случая двух базисных функций найдены условия управляемости по линейному приближению и с помощью функции Ляпунова построено управление с обратной связью, обеспечивающее асимптотическую устойчивость нулевого решения. Приведены результаты численного моделирования динамики трубопроводной системы под действием построенного управления.

Ключевые слова: упругий трубопровод, продольные и поперечные колебания, уравнения с частными производными, метод Галеркина, управляемость, управление с обратной связью, функция Ляпунова, асимптотическая устойчивость.

1. Введение

Задача построения стабилизирующего управления для трубопровода, транспортирующего жидкость, исследуется по многим причинам. Трубопроводы широко используются не только для транспортировки жидкостей, но и в инженерных приложениях, например в системах охлаждения, операциях дозаправки в воздухе, океанской добыче полезных ископаемых, поэтому результаты исследований могут найти практическое применение [3, 5, 6]. Обычно, если скорость потока достаточно велика, устойчивое положение равновесия становится неустойчивым и в системе появляются самовозбуждающиеся поперечные колебания, а в некоторых случаях и продольная деформация. Тогда возникает необходимость гасить колебания трубопровода путем подходящего управляющего воздействия [12–14]. Для стабилизации труб, транспортирующих жидкость, предложены многочисленные методы активного управления [1]. Они основаны на применении различных устройств, генерирующих поперечные силы или изгибающие моменты, которые активно воздействуют на систему. К таким примерам относятся сервомоторы, тем или иным образом соединенные с трубой [2, 7], пьезоэлектрические элементы, прикрепленные к трубе [4, 8].

2. Постановка задачи

Рассматривается задача построения стабилизирующего управления, обеспечивающего гашение продольно-поперечных колебаний трубопровода. Математическая модель трубопровода с учётом взаимодействия с жидкостью [9–11] описывается сле-

дующими нелинейными дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} \mu u_{tt} - \left[EF \left(u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) \right]_x - \gamma_2 u_{xxt} + \gamma_1 u_t + \gamma_0 u &= g(x, t), \\ \mu w_{tt} - \left[EF \left(u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) w_x \right]_x + EJ w_{xxxx} + \alpha_2 w_{xxxxt} + (P(t) w_x)_x & \\ + m_* U^2(t) w_{xx} + 2m_* U(t) w_{xt} + m_* U_t(t) w_x + \alpha_1 w_t + \alpha_0 w &= f(x, t). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $u(x, t)$, $w(x, t)$ — продольные и поперечные деформации в сечении x трубопровода в момент времени t ; $\mu = m_0 + m_*$, $m_0 = \rho F$ — погонная масса трубопровода, $m_* = \rho_* F_*$ — погонная масса жидкости; ρ — плотность материала трубопровода; F — площадь поперечного сечения трубопровода; ρ_* — плотность жидкости; F_* — площадь поперечного сечения, занимаемая жидкостью; α_2 , γ_2 — коэффициенты демпфирования в материале трубопровода; α_1 , γ_1 — коэффициенты демпфирования внешних вязкоупругих связей; α_0 , γ_0 — коэффициенты жёсткости внешних вязкоупругих связей; E — модуль упругости материала трубопровода; J — момент инерции поперечного сечения трубопровода относительно нейтральной оси, перпендикулярной плоскости колебаний; $P(t)$ — продольная сила; $g(x, t)$ — внешняя распределённая продольная нагрузка; $f(x, t)$ — внешняя распределённая поперечная нагрузка; $U(t)$ — скорость жидкости в трубопроводе.

Индексы x и t далее обозначают частные производные по координате x и времени t соответственно. Коэффициенты μ , EF , EJ , m_* , γ_0 , γ_1 , γ_2 , α_0 , α_1 , α_2 положительны.

Задача. Найти для системы (1) условия существования и вид таких управляющих воздействий $g(x, t)$ и $f(x, t)$, что соответствующее им нулевое решение системы уравнений $u(x, t) = 0$, $w(x, t) = 0$, $x \in [0, l]$ будет асимптотически устойчивым.

3. Построение решений

Для построения решения системы уравнений (1) используется метод Галеркина и функции $u(x, t)$, $w(x, t)$ записываются в виде

$$\sum_{k=1}^n v_k(t) g_k(x),$$

где $\{g_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}\}_{k=1}^\infty$ — полная на $[0, l]$ система базисных функций, соответствующих случаю шарнирного закрепления концов трубопровода

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad w(0, t) = w(l, t) = w''(0, t) = w''(l, t) = 0.$$

В случае $n = 2$ имеем

$$u(x, t) = v_1(t) \sin \frac{\pi x}{l} + v_2(t) \sin \frac{2\pi x}{l}, \quad w(x, t) = v_3(t) \sin \frac{\pi x}{l} + v_4(t) \sin \frac{2\pi x}{l}$$

и систему четырех обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка для функций $v_1(t)$, $v_2(t)$, $v_3(t)$, $v_4(t)$, содержащих управления $up_1(t, v_1, v_2)$, $up_2(t, v_1, v_2)$, $up_3(t, v_3, v_4)$, $up_4(t, v_3, v_4)$, полученные в результате применения процедуры метода Галеркина к функциям $g(x, t)$ и $f(x, t)$ соответственно. Для этой системы найдены условия управляемости по линейному приближению и при помощи функции Ляпунова построено стабилизирующее управление. Приведены результаты численного моделирования поведения трубопроводной системы при заданных параметрах под действием построенных управлений.

Литература

1. Ding H., Ji J.C. Vibration control of fluid-conveying pipes: a state-of-the-art review // Appl. Math. Mech. (Engl. Ed.). 2023. Vol. 44, No. 9. P. 1423-1456.
2. Doki H., Hiramoto K., Skelton R. Active control of cantilevered pipes conveying fluid with constraints on input energy // J. Fluids Struct. 1998. Vol. 12, No. 5. P. 615-628.
3. Li Q., Liu W., Zhang Z., Yue Z. Parametric resonance of pipes with soft and hard segments conveying pulsating fluids // Int. J. Struct. Stab. Dyn. 2018. Vol. 18, No. 10. 1850119.
4. Lin Y.H., Chu C.L. Active flutter control of a cantilever tube conveying fluid using piezoelectric actuators // J. Sound Vib. 1996. Vol. 196, No. 1. P. 97-105.
5. Gao P., Yu T., Zhang Y., Wang J., Zhai J. Vibration analysis and control technologies of hydraulic pipeline system in aircraft: A review // Chin. J. Aeronaut. 2021. Vol. 34, No. 4. P. 83-114.
6. Sun X., Yan H., Dai H. Stability and dynamic evolution of sliding fluid-transporting pipes in three-dimensional sense // Int. J. Struct. Stab. Dyn. 2020. Vol. 20, No. 3. 2050036.
7. Tani J., Sudani Y. Active flutter suppression of a vertical pipe conveying fluid // JSME Int. J. Ser. C Dyn. Control Robot Design Manuf. 1995. Vol. 38, No. 1. P. 55-58.
8. Tsai Y.K., Lin Y.H. Adaptive modal vibration control of a fluid-conveying cantilever pipe // J. Fluids Struct. 1997. Vol. 11, No. 5. P. 535-547.
9. Вельмисов П.А., Покладова Ю.В., Мизхер У.Д. Математическое моделирование нелинейной динамики трубопровода // Автоматизация процессов управления. 2019. № 3(57). С. 93-101.
10. Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А., Ликанин А.В. Исследование динамической устойчивости трубопровода с учётом предварительного изгиба // Вестник Ульяновского государственного технического университета. 2025. № 1(109). С. 13-20.
11. Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А., Абрашкин П.М., Ликанин А.В. Исследование динамической устойчивости трубопровода // Journal of Advanced Research in Technical Science. 2025. № 46. С. 34-41.
12. Вельмисов П.А., Гладун А.В. Об управлении динамикой трубопровода // Журнал Средневолжского математического общества. 2016. Т. 18, № 4. С. 89-97.
13. Гладун А.В., Вельмисов П.А. Об управлении динамикой деформируемого элемента конструкции при сверхзвуковом обтекании // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ имени Е.В. Воскресенского: VIII Международная научная молодежная школа-семинар. Саранск, 16-20 июля 2018 года. Саранск: Издательство СВМО, 2018. С. 142-149.

14. Гладун А.В., Вельмисов П.А. О построении управления колебаниями трубопровода // Вестник Ульяновского государственного технического университета. 2019. № 2(86). С. 29-37.

MSC 74F10

On the Construction of Stabilizing Control for a Pipeline System

A.V. Gladun¹, P.A. Velmisov²

Ulyanovsk Civil Aviation Institute named after Chief Marshal of Aviation B.P. Bugaev¹,
Ulyanovsk State Technical University²

Abstract: The paper considers the problem of constructing stabilizing control that suppresses the longitudinal-transverse vibrations of an elastic pipeline conveying fluid. The mathematical model is a system of nonlinear partial differential equations accounting for the longitudinal and transverse deformations of the pipeline interacting with the moving fluid. The Galerkin method is used to reduce the original system to a finite-dimensional system of nonlinear ordinary differential equations. For the case of two basis functions, controllability conditions for the linear approximation are obtained, and a Lyapunov-function-based feedback control is constructed that ensures asymptotic stability of the zero solution. Results of numerical simulation of the pipeline-system dynamics under the constructed control are presented.

Keywords: elastic pipeline, longitudinal and transverse vibrations, partial differential equations, Galerkin method, controllability, feedback control, Lyapunov function, asymptotic stability.