

УДК 539.3:519.6

Исследование бифуркации решения одной задачи аэрогидроупругости

Тамарова Ю.А.¹, Вельмисов П.А.¹

Ульяновский государственный технический университет¹

Аннотация: Предложен численно-аналитический подход к исследованию скачкообразных переходов в аэрогидроупругих системах. На основе метода Галеркина нелинейная краевая задача сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, для которой получено аналитическое условие скачкообразного перехода. Результаты подтверждены численным моделированием в пакете Mathematica.

Ключевые слова: аэрогидроупругость, бифуркация, устойчивость, метод Галеркина.

1. Постановка задачи

Рассматривается плоское течение идеальной несжимаемой жидкости в прямоугольной области $J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < x_0, \quad 0 < y < y_0\}$ при $t \geq 0$. Скорость невозмущенного однородного потока равна V и направлена вдоль оси Ox . Упругим элементом является часть стенки $y = y_0$ при $x \in [b, c]$, $0 < b < c < x_0$. Введем обозначения: $u(x, t)$ и $w(x, t)$ — деформации элемента в направлении осей Ox (продольная составляющая) и Oy (поперечная составляющая) соответственно; $\varphi(x, y, t)$ — потенциал скорости возмущенного потока.

Математическая модель содержит следующие уравнения и условия [1]:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad (x, y) \in J, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$\varphi_y(x, y_0, t) = \dot{w}(x, t) + Vw'(x, t), \quad x \in (b, c), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$$\varphi_y(x, y_0, t) = 0, \quad x \in (0, b] \cup [c, x_0), \quad t \geq 0, \quad (3)$$

$$\varphi_y(x, 0, t) = 0, \quad x \in (0, x_0), \quad t \geq 0, \quad (4)$$

$$\varphi(0, y, t) = 0, \quad \varphi(x_0, y, t) = 0, \quad y \in (0, y_0), \quad t \geq 0, \quad (5)$$

$$\begin{cases} -EF \left(u'(x, t) + \frac{1}{2}w'^2(x, t) \right)' + M\ddot{u}(x, t) + \beta_0^*u(x, t) + \beta_1^*\dot{u}(x, t) + \beta_2^*\ddot{u}(x, t) = 0, \\ -EF \left[w'(x, t) \left(u'(x, t) + \frac{1}{2}w'^2(x, t) \right) \right]' + M\ddot{w}(x, t) + Dw''''(x, t) + \\ + Nw''(x, t) + \beta_0w(x, t) + \beta_1\dot{w}(x, t) + \beta_2\ddot{w}(x, t) = \\ = -\rho(\varphi_t(x, y_0, t) + V\varphi_x(x, y_0, t)), \quad x \in (b, c), \quad t \geq 0, \end{cases} \quad (6)$$

$$w(x, t) = w''(x, t) = u(x, t) = 0 \quad \text{при } x = b \text{ и } x = c, \quad (7)$$

$$w(x, 0) = f_1(x), \quad \dot{w}(x, 0) = f_2(x), \quad u(x, 0) = g_1(x), \quad \dot{u}(x, 0) = g_2(x), \quad x \in (b, c), \quad (8)$$

где $E, F, M, D, N, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_0^*, \beta_1^*, \beta_2^*, \rho$ — некоторые физические величины; $f_1(x), f_2(x), g_1(x), g_2(x)$ — некоторые заданные функции.

Представим потенциал скорости $\varphi(x, y, t)$ в виде

$$\varphi(x, y, t) = \sum_{i=1}^s \varphi_i(t) (e^{\lambda_i y} + e^{-\lambda_i y}) \sin \lambda_i x, \quad \lambda_i = \frac{i\pi}{x_0}.$$

Тогда решение задачи (1)–(8) сводится к исследованию нелинейной системы двух интегро-дифференциальных уравнений для функций $u(x, t)$ и $w(x, t)$:

$$\left\{ \begin{aligned} & -EF \left(u'(x, t) + \frac{1}{2} w'^2(x, t) \right)' + M \ddot{u}(x, t) + \beta_0^* u(x, t) + \beta_1^* \dot{u}(x, t) + \beta_2^* \ddot{u}(x, t) = 0, \\ & -EF \left[w'(x, t) \left(u'(x, t) + \frac{1}{2} w'^2(x, t) \right) \right]' + M \ddot{w}(x, t) + Dw''''(x, t) + Nw''(x, t) + \\ & \quad + \beta_0 w(x, t) + \beta_1 \dot{w}(x, t) + \beta_2 \ddot{w}(x, t) = \\ & = -\frac{2\rho}{x_0} \sum_{i=1}^s \frac{1}{\lambda_i t h(\lambda_i y_0)} \left(\sin \lambda_i x \int_b^c (\dot{w} + Vw') \sin \lambda_i x dx + \right. \\ & \quad \left. + V \lambda_i \cos \lambda_i x \int_b^c (\dot{w} + Vw') \sin \lambda_i x dx \right), x \in (b, c), \quad t \geq 0. \end{aligned} \right. \quad (9)$$

Рассмотрим задачу: при каких значениях параметров (внешних и внутренних) система совершает скачкообразный переход из одного состояния равновесия в другое (то есть наблюдается явление дивергенции конструкции), при этом происходит бифуркация соответствующего решения [2].

2. Исследование бифуркации

В качестве таких основных параметров в задачах аэрогидроупругости являются скорость потока V и продольное усилие N . Решение системы (9) отыскивалось в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^n A_k(t) \sin \mu_k(x - b), \quad w(x, t) = \sum_{k=1}^n B_k(t) \sin \mu_k(x - b), \quad (10)$$

$$\mu_k = \frac{k\pi}{(c-b)}, \quad x \in (b, c).$$

В результате применения метода Галеркина [3] получена нелинейная система дифференциальных уравнений для определения $A_k(t), B_k(t)$, коэффициенты которой зависят от параметров N и V . В частности, для $n = 1, \beta_i^* = 0$ имеем нелинейную систему для $A_1(t), B_1(t)$

$$\left\{ \begin{aligned} & M \ddot{A}_1(t) + EF \mu_1^4 A_1(t) = 0, \\ & (M + C_1) \ddot{B}_1(t) + (\beta_1 + \beta_2 \mu_1^4 + C_2) \dot{B}_1(t) + \\ & \quad + (D \mu_1^4 - N \mu_1^2 + \beta_0 + C_3) B_1(t) + \frac{3}{4} EF \mu_1^4 B_1^3(t) = 0, \end{aligned} \right. \quad (11)$$

где C_1, C_2, C_3 — коэффициенты, зависящие от $V, \rho, \lambda_i, x_0, y_0$.

В статическом случае ($\dot{A}_1 = \dot{B}_1 = \dot{B}_1 = 0$) система (11) примет вид

$$\left\{ \begin{aligned} & A_1 = 0, \\ & (D \mu_1^4 - N \mu_1^2 + \beta_0 + C_3) B_1 + \frac{3}{4} EF \mu_1^4 B_1^3 = 0. \end{aligned} \right. \quad (12)$$

Система (12) имеет нетривиальное решение (происходит бифуркация) при условии

$$D\mu_1^4 + \beta_0 < N\mu_1^2 - C_3. \quad (13)$$

Рассмотрим механическую систему с параметрами $EF = 3.8 \cdot 10^8$, $\rho = 1000$; $x_0 = 20$; $b = 10$, $c = 11$; $y_0 = 0.1$; $h = 0.005$; $\rho_0 = 8480$; $D = 806.7$, $\beta_0 = 10$, $\beta_1 = 0.5$, $\beta_2 = 0.4$, $s = 5$ (все величины приведены в системе СИ). Подставляя в (12), имеем

$$\begin{cases} A_1 = 0, \\ (39295 - 4.9348N - 836.033V^2)B_1 + 6.9404 \cdot 10^9 B_1^3 = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Система (14) имеет решения:

$$\begin{cases} A_1 = 0, \\ B_1 = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} A_1 = 0, \\ B_1 = \pm \sqrt{\frac{4.9348N + 836.033V^2 - 39295}{6.9404 \cdot 10^9}}. \end{cases}$$

Бифуркация решения происходит, когда выражение под корнем становится положительным (существует нетривиальное решение):

$$4.9348N + 836.033V^2 - 39295 > 0. \quad (15)$$

При этом решение $w(x) = 0$ скачком переходит в решение $w(x) = B_1 \sin \frac{\pi(x-b)}{(c-b)}$.

На рис. 1 в пакете Mathematica построены бифуркационные диаграммы, показывающие зависимость амплитуды прогиба пластины B_1 от скорости потока V и позволяющие определить критические значения параметров, при которых система теряет устойчивость и совершает скачкообразный переход из прямолинейного состояния равновесия.

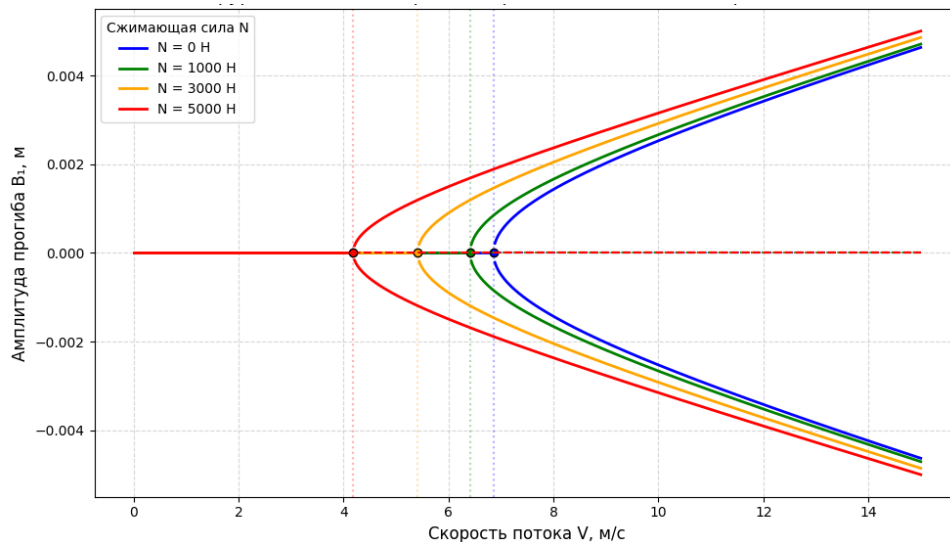


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма

Система нелинейных дифференциальных уравнений (11) численно решалась в пакете Mathematica при начальных условиях: $f_1(0) = 0$, $f_2(0) = 0.0001$, $g_1(0) = 0$, $g_2(0) = 0$. На рисунках 2,3 представлены результаты расчетов:

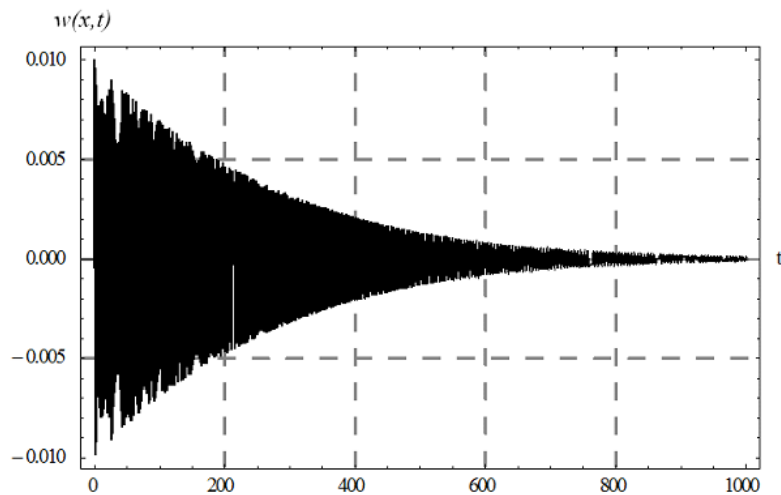


Рис. 2. Колебания точки $x = \frac{b+c}{2}$ при $N = 1000$, $V = 2$.

- при $N = 1000$, $V = 2$ условия (13), (15) не выполняются, система не имеет скачков (рис. 2),
- при $N = 5000$, $V = 8$ условия (13), (15) выполняются, система совершает скачкообразный переход (рис. 3).

Полученные результаты согласуются с рис. 1.

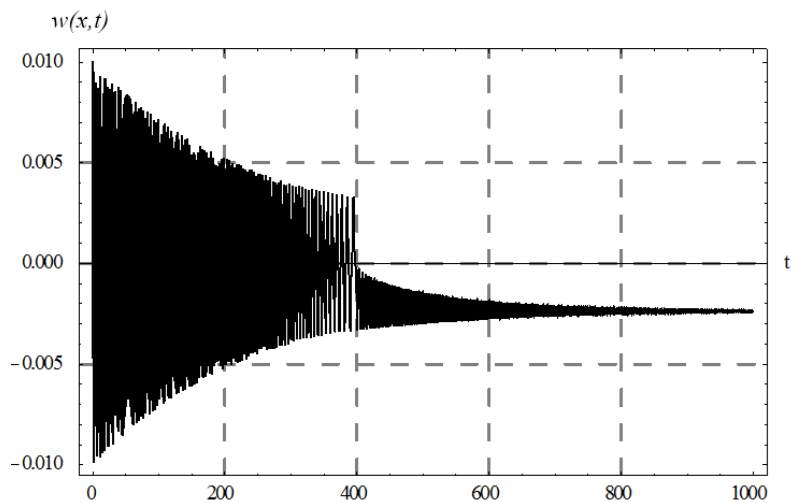


Рис. 3. Колебания точки $x = \frac{b+c}{2}$ при $N = 5000$, $V = 8$.

Заключение

Предложена методика определения критических сочетаний скорости потока и продольного усилия, при которых аэрогидроупругая система совершает скачкообразный переход. Результаты могут быть использованы при проектировании конструкций, работающих в условиях обтекания потоком жидкости или газа, например, вибрационных устройств.

Литература

1. Анкилов А.В., Вельмисов П.А. Функционалы Ляпунова в некоторых задачах аэрогидроупругости. Ульяновск: УлГТУ, 2019. 201 с.
2. Вельмисов П.А., Киреев С.В. Математическое моделирование в задачах статической неустойчивости упругих элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии. Ульяновск: УлГТУ, 2011. 200 с.
3. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. Москва: Мир, 1988. 352 с.

MSC 35Q74:65Q10

Study of the bifurcation of a solution to a problem of aerohydroelasticity

Yu.A. Tamarova¹, P.A. Velmisov¹
Ulyanovsk State Technical University¹

Abstract: A numerical-analytical approach to studying step-like transitions in aero-hydroelastic systems is proposed. Using the Galerkin method, a nonlinear boundary value problem is reduced to a system of ordinary differential equations, for which an analytical condition for the step-like transition is obtained. The results are validated by numerical simulations using the Mathematica package.

Keywords: aerohydroelasticity, bifurcation, stability, Galerkin method.