

УДК 519.63

Численное моделирование удара алюминиевых пластин с использованием схемы КАБАРЕ

Гайворонская Ю.Е.¹, Дерюгин Ю.Н.¹, Головизнин В.М.¹

Филиал Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в
городе Сарове¹

Аннотация: В работе рассматривается численное моделирование удара алюминиевой пластины о неподвижную алюминиевую пластину. Расчёт выполняется для одномерной упруго-пластической модели в лагранжевых координатах. Основными параметрами являются скорость, давление, удельный объём, внутренняя энергия и компоненты девиатора напряжений. Для решения используется схема КАБАРЕ. Она применяется для расчёта распространения ударной волны, её отражения от границ и изменения напряжённого состояния материала. По результатам моделирования анализируются распределения давления, скорости и напряжений в различные моменты времени.

Ключевые слова: схема КАБАРЕ, удар алюминиевых пластин, численное моделирование, упруго-пластичность, ударная волна.

1. Численное моделирование удара алюминиевых пластин с использованием схемы КАБАРЕ

В работе рассматривается численное моделирование одномерного ударного взаимодействия двух алюминиевых пластин. Задача относится к классу нестационарных задач динамики упруго-пластических сред, в которых существенную роль играют распространение ударных волн, отражение волн от границ и изменение напряжённо-деформированного состояния материала. В качестве численного метода используется схема КАБАРЕ, ориентированная на расчёт гиперболических систем уравнений и обладающая компактным вычислительным шаблоном.

Рассматривается постановка задачи, в которой левая алюминиевая пластина движется с заданной начальной скоростью и ударяет по неподвижной алюминиевой пластине. После контакта в зоне взаимодействия возникает область повышенного давления, от которой в обе стороны распространяются волны сжатия. В дальнейшем волновая картина усложняется за счёт отражения волн от свободных поверхностей, изменения скорости материала и формирования областей пластического деформирования.

Расчёт проводится в лагранжевых координатах. Такой выбор координатной системы позволяет описывать движение среды вместе с расчётной сеткой и удобно отслеживать изменение параметров материала во времени. В качестве основных неизвестных используются удельный объём $V = 1/\rho$, скорость u , давление P , внутренняя энергия e и компоненты девиатора напряжений. Для одномерной постановки ключевое значение имеет продольная компонента девиатора напряжений τ_x , входящая в выражение для полного нормального напряжения.

2. Математическая модель

Математическая модель основана на одномерных уравнениях динамики упруго-пластической среды в лагранжевой массовой координате m . Система уравнений может быть записана в виде

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial m} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (P - \tau_x)}{\partial m} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + (P - \tau_x) \frac{\partial u}{\partial m} = 0. \quad (3)$$

Первое уравнение описывает изменение удельного объёма, второе задаёт баланс импульса, третье определяет изменение внутренней энергии за счёт работы напряжений. Величина $P - \tau_x$ соответствует продольному напряжению, определяющему динамику материала в направлении распространения волны.

Для учёта упругой части деформирования используется уравнение эволюции девиатора напряжений

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial t} = \frac{4\mu}{3V} \frac{\partial u}{\partial m}, \quad (4)$$

где μ — модуль сдвига.

При достижении предела текучести напряжения ограничиваются условием пластичности. В одномерном случае при

$$\tau_y = \tau_z = -\frac{1}{2}\tau_x \quad (5)$$

может использоваться условие

$$\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2 \leq \frac{2}{3}Y_0^2, \quad (6)$$

где Y_0 — предел текучести материала. Это позволяет учитывать переход материала из упругого состояния в пластическое при достаточно больших значениях девиаторных напряжений.

Для замыкания системы используется уравнение состояния материала, связывающее давление с удельным объёмом и внутренней энергией:

$$P = P(V, e). \quad (7)$$

Таким образом, математическая модель учитывает изменение плотности, скорости, давления, внутренней энергии и напряжённого состояния материала при ударном нагружении.

3. Схема КАБАРЕ

Численное решение строится на основе схемы КАБАРЕ. Данная схема использует раздельное представление консервативных и потоковых переменных. Консервативные величины располагаются в центрах расчётных ячеек, а потоковые переменные — на их границах. Такое расположение переменных позволяет эффективно рассчитывать перенос возмущений и распространение волн в гиперболических системах уравнений.

Алгоритм схемы КАБАРЕ имеет структуру «предиктор — экстраполяция — коррекция — корректор». На этапе предиктора по значениям переменных на текущем временном слое вычисляются промежуточные значения консервативных переменных. Затем выполняется экстраполяция потоковых переменных на новый временной слой. После этого применяется нелинейная коррекция, ограничивающая появление нефизических осцилляций вблизи разрывов и резких градиентов. На заключительном этапе корректора вычисляются значения консервативных переменных на новом временном слое.

Схематично переход между временными слоями можно представить следующим образом:

$$(U^n, u^n) \rightarrow U^{n+1/2} \rightarrow \tilde{u}^{n+1} \rightarrow u^{n+1} \rightarrow U^{n+1}. \quad (8)$$

Здесь U обозначает консервативные переменные, u — потоковые переменные, а $\tilde{u}^{n+1}$ — предварительно экстраполированные значения потоковых переменных. Нелинейная коррекция потоковых величин особенно важна для задач ударного взаимодействия, поскольку в них присутствуют резкие перепады давления, скорости и напряжений.

Для модельного закона сохранения

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = Q \quad (9)$$

этапы предиктора и корректора могут быть записаны в разностной форме:

$$\frac{U_{i+1/2}^{n+1/2} - U_{i+1/2}^n}{\Delta t/2} + \frac{F_{i+1}^n - F_i^n}{\Delta x} = Q_{i+1/2}^n, \quad (10)$$

$$\frac{U_{i+1/2}^{n+1} - U_{i+1/2}^{n+1/2}}{\Delta t/2} + \frac{F_{i+1}^{n+1} - F_i^{n+1}}{\Delta x} = Q_{i+1/2}^{n+1}. \quad (11)$$

Экстраполяция потоковых переменных на новый временной слой может быть представлена в виде

$$\tilde{u}_i^{n+1} = 2U_i^{n+1/2} - u_i^n. \quad (12)$$

После экстраполяции выполняется коррекция, которая ограничивает значение потоковой переменной с учётом соседних значений. Это снижает вероятность возникновения неустойчивых колебаний около фронта ударной волны и позволяет сохранить более чёткую структуру решения.

4. Численное моделирование ударного взаимодействия

В рассматриваемой задаче начальные условия задаются следующим образом: левая пластина имеет ненулевую скорость, правая пластина находится в состоянии покоя. До момента контакта давление и напряжения соответствуют начальному невозмущённому состоянию материала. После столкновения в зоне контакта формируется скачок давления. Волна сжатия распространяется в движущуюся пластину в направлении её свободной границы, а также в неподвижную пластину вглубь материала.

При достижении свободных поверхностей возникают отражённые волны разгрузки. Их взаимодействие с первоначальными волнами сжатия приводит к изменению распределения скорости и напряжений. При достаточно больших напряжениях в материале возникают области пластического деформирования. Поэтому анализ задачи требует рассмотрения не только давления и скорости, но и девиаторных напряжений.

В ходе численного расчёта анализируются распределения давления, скорости, удельного объёма, внутренней энергии и компонент напряжений в различные моменты времени. Давление позволяет определить положение фронта ударной волны и интенсивность сжатия. Распределение скорости показывает изменение движения материала после столкновения пластин. Удельный объём используется для анализа изменения плотности: уменьшение V соответствует сжатию, увеличение V — разгрузке. Девиаторные напряжения позволяют выделить области упругого и пластического поведения материала.

Основное внимание уделяется следующим стадиям процесса:

1. начальное столкновение пластин;
2. формирование области сжатия в зоне контакта;
3. распространение ударных волн по материалу;
4. отражение волн от свободных границ;
5. изменение напряжённого состояния;
6. возникновение зон пластического деформирования.

Использование схемы КАБАРЕ позволяет получить устойчивое численное решение с достаточно чётким описанием волновых фронтов. Компактность шаблона схемы упрощает построение вычислительного алгоритма, а нелинейная коррекция потоковых переменных уменьшает численное размазывание решения и подавляет нефизические осцилляции около разрывов. Это делает схему применимой для расчёта одномерных задач ударного взаимодействия упруго-пластических тел.

5. Заключение

Таким образом, в работе рассматривается одномерная расчётная модель удара алюминиевых пластин и её численная реализация на основе схемы КАБАРЕ. Полученные распределения физических величин позволяют проследить формирование ударной волны, её распространение и отражение, а также изменение напряжённо-деформированного состояния материала. Рассмотренная постановка может использоваться как базовая модель для дальнейшего исследования более сложных задач динамики деформируемых твёрдых тел, включая задачи с различными материалами, более сложными законами пластичности и многомерной геометрией.

Литература

1. Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. Москва: Изд-во МГУ, 2013. 192 с.
2. Wilkins M.L. Calculation of elastic-plastic flow // Methods in Computational Physics. 1964. Vol. 3. P. 211-263.
3. Головизнин В.М., Самарский А.А. Некоторые свойства разностной схемы «Кабаре» // Математическое моделирование. 1998. Т. 10, № 1. С. 101-116.

MSC 76L05

Numerical simulation of the impact of aluminum plates using the CABARET scheme

Yu.E. Gayvoronskaya¹, Yu.N. Deryugin¹, V.M. Goloviznin¹

Branch of Lomonosov Moscow State University in Sarov¹

Abstract: The paper considers numerical simulation of the impact of an aluminum plate on a fixed aluminum plate. The calculation is performed for a one-dimensional elastic-plastic model in Lagrangian coordinates. The main parameters are velocity, pressure, specific volume, internal energy, and stress deviator components. The CABARET scheme is used for the solution. It is used to calculate the propagation of a shock wave, its reflection from the boundaries and changes in the stress state of the material. Based on the simulation results, the distributions of pressure, velocity, and stress at various points in time are analyzed.

Keywords: CABARET scheme, impact of aluminum plates, numerical modeling, elasto-plasticity, shock wave.