

УДК 519.83:519.688

Численная реализация кооперативно-игрового алгоритма построения устойчивых коалиционных структур на основе матрицы попарного сходства

Соловьева А.К.¹

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана¹

Аннотация: В работе рассматривается задача построения коалиционной структуры на конечном множестве объектов, заданных матрицей попарного сходства. Предлагаемый подход дополняет классическую кластеризацию учетом индивидуальных стимулов игроков к изменению коалиционной принадлежности. На основе центрированной матрицы сходства задается парно-аддитивная характеристическая функция кооперативной игры. Для значения Ауманна–Дрезе и правила Equal Surplus получены индивидуальные выигрыши и критерии выгодности одностороннего перехода. Описана численная процедура, последовательно модифицирующая начальное разбиение до состояния без выгодных индивидуальных отклонений.

Ключевые слова: кооперативная игра, коалиционная структура, матрица попарного сходства, индивидуальная устойчивость, значение Ауманна–Дрезе, Equal Surplus, численный алгоритм.

1. Постановка задачи

Пусть задано конечное множество объектов $N = \{1, 2, \dots, n\}$, интерпретируемых как игроки, и симметричная матрица попарного сходства

$$S = (s_{ij})_{i,j=1}^n, \quad s_{ij} \in [0, 1], \quad s_{ij} = s_{ji}, \quad s_{ii} = 1.$$

Элемент s_{ij} характеризует близость объектов i и j . В классической постановке кластеризации по такой матрице строится разбиение множества N на группы. Однако в ряде задач группы целесообразно трактовать как коалиции игроков, каждый из которых может быть заинтересован в переходе в другую группу. Такая постановка близка к моделям гедонических коалиций, где устойчивость разбиения определяется через индивидуальные предпочтения участников [1].

Цель работы состоит в построении численной процедуры формирования такой коалиционной структуры, в которой отсутствуют выгодные односторонние переходы игроков. Тем самым качество результата определяется с учетом внутригруппового сходства и индивидуальной устойчивости полученного разбиения.

2. Кооперативно-игровая модель

Для перехода от матрицы сходства к кооперативной игре введем базовый уровень сходства и центрированные веса:

$$\mu = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} s_{ij}, \quad a_{ij} = s_{ij} - \mu \quad (i \neq j), \quad a_{ii} = 0.$$

Центрирование позволяет учитывать отклонение попарного сходства от среднего уровня и уменьшает систематическое предпочтение крупных коалиций.

Коалиционная ценность задается парно-аддитивной характеристической функцией

$$v(C) = \sum_{\substack{i < j \\ i, j \in C}} a_{ij}, \quad C \subseteq N,$$

где $v(\emptyset) = 0$ и $v(\{i\}) = 0$. Таким образом, ценность коалиции определяется суммой центрированных попарных вкладов между ее участниками. Коалиционная структура представляет собой разбиение

$$\pi = \{C_1, \dots, C_K\}, \quad C_k \cap C_l = \emptyset \ (k \neq l), \quad \bigcup_{k=1}^K C_k = N.$$

Через $C(i)$ обозначим коалицию, содержащую игрока i .

Для перехода от $v(C)$ к индивидуальным выигрышам рассматриваются два правила распределения. Значение Ауманна–Дрезе представляет собой значение Шепли, вычисляемое отдельно внутри каждой коалиции структуры [2, 3]. Для выбранной парно-аддитивной функции

$$u_i^{AD}(\pi) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{j \in C(i) \\ j \neq i}} a_{ij}.$$

При правиле Equal Surplus, поскольку $v(\{i\}) = 0$, индивидуальный выигрыш равен

$$u_i^{ES}(\pi) = \frac{v(C(i))}{|C(i)|}.$$

Таким образом, значение Ауманна–Дрезе учитывает локальные связи игрока, а Equal Surplus распределяет ценность коалиции поровну.

3. Критерии выгодных переходов и численный алгоритм

Рассмотрим односторонний переход игрока i из текущей коалиции $C(i)$ в другую коалицию $D \in \pi$, $D \neq C(i)$, либо образование одноэлементной коалиции. Переход называется выгодным, если индивидуальный выигрыш игрока после перехода строго больше его текущего выигрыша.

Для значения Ауманна–Дрезе переход игрока i в коалицию D выгоден тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j \in D} a_{ij} > \sum_{\substack{j \in C(i) \\ j \neq i}} a_{ij}.$$

Уход в одноэлементную коалицию выгоден, если правая сумма отрицательна.

Для правила Equal Surplus переход игрока i в коалицию D выгоден тогда и только тогда, когда

$$\frac{v(D) + \sum_{j \in D} a_{ij}}{|D| + 1} > \frac{v(C(i))}{|C(i)|}.$$

Уход в одноэлементную коалицию выгоден при $v(C(i)) < 0$.

На основе этих критериев строится итеративный алгоритм односторонних улучшений. Начальное разбиение $\pi^{(0)}$ может быть получено любым алгоритмом кластеризации по матрице сходства; в вычислительных экспериментах использовался подход, связанный с Density-Restricted Agglomerative Clustering [4]. Далее на каждом шаге для всех игроков и всех допустимых направлений перехода вычисляется приращение индивидуального выигрыша. Если существует хотя бы один выгодный переход, выбирается переход с максимальным положительным приращением; после этого коалиционная структура обновляется. Процесс останавливается, когда выгодных переходов не остается.

Полученная структура является индивидуально устойчивой: ни один игрок не может строго увеличить свой выигрыш односторонним переходом. Для значения Ауманна–Дрезе динамика согласована с функционалом

$$V(\pi) = \sum_{C \in \pi} v(C),$$

поэтому каждый выгодный переход увеличивает суммарную ценность структуры, что при конечном числе разбиений обеспечивает сходимость процедуры. Для правила Equal Surplus такая потенциальная структура в общем случае не гарантируется.

4. Вычислительная интерпретация и выводы

Предложенный алгоритм предназначен для задач группировки объектов со сложным признаковым описанием, в которых результат должен допускать коалиционную интерпретацию и быть устойчивым относительно индивидуальных отклонений. В прикладной части вычислительная реализация была апробирована на данных о клинических исследованиях фармацевтических компаний; матрица сходства строилась по профилям исследовательской активности организаций.

Численная реализация позволяет сравнивать начальную и итоговую коалиционные структуры, число выполненных переходов и факт достижения устойчивого состояния. Вычислительные эксперименты показывают, что выбор правила распределения коалиционной ценности влияет на индивидуальные выигрыши игроков и итоговую конфигурацию коалиций: значение Ауманна–Дрезе учитывает локальные связи игрока с участниками его коалиции, а Equal Surplus оценивает положение игрока через среднюю ценность всей группы.

Разработанная вычислительная реализация зарегистрирована в Федеральной службе по интеллектуальной собственности как программа для ЭВМ: свидетельство № 2026663391 от 6 мая 2026 г. Исходный код размещен в репозитории GitHub [5].

Итогом работы является численный алгоритм, преобразующий исходное разбиение в коалиционную структуру, устойчивую относительно индивидуальных отклонений.

Литература

1. Bogomolnaia A., Jackson M.O. The Stability of Hedonic Coalition Structures // Games and Economic Behavior. 2002. Vol. 38, No. 2. P. 201-230.
2. Shapley L.S. A Value for n-Person Games // Contributions to the Theory of Games II / ed. by H.W. Kuhn, A.W. Tucker. Princeton: Princeton University Press, 1953. P. 307-317.

3. Aumann R.J., Dreze J.H. Cooperative Games with Coalition Structures // International Journal of Game Theory. 1974. Vol. 3. P. 217-237.
4. Dhamal S., Bhat S., Anoop K.R., Embar V.R. Pattern Clustering Using Cooperative Game Theory. arXiv:1201.0461, 2012. URL: <https://arxiv.org/abs/1201.0461>.
5. Соловьева А.К. Кооперативная игровая модель формирования устойчивых коалиционных структур на основе матрицы попарного сходства: репозиторий исходного кода. GitHub, 2026. URL: https://github.com/Unsoc1able/coop_theory_diploma/tree/main.

MSC 91A12, 62H30, 68W40

Numerical implementation of a cooperative game algorithm for constructing stable coalition structures based on a pairwise similarity matrix

A.K. Solovyeva¹

Bauman Moscow State Technical University¹

Abstract: The paper considers the construction of a coalition structure on a finite set of objects represented by a pairwise similarity matrix. The proposed approach extends classical clustering by taking into account individual incentives of players to change their coalition membership. A centered pairwise-additive characteristic function of a cooperative game is defined using the similarity matrix. For the Aumann–Dreze value and the Equal Surplus rule, individual payoffs and criteria for profitable unilateral deviations are obtained. A numerical procedure is described that sequentially modifies an initial partition until no profitable individual deviations remain.

Keywords: cooperative game, coalition structure, pairwise similarity matrix, individual stability, Aumann–Dreze value, Equal Surplus, numerical algorithm.