

УДК 519.63

Численное исследование динамики упругого элемента проточного канала

Тамарова Ю.А.¹

Ульяновский государственный технический университет¹

Аннотация: Исследуется динамика упругого элемента стенки канала при протекании в канале сжимаемого потока газа или жидкости. Предложен численный метод решения задачи на основе метода конечных разностей. Используется неявно-явная разностная схема второго порядка аппроксимации по времени и пространству, в которой линейное уравнение динамики упругого элемента аппроксимируется неявно, а волновое уравнение для потенциала скорости – явно.

Ключевые слова: аэрогидроупругость, метод конечных разностей, динамика.

1. Постановка задачи

Рассматривается плоское течение дозвукового сжимаемого потока газа (жидкости) в прямоугольной области $J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < x_0, \quad 0 < y < y_0\}$ при $t \geq 0$. Скорость невозмущенного однородного потока равна V и направлена вдоль оси Ox . Упругим элементом является часть стенки $y = y_0$ при $x \in [b, c]$, $0 < b < c < x_0$. Обозначим: $w(x, t)$ — деформация упругого элемента; $\varphi(x, y, t)$ — потенциал скорости возмущенного потока.

Математическая модель рассматриваемого вибрационного устройства включает уравнение для потенциала скорости, уравнение колебаний пластины с учетом демпфирования и продольной силы, а также условия сопряжения на границе раздела сред.

Для сжимаемых течений потенциал скорости удовлетворяет уравнению:

$$\varphi_{tt} + 2V\varphi_{xt} + V^2\varphi_{xx} = a^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}), \quad (x, y) \in J, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где a — скорость звука.

Динамика упругого элемента описывается линейным уравнением:

$$Dw''''(x, t) + \beta_2\dot{w}'''(x, t) + M\ddot{w}(x, t) + Nw''(x, t) + \\ + \beta_1\dot{w}(x, t) + \beta_0w(x, t) = -\rho(\varphi_t(x, y_0, t) + V\varphi_x(x, y_0, t)), \quad x \in (b, c), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

где $D, M, N, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \rho$ — некоторые физические величины.

Условия непротекания на стенках канала:

$$\varphi_y(x, y_0, t) = \dot{w}(x, t) + Vw'(x, t), \quad x \in (b, c), \quad t \geq 0, \quad (3)$$

$$\varphi_y(x, y_0, t) = 0, \quad x \in (0, b) \cup (c, x_0), \quad t \geq 0, \quad (4)$$

$$\varphi_y(x, 0, t) = 0, \quad x \in (0, x_0), \quad t \geq 0. \quad (5)$$

Условия отсутствия возмущений в граничных сечениях канала:

$$\varphi(0, y, t) = 0, \quad \varphi(x_0, y, t) = 0, \quad y \in (0, y_0), \quad t \geq 0. \quad (6)$$

Граничные условия на концах упругого элемента (шарнирное закрепление):

$$w(b, t) = w(c, t) = w''(b, t) = w''(c, t) = 0. \quad (7)$$

Начальные условия:

$$w(x, 0) = f_1(x), \quad \dot{w}(x, 0) = f_2(x), \quad x \in (b, c), \quad (8)$$

$$\varphi(x, y, 0) = \psi_1(x, y), \quad \varphi_t(x, y, 0) = \psi_2(x, y), \quad (x, y) \in J, \quad (9)$$

$f_1(x)$, $f_2(x)$, $\psi_1(x, y)$, $\psi_2(x, y)$ — некоторые заданные функции. Таким образом, имеем связанную начально-краевую задачу (1)-(9) для функций $\varphi(x, y, t)$ и $w(x, t)$.

2. Разностная схема

Учитывая простую геометрию расчетной области (прямоугольный канал), для численного решения задачи (1)-(9) используется метод конечных разностей второго порядка точности [1]. В работе [2] была разработана полностью явная разностная схема для решения данной задачи. Однако использование явной схемы для уравнения динамики упругого элемента накладывает жесткое ограничение на шаг по времени, что обусловлено высокой жесткостью пластины. Предлагается модификация численного метода: уравнение для потенциала скорости аппроксимируется явно, а уравнение динамики пластины аппроксимируется неявно. Это позволяет снять ограничение на шаг по времени, связанное с жесткостью упругого элемента, и повысить вычислительную эффективность метода.

Введем равномерную разностную сетку:

$$\begin{aligned} x_i &= ih_x, \quad i = 0, 1, \dots, N_x, \quad h_x = x_0/N_x, \\ y_j &= jh_y, \quad j = 0, 1, \dots, N_y, \quad h_y = y_0/N_y, \\ t_k &= kh_t, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где N_x , N_y — число интервалов разбиения по x и y соответственно; h_x , h_y — шаги пространственной сетки; h_t — шаг по времени. Упругий элемент расположен на интервале $x \in [b, c]$, которому соответствуют узлы сетки с индексами $i_b = \frac{b}{h_x}$, $\dots$, $i_c = \frac{c}{h_x}$. Граница контакта жидкости и упругого элемента $y = y_0$ соответствует индексу $j = N_y$. Обозначим: $\varphi_{ij}^k \approx \varphi(x_i, y_j, t_k)$, $w_i^k \approx w(x_i, t_k)$.

Для уравнения (1) используем явную схему второго порядка точности. Для внутренних узлов сетки имеем:

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}^{k+1} &= 2\varphi_{ij}^k - \varphi_{ij}^{k-1} - \frac{Vh_t}{2h_x} [(\varphi_{i+1,j}^k - \varphi_{i-1,j}^k) - (\varphi_{i+1,j}^{k-1} - \varphi_{i-1,j}^{k-1})] - \\ &- \frac{V^2h_t^2}{h_x^2} (\varphi_{i+1,j}^k - 2\varphi_{ij}^k + \varphi_{i-1,j}^k) + \frac{a^2h_t^2}{h_x^2} (\varphi_{i+1,j}^k - 2\varphi_{ij}^k + \varphi_{i-1,j}^k) + \\ &+ \frac{a^2h_t^2}{h_y^2} (\varphi_{i,j+1}^k - 2\varphi_{ij}^k + \varphi_{i,j-1}^k). \end{aligned} \quad (10)$$

Для уравнения (2) используем неявную схему. Для узлов упругого элемента $i \in (i_b + 2, i_c - 2)$ значения w_i^{k+1} находятся из решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \gamma w_{i-2}^{k+1} + \left(-4\gamma + \frac{N}{h_x^2}\right) w_{i-1}^{k+1} + \left(6\gamma + \frac{M}{h_t^2} + \frac{\beta_1}{h_t} + \beta_0 - \frac{2N}{h_x^2}\right) w_i^{k+1} + \\ + \left(-4\gamma + \frac{N}{h_x^2}\right) w_{i+1}^{k+1} + \gamma w_{i+2}^{k+1} = R_i, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$R_i = -\rho \left(\frac{\varphi_{i,N_y}^{k+1} - \varphi_{i,N_y}^k}{h_t} + V \frac{\varphi_{i+1,N_y}^{k+1} - \varphi_{i-1,N_y}^{k+1}}{2h_x} \right) + \frac{\beta_2}{h_t h_x^4} \Lambda_i^k + \frac{M}{h_t^2} (2w_i^k - w_i^{k-1}) + \frac{\beta_1}{h_t} w_i^k,$$

$$\Lambda_i^k = w_{i+2}^k - 4w_{i+1}^k + 6w_i^k - 4w_{i-1}^k + w_{i-2}^k, \quad \gamma = \frac{D + \beta_2 h_t}{h_x^4}.$$

Из условий (3)-(6) получим:

$$\varphi_{i,N_y+1}^k = \varphi_{i,N_y-1}^k + 2h_y \left(\frac{w_i^{k+1} - w_i^k}{h_t} + V \frac{w_{i+1}^k - w_{i-1}^k}{2h_x} \right), \quad i = i_b, \dots, i_c; \quad (12)$$

$$\varphi_{i,N_y+1}^k = \varphi_{i,N_y-1}^k, \quad i = 0, \dots, i_b - 1, \quad i = i_c + 1, \dots, N_x; \quad (13)$$

$$\varphi_{i,-1}^k = \varphi_{i,1}^k, \quad i = 0, 1, \dots, N_x; \quad \varphi_{0,j}^k = 0, \varphi_{N_x,j}^k = 0, \quad j = 0, 1, \dots, N_y.$$

Из граничных условий (7) получим

$$w_{i_b}^k = 0, \quad w_{i_c}^k = 0, \quad w_{i_b-1}^k = -w_{i_b+1}^k, \quad w_{i_b-2}^k = -w_{i_b+2}^k. \quad (14)$$

Начальные условия (8)-(9) примут вид

$$w_i^0 = f_1(x_i) \text{ при } i \in (i_b, i_c), \quad w_i^0 = 0 \text{ при } i \in (0, i_b) \cup (i_c, n);$$

$$\frac{w_i^1 - w_i^0}{h_t} = f_2(x_i) \text{ при } i \in (i_b, i_c), \quad w_i^0 = w_i^1 \text{ при } i \in (0, i_b) \cup (i_c, n); \quad (15)$$

$$\varphi_{ij}^0 = \psi_1(x_i, y_j);$$

$$\frac{\varphi_{ij}^1 - \varphi_{ij}^0}{h_t} = \psi_2(x_i, y_j) \Rightarrow \varphi_{ij}^1 = \psi_1(x_i, y_j) + h_t \psi_2(x_i, y_j).$$

Получены условия устойчивости разностных схем (10),(11), которые были учтены в расчетах при выборе шага по времени h_t . Численные расчеты выполнены с использованием программы, разработанной на языке Python. На каждом временном шаге необходимо решать систему линейных уравнений (11) с пятидиагональной матрицей. Для решения применяется LU-разложение для разреженных ленточных матриц, реализованное в библиотеке SciPy [3] (алгоритм SuperLU).

3. Примеры расчетов

Разработанная программа позволяет получать графики зависимостей функции прогиба $w(x, t)$ при варьировании параметров задачи: скорости потока V , продольной силы N , коэффициентов демпфирования β_1, β_2 , толщины пластины h . На рисунках 1,2 представлены примеры расчетов для механической системы с параметрами: поток – воздух ($\rho = 1.2$), $V = 5$, $a = 343$; упругий элемент (пластина) изготовлен из алюминия: $M = 13.5$, $D = 808.5$, $\beta_0 = 2$, $\beta_1 = 0.5$, $\beta_2 = 0.2$; $x_0 = 5$, $y_0 = 0.1$, $b = 2$, $c = 3$. Все значения приведены в системе СИ. При реализации расчетов было введено разбиение: $N_x = 30$, $N_y = 20$; конечный момент времени $T = 3$ с. Начальные условия выбираются в согласованной форме [2]:

$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = \sin \left(\frac{\pi(x-b)}{c-b} \right), \quad x \in [b, c],$$

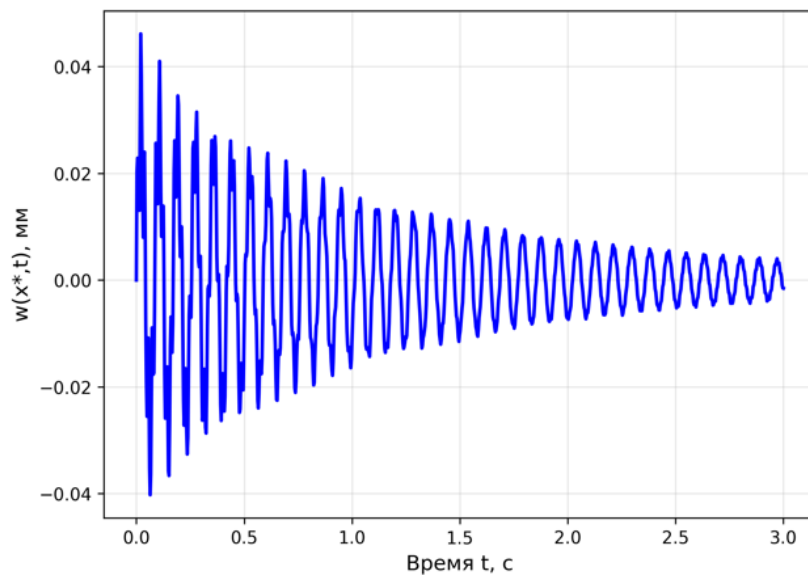


Рис. 1. Колебания точки $x^* = \frac{b+c}{2}$ при $N = 1000$.

$$\psi_1(x, y) = \begin{cases} 0, & x \in (0, b) \cup (c, x_0), \\ \frac{y^2}{2y_0} \sin\left(\pi \frac{x-b}{c-b}\right), & x \in [b, c]. \end{cases} \quad (18)$$

Функция $\psi_2(x, y)$ определяется из условия согласования начальных данных с уравнением динамики пластины и условием непротекания при $t = 0$ и представляет собой кусочно-аналитическую функцию [2].

4. Заключение

Предложена конечно-разностная схема второго порядка точности для численного решения задачи динамического взаимодействия упругого элемента с потоком сжимаемой жидкости (газа) в прямоугольном канале. Построены решения в зависимости от разного задания значений продольного усилия. Разработанный метод может быть использован для анализа динамической устойчивости тонкостенных конструкций, взаимодействующих с потоком.

Литература

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. Москва: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1977. 657 с.
2. Анкилов А.В., Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А. Исследование динамики и устойчивости упругого элемента проточного канала // Журнал Средневолжского математического общества. 2016. Т. 18, № 1. С. 94-107.
3. Нуньес-Иглесиас Х., Уолт ван дер Ш., Дэшноу Х. Элегантный Scipy. Москва: ДМК Пресс, 2018. 266 с.

MSC 35Q74:65N06

Numerical study of the dynamics of an elastic element of a flow channel

Yu.A. Tamarova¹

Ulyanovsk State Technical University¹

Abstract: The dynamics of an elastic element of a channel wall during a compressible gas or liquid flow is investigated. A numerical solution based on the finite difference method is proposed. A second-order implicit-explicit difference scheme with approximations in time and space is used, in which the linear equation for the elastic element's dynamics is approximated implicitly, and the wave equation for the velocity potential is explicitly approximated.

Keywords: aerohydroelasticity, finite difference method, dynamics.