

УДК 533.21:536.23:517.95.

Исследование нелинейной динамики системы контроля за давлением

Выборнова Ю.В.¹, Киреев С.В.¹, Вельмисов П.А.¹

Ульяновский государственный технический университет¹

Аннотация: Рассматривается математическая модель механической системы, состоящей из трубопровода и датчика давления, предназначенного для контроля давления в камере сгорания двигателя. Математическая модель включает нелинейные уравнения газовой динамики, учитывающими изменение скорости, плотности, давления и температуры рабочей среды в трубопроводе. С помощью метода Галеркина построено приближенное решение начально-краевой задачи. Проведены численные эксперименты для различных законов изменения давления и температуры на входе в трубопровод. Получены зависимости от времени перемещения чувствительного элемента датчика и распределения температуры вдоль трубопровода. Исследовано влияние параметров газового потока на динамическое поведение измерительной системы.

Ключевые слова: датчик давления, чувствительный элемент, трубопровод, газовая динамика, нелинейные колебания, метод Галеркина, математическое моделирование.

1. Введение

Датчики давления, применяемые в аэрокосмической и энергетической отраслях для контроля параметров в камерах сгорания двигателей, функционируют в условиях интенсивных тепловых и динамических нагрузок, что предъявляет повышенные требования к их надёжности и точности. Математическое моделирование динамических процессов в системе «трубопровод – датчик давления» основано на системе нелинейных дифференциальных уравнений газовой динамики, описывающих изменение давления, плотности, температуры и скорости потока. Цель работы – построение математической модели на основе уравнений газовой динамики и исследование динамических характеристик системы при различных законах изменения давления и температуры на входе в трубопровод. Применяется метод Галеркина, позволяющий свести краевую задачу к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Проводится серия численных экспериментов для анализа отклика системы на различные виды возмущений.

2. Математическая модель

Математическая модель представляет собой систему четырёх уравнений газовой динамики:

$$\begin{cases} \rho(u_t + uu_x) = -P_x, \\ \rho_t + \rho u_x + u\rho_x = 0, \\ \rho c_v(T_t + uT_x) + Pu_x = kT_{xx} - \beta(T - T_0), \\ P = R\rho T. \end{cases} \quad (1)$$

где $u(x, t)$, $\rho(x, t)$, $P(x, t)$, $T(x, t)$ – скорость, плотность, давление, температура рабочей среды в трубопроводе соответственно, $x \in (0, l_*(t))$, c_v – удельная теплоемкость при постоянном объеме, $R = c_p - c_v$ – универсальная газовая постоянная, k – коэффициент теплопроводности, T_0 – температура окружающей среды. В данной работе коэффициент теплообмена принят равным нулю ($\beta = 0$).

Система уравнений дополняется граничными условиями, соответствующими физической постановке задачи:

$$\begin{cases} P(0, t) = P_0 + P_*(t), \\ u(l_*(t), t) = \dot{w}(t), \\ P(l_*(t), t) = L(w(t)) \equiv m\ddot{w}(t) + F(t, w, \dot{w}) \\ T(0, t) = T_*(t), \\ T_x(l_*(t), t) = 0, \\ \rho(0, t) = \frac{P_0 + P_*(t)}{RT_*(t)} \equiv \rho_*(t) \end{cases} \quad (2)$$

где $l_*(t) = l + w(t)$ – текущее положение поршня, $w(t)$ – его отклонение от положения равновесия, F – силы реакции и демпфирования системы внешних связей. В дальнейшем будем считать функцию F линейной: $F(t, w, \dot{w}) = \alpha\dot{w}(t) + \gamma w(t)$. Первое, четвертое и шестое условия задают законы изменения давления, температуры и плотности на выходе из камеры сгорания (на входе в трубопровод), второе условие – условие непротекания на поверхности поршня, пятое условие – условие теплоизоляции внешней поверхности поршня, третье условие – уравнение движения чувствительного элемента (поршня).

3. Приближенное решение системы методом Галеркина

Для построения приближенного решения системы (1)-(2) применяется метод Галеркина. Поскольку четвертое уравнение системы (1) является алгебраическим (уравнение состояния), для применения метода Галеркина и последующего решения задачи Коши его целесообразно продифференцировать по времени.

Искомые функции представляются в виде разложений по базисным функциям, удовлетворяющим граничным условиям (2). В частности, во втором приближении разложения имеют вид

$$\begin{cases} P = P_0 + P_*(t) + (L(w) - P_0 - P_*(t))\frac{x}{l_*} + P_1(t)x(l_* - x) + \dots, \\ T = T_*(t) + T_1(t)(x^2 - 2l_*x) + T_1(t)(x^3 - \frac{3}{2}l_*x^2) + \dots, \\ u = u_0(t) + (\dot{w}(t) - u_0(t))\frac{x}{l_*} + u_1(t)x(l_* - x) + \dots, \\ \rho = \rho_*(t) + \rho_1(t)x + \rho_2(t)x(l_* - x) + \dots \end{cases} \quad (3)$$

Согласно методу Галеркина, невязки, полученные после подстановки представлений (3) в систему уравнений (1), ортогонализуются на базисных функциях $x^n(l_* - x)$, $n \geq 1$. В первом приближении получается система из четырех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $w(t)$,

$u_0(t), T_1(t), \rho_1(t)$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6}l_*^2(L(w(t)) - P_0 - P_*(t)) - \frac{1}{30}l_*^3u_0^2(t)\rho_1(t) - \frac{1}{12}l_*^2u_0^2(t)\rho_*(t) + \frac{1}{30}l_*^3u_0(t)\rho_1(t)\dot{w}(t) + \frac{1}{12} \\ & l_*^2u_0(t)\rho_*(t)\dot{w}(t) + \frac{1}{30}l_*^4\dot{u}_0(t)\rho_1(t) + \frac{1}{12}l_*^3\dot{u}_0(t)\rho_*(t) + \frac{1}{20}l_*^4\rho_1(t)\ddot{w}(t) + \frac{1}{12}l_*^3\rho_*(t)\ddot{w}(t) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{1}{6}l_*^3\dot{\rho}_*(t) + \frac{1}{12}l_*^4\dot{\rho}_1(t) + \frac{1}{6}l_*^2\rho_*(t)(\dot{w}(t) - u_0(t)) + \frac{1}{6}l_*^3\rho_1(t)\dot{w}(t) = 0, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6}l_*^3c_v\rho_*(t)\dot{T}_*(t) + \frac{1}{12}l_*^4c_v\rho_1(t)\dot{T}_*(t) - \frac{7}{60}l_*^5c_v\rho_*(t)\dot{T}_1(t) - \frac{1}{15}l_*^6c_v\rho_1(t)\dot{T}_1(t) - \\ & - \frac{7}{30}l_*^4c_v\rho_*(t)T_1(t)\dot{w}(t) - \frac{2}{15}l_*^5c_v\rho_1(t)T_1(t)\dot{w}(t) + \frac{1}{12}l_*^2(L(w(t)) + P_0 + P_*(t))\dot{w}(t) - \\ & - \frac{1}{10}l_*^4c_v\rho_*(t)T_1(t)u_0(t) - \frac{1}{30}l_*^5c_v\rho_1(t)T_1(t)u_0(t) - \frac{1}{12}l_*^2(L(w(t)) + P_0 + P_*(t))u_0(t) + \\ & + \frac{1}{6}l_*^3\beta T_*(t) - \frac{7}{60}l_*^5\beta T_1(t) - \frac{1}{3}l_*^3kT_1(t) - \frac{1}{6}l_*^3\beta T_0 = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12}l_*^3(\dot{L}(w(t)) + \dot{P}_*(t)) - \frac{1}{12}l_*^2(L(w(t)) - P_0 - P_*(t))\dot{w}(t) - \frac{1}{6}Rl_*^3T_*(t)\dot{\rho}_*(t) + \\ & + \frac{7}{60}Rl_*^5T_1(t)\dot{\rho}_*(t) - \frac{1}{12}Rl_*^4T_*(t)\dot{\rho}_1(t) + \frac{1}{15}Rl_*^6T_1(t)\dot{\rho}_1(t) - \frac{1}{6}Rl_*^3\dot{T}_*(t)\rho_*(t) - \\ & - \frac{1}{12}Rl_*^4\dot{T}_*(t)\rho_1(t) + \frac{7}{60}Rl_*^5\dot{T}_1(t)\rho_*(t) + \frac{1}{15}Rl_*^6\dot{T}_1(t)\rho_1(t) + \frac{1}{6}Rl_*^4T_1(t)\rho_*(t)\dot{w}(t) + \\ & + \frac{1}{10}Rl_*^5T_1(t)\rho_1(t)\dot{w}(t) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

4. Численный эксперимент

Для проведения расчета были заданы следующие параметры в системе СИ: $l = 3, m = 0.01, P_0 = 101325, \gamma = 10^8, \alpha = 10^8, k = 0.022, c_v = 717.8, R = 8.31$. Начальные условия: $T_1(0) = 0, w(0) = 0, \dot{w}(0) = 0, \ddot{w}(0) = 0, u_0(0) = 0, \rho_1(0) = 0$.

На рис. 1, 2 в качестве примеров представлены графики перемещения поршня $w(t)$ и температуры на поршне $T(l_*(t), t)$ при различных законах изменения давления и температуры на входе в трубопровод.

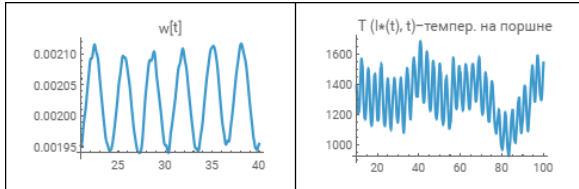


Рис. 1. $P_*(t) = P_0(1 + 0.2 \cos(2t))$,
 $T_*(t) = 1293.15$

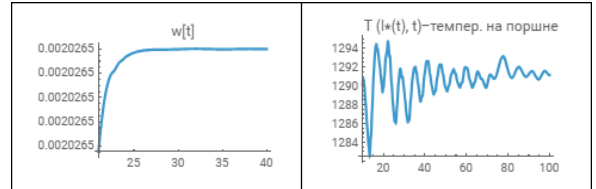


Рис. 2. $P_*(t) = P_0$,
 $T_*(t) = 1293.15 + 20e^{-0.05t} \sin(t)$

Результаты численных экспериментов подтверждают адекватность модели и её применимость для анализа динамических процессов в измерительной системе.

Литература

1. Выборнова Ю.В., Вельмисов П.А. Математическое моделирование динамики механической системы «трубопровод – датчик давления» // Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании: сборник материалов XVII Международной научной конференции. Саранск, 29-31 июля 2025 г. С. 63-68.
2. Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А. Математическое моделирование динамических процессов в системах измерения давления в газожидкостных средах // Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения - XXXV. Материалы Международной Воронежской весенней математической школы. Воронеж, 26-30 апреля 2024 г. С. 81-83.
3. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. Москва: Мир, 1988. 352 с.

MSC 49K20,76N15,80A20.

Research on the nonlinear dynamics of the pressure control system

Yu.V. Vybornova¹, S.V. Kireev¹, P.A. Velmisov¹

Ulyanovsk State Technical University¹

Abstract: A mathematical model of a mechanical system consisting of a pipeline and a pressure sensor designed to control the pressure in the engine combustion chamber is considered. The mathematical model includes nonlinear equations of gas dynamics that take into account changes in the velocity, density, pressure, and temperature of the working medium in the pipeline. An approximate solution of the initial-boundary value problem is constructed using the Galerkin method. Numerical experiments are conducted for various laws of pressure and temperature changes at the inlet of the pipeline. The time dependencies of the movement of the sensor's sensitive element and the temperature distribution along the pipeline are obtained. The influence of gas flow parameters on the dynamic behavior of the measurement system has been studied.

Keywords: pressure sensor, sensitive element, pipeline, gas dynamics, nonlinear oscillations, Galerkin method, mathematical modeling.