

УДК 517.956

Асимптотика резонансных состояний для двухмерных волноводов, соединенных сближающимися отверстиями

Юрова Т.С.¹, Попов И.Ю.¹

Университет ИТМО¹

Аннотация: Рассматриваются двумерные волноводы, связанные через малые сближающиеся окна. Получены и исследованы первые члены асимптотического разложения резонансов для случая условий Дирихле на границах. Используется метод сращивания асимптотических разложений решений краевых задач.

Ключевые слова: резонанс, асимптотики функции Грина, связанные волноводы.

1. Введение

Исследование резонансов в системах рассеяния ведется весьма активно, что обусловлено их высокой значимостью для широкого спектра физических приложений (см., например, [1, 2]). На сегодняшний день сложилось несколько основных подходов к анализу таких резонансов: это теория рассеяния Лакса–Филлипса [3], метод комплексного скейлинга [4], теория возмущений [5], использование функциональных моделей [6], асимптотические методы [7, 8], а также модели, опирающиеся на теорию расширений операторов [9].

Благодаря специфическим особенностям волноводов, мы можем моделировать движение электрона внутри такой микроструктуры как поведение свободной (бесспиновой) частицы, заключенной в соответствующей пространственной области с граничным условием Дирихле. Следовательно, теоретическое описание многих мезоскопических квантовых систем сводится к задаче о транспорте электронных волн через систему волноводов. Проблема связанных состояний и резонансов для латерально связанных волноводов вызывает интерес из-за того, что собственные значения и резонансы оказывают определяющее влияние на электронный транспорт в квантовых системах, что делает данную задачу исключительно важной с физической точки зрения.

В последнее десятилетие благодаря стремительному развитию нанотехнологий возникла новая волна интереса к проблеме резонансов в волноводах с перфорированными границами, равно как и к теории усреднения (см. [10, 11]). В этом контексте особенно важно понять, как ведут себя резонансы в ситуациях, когда расстояние между связывающими окнами (отверстиями) стремится к нулю. Дополнительная актуальность этого вопроса продиктована его связью с проблемой выбора регуляризации при построении моделей на основе теории расширений [12]. В настоящей работе данная задача исследуется именно с позиций асимптотического подхода.

В настоящей работе мы рассматриваем систему двумерных волноводов (полос) Ω_+ и Ω_- шириной d_+ и d_- соответственно, связанных друг с другом латерально через два небольших окна шириной $2a$ (рис. 1) с условиями Дирихле на границах. Подобные системы связанных волноводов являются предметом давнего и глубоко-

го изучения. Так, оценки и асимптотики для связанных состояний вблизи нижней границы непрерывного спектра уже были получены в работах [13,14]. В нашем исследовании применяется подход, во многом аналогичный методам из [15–18], который опирается на процедуру сшивания асимптотических разложений решений соответствующих краевых задач [20]. В работе [19] была исследована похожая задача, но для условий Неймана.

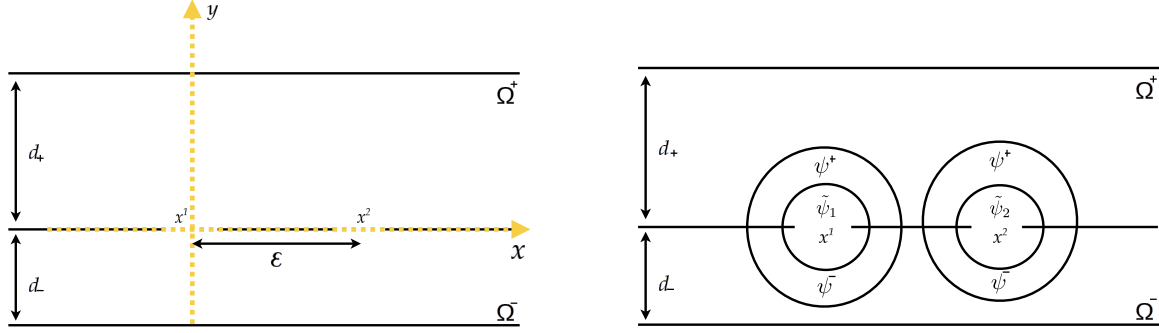


Рис. 1. Конфигурация системы.

2. Построение асимптотики

Наша задача — получить асимптотическое разложение резонанса, который стремится к нижней границе второй ветви непрерывного спектра (второму порогу) при $a \rightarrow 0$. Мы будем следовать традиционной схеме сшивания, предложенной Ильиным и Гадильшиным [20]. Отличие состоит в том, что мы начинаем с другой формы асимптотического ряда и ищем асимптотическое разложение некоторой функции от рассматриваемого квазисвязанного состояния. Малый параметр a — это полуширина отверстия. Рассмотрим случай, когда $d_+ > d_-$. Пусть k_a^2 — резонанс, близкий к точке π^2/d_-^2 . Для каждого окна мы строим две окружности радиусов $\sqrt{a}$ и $2\sqrt{a}$, в которых нам необходимо найти такие связующие функции, удовлетворяющие граничным условиям Дирихле, чтобы члены соответствующих порядков в асимптотических разложениях решения совпадали в областях:

$$\left(\Omega^+ \setminus S_{\sqrt{a}}^{1,2}\right) \cap S_{2\sqrt{a}}^{1,2}, \quad \left(\Omega^- \setminus S_{\sqrt{a}}^{1,2}\right) \cap S_{2\sqrt{a}}^{1,2}.$$

Мы будем искать асимптотический ряд следующего вида:

$$\left(\frac{\pi^2}{d_-^2} - k_a^2\right)^{1/2} = \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{i=0}^{[(j-1)/2]} k_{ji} a^j (\log a)^i. \quad (1)$$

Для соответствующей собственной функции $\psi_a(x)$ асимптотический ряд имеет следующий вид:

$$\psi_a(x) = \left(\frac{\pi^2}{d_-^2} - k_a^2\right)^{1/2} \sum_{j=0}^{\infty} a^j P_{j+1}(D_y, \log a)$$

$$(\alpha_1 G^-(x, (x^1, y), k) + \alpha_2 G^-(x, (x^2, y), k)) \Big|_{y=0}, \quad x \in \Omega^- \setminus S_{\sqrt{a}}^{1,2} \quad (2)$$

$$\tilde{\psi}_a(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{[(j-1)/2]} v_{ji}(x/a) a^j (\log a)^i, \quad x \in S_{2\sqrt{a}}^{1,2}. \quad (3)$$

$$\psi_a(x) = - \left(\frac{\pi^2}{d_-^2} - k_a^2 \right)^{1/2} \sum_{j=0}^{\infty} a^j P_{j+1}(D_y, \log a) \\ (\alpha_1 G^+(x, (x^1, y), k) + \alpha_2 G^+(x, (x^2, y), k)) \Big|_{y=0}, \quad x \in \Omega^+ \setminus S_{\sqrt{a}}^{1,2}. \quad (4)$$

где $v_{ji} \in W_{2,loc}^1(\Omega^+ \cup \Omega^-)$, $P_1(D_y, \log a) = a_{10}^{(1)} \frac{\partial}{\partial n_y}$, P_m — некоторые полиномы от D_y (D_y — производная по y):

$$P_m(D_y, \log a) = \sum_{q=1}^{m-1} \sum_{i=0}^{[(q-1)/2]} a_{qi}^{(m)} (\log a)^i D_y^{m-q+1}, \quad m \geq 2, \quad (5)$$

$$D_y^{2j+1} = \frac{\partial^{2j+1}}{\partial n_y^{2j+1}}, \quad D_y^{2j} = \frac{\partial^{2j}}{\partial n_y^{2j-1} \partial l_y}, \quad l = \{1, 0\}, \quad n = (0, -1).$$

$G^{\pm}$ — функции Грина для волноводов $\Omega^{\pm}$. Принимая во внимание известное представление для функции Грина лапласиана Дирихле в полосе

$$G^{\pm}((x_1, y_1), (x_2, y_2), k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{d_{\pm} p_{n,\pm}} \sin \frac{n\pi y_1}{d_{\pm}} \sin \frac{n\pi y_2}{d_{\pm}} \exp(-p_{n,\pm} |x_1 - x_2|), \quad (6)$$

$$p_{n,\pm} = \left(\frac{n^2 \pi^2}{d_{\pm}^2} - k^2 \right)^{1/2},$$

получаем следующее представление для ее производных в непосредственной близости от точки π^2/d_-^2 и при $x \rightarrow x^{1,2}$:

$$D_y^j G^{\pm}(x, (x^{1,2}, 0), k) = \frac{1}{d_{\pm}} \sin \frac{\pi x_2}{d_{\pm}} D_y^j \left(\sin \frac{\pi y_2}{d_{\pm}} \right) \Big|_{y_2=0} \left(\frac{\pi^2}{d_{\pm}^2} - k^2 \right)^{-1/2} + \\ + \Phi_j(x, k) \log \frac{r}{a_0} + g_j^{\pm}(x, k) + \sum_{i=0}^{[j/2]} \sum_{t=0}^{j-2i-1} b_{it}^{(j)}(k) r^{-j+2(i+t)} \sin(j-2i)\theta, \quad (7)$$

где (r, θ) — полярные координаты. Члены $b_{it}^{(j)}(k)$, $\Phi_j(x, k)$, $g_j^{\pm}(x, k)$ аналитичны по k в некоторой окрестности точки π/d_- , $\Phi_j \in C^{\infty}(R^2)$ и антисимметрична относительно y_2 , $g_j^{\pm} \in C^{\infty}(\Omega^{\pm})$,

$$b_{00}^j = (-1)^{[(j+1)/2]} (j-1)!/\pi, \quad b_{10}^{(3)} = k^2/(2\pi), \quad \Phi_1(0, k) = -k^2/(2\pi). \quad (8)$$

Краевые задачи для коэффициентов ряда (4) получаются следующим образом. Подставляем ряды (4) и (2) (точнее, не только (2), но и соответствующий ряд для k_a) в уравнение Гельмгольца (для $k = k_a$) с граничным условием Дирихле. Затем

делаем замену переменных: $\xi = x/a$. Коэффициенты при одинаковых степенях a и $\log a$ должны быть равны. Отсюда получаем следующие задачи:

$$\Delta_{\xi} v_{ji} = - \sum_{p=0}^{j-3} \sum_{q=0}^{[p/2]-1} \Lambda_{pq} v_{j-p-2, i-1}, \quad \xi \in R^2 \setminus \gamma, \quad (9)$$

$$v_{ji} = 0, \quad \xi \in \gamma,$$

где γ — плоскость без отверстия (но с включенными концами), Λ_{pq} — коэффициенты ряда

$$k_a^2 = \sum_p \sum_q \Lambda_{pq} a^p (\log a)^q.$$

Пусть $\mathbf{R}^*$ — $\mathbf{R}$ без рассматриваемого отверстия. Функцию v_{ji} можем искать как линейную комбинацию гармонических функций $Y_q(\xi)$ в $\mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{R}^*$, $Y_q|_{\mathbf{R}^*} = 0$, $Y_q \in W_{2, \text{loc}}^1(\mathbf{R}^2)$, при $\rho \rightarrow \infty$ вида

$$Y_q(\xi) = \begin{cases} - \sum_{j=1}^{\infty} c_{qj} \rho^{-j} \sin j\theta, & \xi_2 > 0, \\ \rho^q \sin q\theta + \sum_{j=1}^{\infty} c_{qj} \rho^{-j} \sin j\theta, & \xi_2 < 0. \end{cases}$$

В работе найдены коэффициенты второго и третьего порядка по a .

Литература

1. Exner P., Kovarik H. Quantum Waveguides // Springer, Berlin. 2015.
2. Osipov P.P., Nasyrov R.R. Resonance curve in rectangular closed channel // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. 41. P. 1283-1288.
3. Lax P.D., Phillips R.S. Scattering Theory // Academic Press, New York. 1967.
4. Bonnet-Ben Dhia A.-S., Chesnel L., Pagneux V. Trapped modes and reflectionless modes as eigenfunctions of the same spectral problem // Proceedings of the Royal Society A. 2018. 474. 20180050.
5. Rouleux M. Resonances for a semi-classical Schrödinger operator near a non trapping energy level // Publication of RIMS Kyoto University. 1998. 34. P. 487-523.
6. Khrushchev S.V., Nikol'skii N.K., Pavlov B.S. Unconditional bases of exponentials and of reproducing kernels // Complex Analysis and Spectral Theory. Springer-Verlag, Berlin, New York. 1981. P. 214-335.
7. Frolov S.V., Popov I. Yu. Resonances for laterally coupled quantum waveguides // Journal of Mathematical Physics. 2000. 41. 7. P. 4391-4405.
8. Vorobiev A.M., Bagmutov A.S., Popov A.I. On formal asymptotic expansion of resonance for quantum waveguide with perforated semitransparent barrier // Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. 2019. 10. 4. P. 415-419.
9. Popov I.Y. Extension theory and localization of resonances for domains of trap type // Mathematics of the USSR Sbornik. 1990. 71. 1. P. 209-234.

10. Borisov D., Cardone G., Durante T. Homogenization and norm resolvent convergence for elliptic operators in a strip perforated along a curve // *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Section A: Mathematics*. 2016. 146. 6. P. 1115-1158.
11. Nazarov S.A., Orive-Illera R., Perez-Martinez M.E. Asymptotic structure of the spectrum in a Dirichlet-strip with double periodic perforations // *Networks and Heterogeneous Media*. 2019. 14. 4. P. 733-757.
12. Fassari S., Popov I.Y., Rinaldi F. On the behaviour of the two-dimensional Hamiltonian $-\Delta + \lambda[\delta(x + x_0) + \delta(x - x_0)]$ as the distance between the two centres vanishes // *Physica Scripta*. 2020. 95. 075209.
13. Exner P., Vugalter S. Asymptotic estimates for bound states in quantum waveguides coupled laterally through a narrow window // *Annales de l'Institut Henri Poincaré*. 1996. 65. P. 109-123.
14. Popov I.Yu. Asymptotics of bound states and bands for waveguides coupled through small windows // *Applied Mathematics Letters*. 2001. 14. P. 109-113.
15. Popov I.Yu. Asymptotics of resonances and bound states for laterally coupled curved quantum waveguides // *Physics Letters A*. 2000. 269. P. 148-153.
16. Popov I. Yu., Tesovskaya E.S. Electron in a multilayered magnetic structure: resonance asymptotics // *Theoretical and Mathematical Physics*. 2006. 146. 3. P. 361-372.
17. Gortinskaya L.V., Popov I. Yu., Tesovskaya E.S., Uzdin V.M. Electronic transport in the multilayers with very thin magnetic layers // *Physica E*. 2007. 36. P. 12-16.
18. Trifanova E.S. Resonance phenomena in curved quantum waveguides coupled via windows // *Technical Physics Letters*. 2009. 35. P. 180-182.
19. Trifanova E.S., Bagmutov A.S., Katasonov V.G., Popov I.Y. Asymptotic expansions of resonances for waveguides coupled through converging windows // *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*. 2023. 8. 1. P. 72-82.
20. Il'in A.M. *Matching of Asymptotic Expansions of Solutions of Boundary Value Problems* // American Mathematical Society, Providence. 1992.

MSC 35J05

Asymptotics of resonant states for two-dimensional waveguides connected by converging apertures

T.S. Yurova¹, I.Yu. Popov¹

ITMO University¹

Abstract: Two-dimensional waveguides coupled through small converging windows are considered. The first terms of the asymptotic expansion of resonances for the case of Dirichlet boundary conditions are obtained and investigated. The method of matching asymptotic expansions of solutions of boundary value problems is used.

Keywords: resonance, Green's function asymptotics, coupled waveguides.