

УДК 519.63

SO(n)-расширения линейных квазипериодических систем

А.Н. Сахаров

Нижегородский государственный аграрно-технологический университет им.
Л.Я. Флорентьева

Аннотация: В докладе рассматриваются дифференциальные уравнения на многомерном торе, получающаяся в результате приведения к треугольному виду линейной системы с вещественными квазипериодическими коэффициентами. Формулируя необходимые и достаточные условия структурной устойчивости исходной линейной системы. Эти условия определяются свойствами топологического инварианта потока на торе – вектором вращения.

Ключевые слова: групповые расширения, вектор вращения, треугольные линейные системы.

1. Уравнения на торе

Алгоритм приведения к треугольному виду вещественной линейной квазипериодической системы с помощью SO(n)-расширения подробно описан в [1], общий случай – теорема 5.8 [2]. Здесь рассматривается система

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{x} = A(\varphi)x, \quad \varphi \in \mathbb{T}^m, \quad (1)$$

где φ – угловые координаты на торе $\mathbb{T}^m$, ω – вектор с рационально независимыми компонентами, $A(\varphi)$ – гладкая матрица-функция на торе, симметрическая часть которой диагональна. Пусть $A(\varphi) = S(\varphi) + R(\varphi)$ разложение матрицы $A(\varphi)$ на симметрическую и антисимметрическую части. Уравнения для матрицы $Q \in \text{SO}(n)$, приводящая систему (1) к треугольному виду выглядят так:

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad Q' \dot{Q} = Q' R(\varphi) Q + P'(\varphi, Q) - P(\varphi, Q). \quad (2)$$

Здесь $P(\varphi, Q)$ – верхняя треугольная матрица с нулевой диагональю. Начальные данные (φ_0, Q_0) решения системы (2) определены с точностью до множителя из подгруппы стабильности матрицы Q_0 . Эта подгруппа совпадает с группой $\text{SO}(n-1)$. Из равенства $S^{n-1} = \text{SO}(n)/\text{SO}(n-1)$ следует, что система (2) определяет поток на $\mathbb{T}^m \times S^{n-1}$, который будем называть групповым расширением потока на торе $\mathbb{T}^m$.

Представим систему (2) в координатах (φ, θ) , где $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n-1})$ – обобщенные углы Эйлера. Матрица Q в этих координатах записывается так¹

$$Q = Q(\theta_1)Q(\theta_2) \cdots Q(\theta_{n-1}), \quad Q(\theta_k) = e^{\theta_k J_k}, \quad 0 \leq \theta_1 < 2\pi, \quad 0 \leq \theta_k < \pi, k = 2, \dots, n-1,$$

$$\text{где } J_k = \text{diag}(0, \dots, 0, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 0, \dots, 0).$$

¹Корректность такого представления следует из структуры группы $\text{SO}(n)$, описание которой можно найти, например, в [3], глава IX, § 1.

Теорема 1. В координатах (φ, θ) система (2) может быть представлена в как система на торе $\mathbb{T}^{m+n-1}$

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{\theta} = F(\varphi, \theta), \quad (3)$$

где компоненты вектора $F(\varphi, \theta) = (f_1(\varphi, \theta_1), f_2(\varphi, \theta_1, \theta_2), \dots, f_{n-1}(\varphi, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}))$ имеют одинаковую структуру:

$$f_k(\varphi, \theta_1, \dots, \theta_k) = a_k(\varphi, \theta_1), \dots, \theta_{k-1}) - b_k(\varphi, \theta_1, \dots, \theta_{k-1}) \sin 2\theta_k, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Таким образом, подсистема $m+k$ уравнений системы (3) представляет собой SO(2)-расширение потока на торе, определяемого системой

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{\theta}_1 = f_1(\varphi, \theta_1), \quad \dots \quad \dot{\theta}_{k-1} = f_{k-1}(\varphi, \theta_1, \dots, \theta_{k-1}), \quad (4)$$

то есть является триангуляцией двумерной линейной системы с матрицей коэффициентов

$$\begin{pmatrix} b_k(\varphi, \theta_1, \dots, \theta_{k-1}) & -a_k(\varphi, \theta_1) \\ a_k(\varphi, \theta_1) & -b_k(\varphi, \theta_1, \dots, \theta_{k-1}) \end{pmatrix}.$$

Например, пусть $n = 3$, $A(\varphi) = D(\varphi) + R(\varphi)$, где $D(\varphi) = \text{diag}(d_1(\varphi), d_2(\varphi), d_3(\varphi))$, а

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -r_1(\varphi) & -r_2(\varphi) \\ r_1(\varphi) & 0 & -r_3(\varphi) \\ r_2(\varphi) & r_3(\varphi) & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда система (2) записывается так

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \omega, \\ \dot{\theta}_1 = f_1(\varphi, \theta_1) = r_1(\varphi) - \frac{d_1(\varphi) - d_2(\varphi)}{2} \sin 2\theta_1, \\ \dot{\theta}_2 = f_2(\varphi, \theta_1, \theta_2) = r_4(\varphi) \cos \theta_1 - r_2(\varphi) \sin \theta_1 + \\ + (\cos^2 \theta_1 (d_1(\varphi) - d_2(\varphi)) - d_1(\varphi) + d_3(\varphi)) \frac{\sin 2\theta_2}{2}. \end{cases} \quad (5)$$

Пусть $\theta_k(t, \varphi_0, \theta_{10}, \dots, \theta_{k0})$ – решение k -го уравнения системы (3), тогда система в вариациях относительно переменной θ_k будет линейной

$$\dot{\xi} = -2b_k(\varphi, \theta_1, \dots, \theta_{k-1}) \cos \theta_k(t, \varphi_0, \theta_{10}, \dots, \theta_{k0}) \xi, \quad (6)$$

что позволяет эффективно вычислять показатель Ляпунова этого решения.

2. Вектор вращения

Геометрический вектор вращения для системы (3) это вектор (ω, ρ) , где вектор ρ – вектор вращения слоя $\mathbb{T}^{n-1}$ определяется так

$$\rho(\varphi, \theta) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^t F(\varphi + \omega s, \theta(s, \varphi, \theta)) ds, \quad (7)$$

где $(\varphi + \omega t, \theta(t, \varphi, \theta))$ – решение (3). Небольшая модификация конструкции из [1] позволяет доказать следующее утверждение.

Теорема 2. Предел (7) существует и не зависит от выбора начальных значений (φ, θ) .

Согласно теории асимптотических циклов С. Шварцмана [4] число рационально независимых компонент вектора вращения не превышает $m + \ell$, где ℓ – размерность максимальной торической подалгебры алгебры Ли группы $SO(n)$. На рис. 1 показаны графики компонент вектора вращения слоя в зависимости от параметра системы вида (5). Далее обсуждаются вопросы нормальной гиперболичности системы (1), вследствие чего приходится рассматривать зависимость поведения групповых расширений от параметра. Предполагается, что поток на торе $\mathbb{T}^m$ не варьируется.

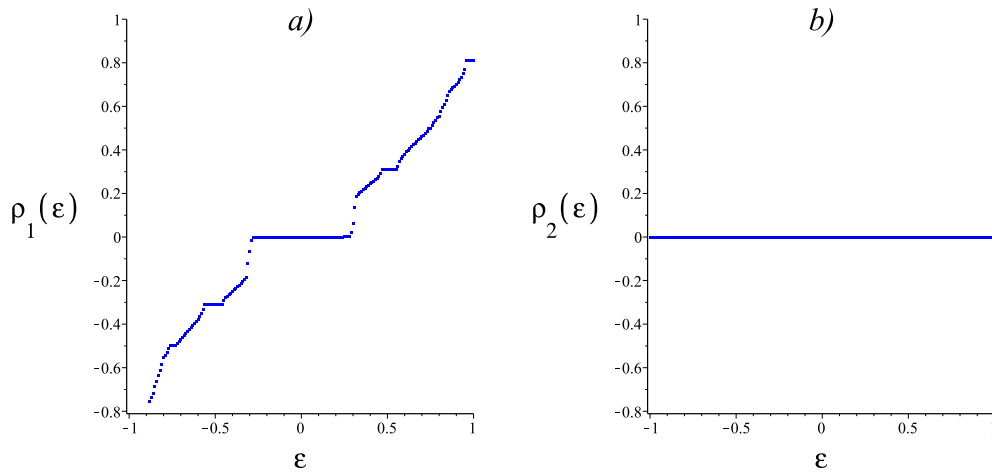


Рис. 1. Компоненты вектора вращения слоя системы вида (5): а) число вращения слоя 2-го уравнения системы, б) число вращения слоя 3-го уравнения системы.

3. Условия гиперболичности

На графике зависимости от параметра компонент вектора вращения слоя наблюдаются интервалы постоянства компонент этого вектора. Они играют существенную роль в описании гиперболической структуры системы (3).

Теорема 3. Рассмотрим подсистему

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{\theta}_1 = f_1(\varphi, \theta_1), \quad \dots \quad \dot{\theta}_k = f_k(\varphi, \theta_1, \dots, \theta_k) \quad (8)$$

подсистемы (3). Если компонента вектора вращения ρ_k принадлежит интервалу постоянства, то показатели Ляпунова система в вариациях (6) отличны от нуля.

Доказательство существенно опирается на то, что (как было отмечено выше) система (8) является групповым расширением линейной двумерной системы и следующим фактом: инвариантное многообразие сохраняется при возмущениях тогда и только тогда, когда оно нормально гиперболично [5]. Заметим, что если ρ_k принадлежит интервалу постоянства, то оно соизмеримо с предыдущими компонентами вектора вращения. Если все предыдущие компоненты вектора вращения рационально независимы, то теорема 3 работает при условии, что все решения системы (4) квазипериодические с $m + k - 1$ рационально независимыми частотами.

Литература

1. Сахаров А.Н. Множества вращения $SO(3)$ -расширений квазипериодических потоков // Журнал СВМО. 2025. Т. 27, № 2. С. 171-184.
2. Бронштейн И.У. Неавтономные динамические системы. Кишинев: Штиинца, 1984. 290 с.
3. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представления групп. Москва: Наука, 1965. 588 с.
4. Schwartzman S. Asymptotic cycles // Ann. of Math. 1957. Vol. 66. P. 270-284.
5. Mané R. Persistent manifolds are normally hyperbolic // Trans. Amer. Math. Soc. 1978. Vol. 246. P. 261-283.

MSC 34D20

SO(n)-extensions of linear quasiperiodic systems

A.N. Sakharov

Nizhny Novgorod State Agrarian and Technological University named after
L.Ya. Florentyev

Abstract: This paper examines differential equations on a multidimensional torus, resulting from the reduction of a linear system with real quasiperiodic coefficients to triangular form. Necessary and sufficient conditions for the structural stability of the original linear system are formulated. These conditions are determined by the properties of a topological invariant of the flow on the torus – the rotation vector.

Keywords: group extensions, rotation vector, triangular linear systems.