

УДК 519.63

Применение дифференциальных уравнений в частных производных для оптимизации формирования избирательных округов

Абрашкин А.М.¹

Ульяновский Государственный Технический Университет¹

Аннотация: Статья посвящена анализу возможностей применения математического моделирования для выявления политически мотивированного формирования границ избирательных округов и их дальнейшей оптимизации. Задача формирования электоральных округов представлена как проблема разбиения взвешенного графа, используя методы решения дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП). В основе подхода лежит минимизация «энергии компактности», обеспечивающая оптимальную форму округов при соблюдении принципа равного представительства населения. Процедура вычисления градиентного потока реализована через алгоритм Мэрримана-Бенса-Ошера и аукционную динамику Берцекаса. Метод позволяет количественно оценивать существующие карты на предмет искусственных искажений, и генерировать альтернативные, географически обоснованные варианты разбиения региона на округа.

Ключевые слова: джерримендеринг, дифференциальные уравнения, частные производные.

1. Введение

Джерримендеринг – произвольная демаркация избирательных округов с целью искусственного изменения соотношения политических сил в них и, как следствие, в целом на территории проведения выборов [1].

Политически мотивированное манипулирование границами избирательных округов имеет место, когда границы округов прокладываются с целью выборочного ослабления избирательной силы групп меньшинств и политических оппонентов. Эта практика имеет долгую историю: первые записи о политически мотивированных границах округов датируются ещё до выборов в Первый Конгресс США в 1789 году [2].

В российской электоральной практике данная технология приобрела специфический характер, известный как «лепестковая нарезка» округов. При таком подходе к небольшому участку крупного областного центра искусственно присоединяется огромная по площади сельская территория, из-за чего округ может брать свое начало в черте города и уходить на сотни километров вглубь полей и деревень. Подобная геометрия обусловлена тем, что в крупных городах уровень протестного голосования традиционно выше, а поддержка действующих властей ниже. В то же время в сельской местности явка остается стабильно высокой, а электорат голосует более консервативно и лояльно.

Современное программное обеспечение и методы анализа данных позволили осуществлять манипуляции с избирательными округами с беспрецедентной эффективностью. Смешивая городские протестные районы с сельскими, организаторы выборов гарантированно растворяют голоса критически настроенных городских избирателей

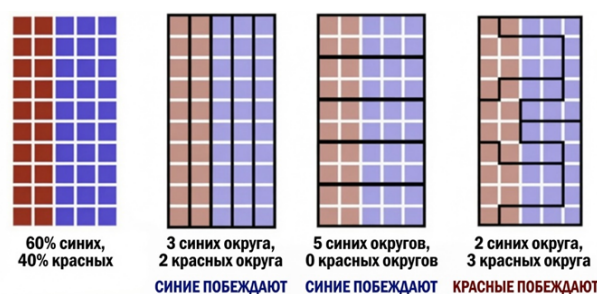


Рис. 1. Влияние конфигурации границ избирательных округов на электоральный результат

в общей массе лояльного сельского населения.

Отличительной чертой карты, подвергшейся политическому манипулированию, является совокупность странно начерченных границ округов, что служит либо для концентрации, либо для изоляции избирателей определённых политических взглядов (Рис.1). В результате многие метрики для количественной оценки «джерримендеринга» сосредоточены на выявлении неестественных форм и границ округов.

На сегодняшний день в литературе существует по меньшей мере тридцать различных способов оценки «компактности избирательных округов», многие из которых фокусируются на длине периметра и минимальной ограничивающей площади как ключевых показателях компактности округа [3]. Эти оценки доказали свою эффективность при выдвижении и обосновании правовых аргументов, касающихся манипуляций с избирательными округами, однако они оставляют желать лучшего [4].

В данной статье оптимизация границ избирательных округов рассматривается как задача разбиения графа. Этот подход позволит бороться с манипуляциями при определении границ округов, опираясь на методы из обширной математической литературы по разбиениям. Подходы, основанные на дифференциальных уравнениях в частных производных, используют очень простую идею: необходимо определить функцию энергии, которая учитывает характеристики оптимального разбиения, а затем вычислить градиентный поток этой энергии.

Градиентный поток следует по пути наибольшего спада энергии. Таким образом, по мере развития потока во времени характеристики разбиения улучшаются. В контексте манипуляций с формированием избирательных округов этот подход позволяет как оценивать существующие карты, так и генерировать новые.

Основой данного метода является геометрическое ДУЧП: движение по средней кривизне. Движение по средней кривизне, или поток кривизны, воздействует на множества, изменяя их границы.

Поток кривизны возникает как градиентный спуск для энергий, измеряющих длину границы. Таким образом, ДУЧП естественным образом сглаживает и сокращает границы между множествами. Для получения корректных карт избирательных округов необходимо гарантировать сохранение приблизительно равной численности населения в округах на протяжении всего итерационного процесса. Интерпретируя численность населения округа как ограничение по объёму для рассматриваемого множества, можно поддерживать равную численность населения с помощью потока кривизны, сохраняющего объём.

Сначала определяется задача о нарезке округов на основе структуры взвешенного графа. Узлами графа являются малые территориальные единицы, определённые местным органом переписи населения. Это позволяет разбивать регион на округа,

соблюдая при этом структуру местных сообществ. Затем определяется «энергия компактности», которая измеряет границы округов и накладывает штраф за пространственный разброс. В заключение вычисляется градиентный поток этой энергии с помощью аукционной динамики — алгоритма, для вычисления многофазных потоков кривизны с сохранением объема [5].

2. Определение системы округов

Задача моделируется на структуре взвешенного графа (V, W) . Вершины графа $x \in V$ представляют собой малые территориальные единицы, определенные местным органом переписи населения. Географический центр каждой единицы обозначается как c_x . Матрица весов W определяет степень связности между единицами, вычисляемую на основе расстояния $d_{x,y}$ между их центроидами. Для обеспечения разреженности матрицы связи ограничиваются k ближайшими соседями с использованием весов Зельника-Манора и Пероны:

$$W_{x,y} = \exp \left(-\frac{d_{x,y}^2}{\sigma_x \sigma_y} \right), \quad (1)$$

где σ_x представляет собой локальный масштабный коэффициент расстояния. Матрица весов нормализуется для обеспечения численной устойчивости.

Карта округов определяется как разбиение множества вершин на N непересекающихся районов $D_1, \dots, D_N$. Для соблюдения принципа «один человек — один голос» накладывается ограничение снизу P на численность населения каждого округа. Численность населения P_i определяется как сумма показателей p_x всех входящих в округ единиц. Разбиение описывается функцией $u : V \rightarrow R^N$, где:

$$u_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in D_i \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (2)$$

3. Энергия компактности

Данный метод использует функционал энергии, который количественно выражает «компактность» карты округов, объединяя длину границ и показатель пространственного разброса. Энергия $E_\alpha(u, c)$ задается выражением:

$$E_\alpha(u, c) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{x,y \in V} u_i(x) A(x, y) (1 - u_i(y)) + \alpha \sum_{i=1}^N \sum_{x \in V} u_i(x) \|c_i - c(x)\|^2. \quad (3)$$

Здесь $A = W^T W$ играет роль веса разреза графа, аппроксимируя длину границ, в то время как второе слагаемое штрафует за удаленность центроидов единиц c_x от центроида округа c_i . Параметр α является неотрицательным весовым коэффициентом.

4. Метод Мэрримана-Бенса-Ошера и аукционная динамика

Для вычисления градиентного потока данной энергии применяется алгоритм Мэрримана-Бенса-Ошера [6], используя метод «аукционной динамики». Этот подход

минимизирует линеаризацию функционала энергии при соблюдении ограничений по объему. Алгоритм итерируется следующим образом:

$$u^{n+1} = \arg \min_{u \in S_N} (\nabla E_\alpha(u^n, c), u - u^n). \quad (4)$$

Уравнение (4) представляет собой задачу комбинаторной оптимизации. Хотя целевая функция является линейной, множество допустимых разбиений, S_N , является невыпуклым множеством. Чтобы преодолеть эту трудность, можно вместо этого поставить задачу минимизации на выпуклой оболочке множества S_N . Такое ослабление преобразует уравнение (4) в задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= \operatorname{argmin}_{u \geq 0} \langle \nabla E_\alpha(u^n, c), u - u^n \rangle, \\ s.t. \sum_{i=1}^N u_i(x) &= 1, \sum_{x \in V} u_i(x) p_x \geq P. \end{aligned} \quad (5)$$

Решение находится с помощью аукционного алгоритма Берцекаса [7]. После обновления разбиения центроиды округов корректируются посредством минимизации квадратичной формы для дальнейшего снижения энергии.

5. Температура и данные

Для предотвращения попадания в локальные минимумы в алгоритм вводится «температура» – случайные возмущения, добавляемые в виде гауссовских случайных величин $\mathcal{N}(0, T)$ в градиент. В процессе вычислений значение температуры постепенно снижается (метод отжига) для обеспечения сходимости к состоянию с минимальной энергией.

Литература

1. Википедия. Джерримендеринг [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <https://ru.wikipedia.org/wiki/Джерримендеринг>. - Дата обращения: 09.07.2026.
2. Hunter T. R. The First Gerrymander?: Patrick Henry, James Madison, James Monroe, and Virginia's 1788 Congressional Districting [Электронный ресурс]. URL: https://www.researchgate.net/publication/236730512_The_First_Gerrymander_Patrick_Henry_James_Madison_James_Monroe_and_Virginia's_1788_Congressional_Districting. Дата обращения: 09.07.2026.
3. Википедия. Джерримендеринг [Электронный ресурс]. URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/Джерримендеринг>. Дата обращения: 09.07.2026.
4. Barnes R., Solomon J. Gerrymandering and Compactness: Implementation Flexibility and Abuse [Электронный ресурс]. URL: <https://arxiv.org/abs/1803.02857>. Дата обращения: 09.07.2026.
5. Jacobs M., Merkurjev E., Esedoglu S. Auction dynamics: A volume constrained MBO scheme [Электронный ресурс]. URL: https://www.math.purdue.edu/~jacob225/papers/auction_revised.pdf. Дата обращения: 09.07.2026.

6. Merriman B., Bence J. K., Osher S. J. Diffusion generated motion by mean curvature [Электронный ресурс]. URL: <https://ww3.math.ucla.edu/camreport/cam92-18.pdf>. Дата обращения: 09.07.2026.
7. Bertsekas D. A distributed algorithm for the assignment problem. Technical report, MIT [Электронный ресурс]. URL: https://web.mit.edu/dimitrib/www/Bertsekas_Auction_Distributed_1979.pdf. Дата обращения: 09.07.2026.

MSC 49Q10

Application of partial differential equations to the optimization of electoral district formation

A.M. Abrashkin¹

Ulyanovsk State Technical University¹

Abstract: The article is devoted to the analysis of the possibilities of using mathematical modeling to identify politically motivated formation of the boundaries of electoral districts and their further optimization. The problem of forming electoral districts is presented as a problem of partitioning a weighted graph using methods for solving partial differential equations (PDE). The approach is based on minimizing the “energy of compactness”, ensuring the optimal shape of the districts while respecting the principle of equal representation of the population. The procedure for calculating the gradient flow is implemented through the Merriman-Bence-Osher algorithm and Bertsekas auction dynamics. The method allows you to quantitatively evaluate existing maps for artificial distortions, and generate alternative, geographically based options for dividing the region into districts.

Keywords: Gerrymandering, differential equations, partial derivatives.