

УДК 517.9

Аппроксимация решения двумерного интегрального уравнения Вольтерра с нагруженным оператором*

Рязанцев В.А.¹, Тында А.Н.¹

Пензенский государственный университет¹

Аннотация: В работе строится численный метод решения двумерного интегрального уравнения Вольтерра с локальными нагрузками. Предлагаемый численный метод основывается на сведении задачи к решению системы линейных уравнений относительно коэффициентов аппроксимации искомой функции на сетке узлов специального вида. Проведённые численные расчёты подтверждают эффективность метода.

Ключевые слова: двумерное интегральное уравнение, уравнение вольтерровского типа, кусочно-линейная аппроксимация, локальные нагрузки

В работе описывается прямой численный метод решения двумерного линейного интегрального уравнения вольтерровского типа с локальными нагрузками, под которым понимается интегральное уравнение с оператором, включающим в себя след искомого решения в форме линейной комбинации значений этого решения в конечном множестве точек. Само уравнение, в котором искомой является функция $\psi(x, y)$, записывается следующим образом:

$$\gamma_0(x, y)\psi(x, y) + \sum_{j=1}^N \gamma_j(x, y)\psi(M_j) = \lambda \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y H(x, y; \xi, \eta)\psi(\xi, \eta) d\eta d\xi + f(x, y). \quad (1)$$

Здесь $(x, y) \in \Omega$, $\Omega = [x_0, X] \times [y_0, Y]$, $x_0 < X$ и $y_0 < Y$. Точки M_j , $j = \overline{0, N}$, называемые точками нагрузки, все принадлежат области Ω и являются попарно различными, в то время как функции $H(x, y, \xi, \eta)$ и $f(x, y)$, а также функции $\gamma_j(x, y)$ при $j = \overline{0, N}$, являются непрерывными функциями своих аргументов.

В основе описываемого численного метода решения уравнения (1) лежит кусочно-линейная аппроксимация решения $\psi(x, y)$ по обоим независимым переменным: выполняется построение специальной сетки узлов, которая учитывает распределение неизвестных нагрузок. В результате аппроксимации интегралов рассматриваемого уравнения при помощи квадратурных формул поставленная задача сводится к решению системы линейных уравнений относительно коэффициентов приближённого решения на каждом из сегментов построенной сетки. Численное решение ряда модельных примеров иллюстрирует эффективность предложенного метода.

Литература

1. Byankin V., Tynda A., Sidorov D., Dreglea A. Numerical Solution of Locally Loaded Volterra Integral Equations // Computation. 2025. Vol. 13 (5). P. 121.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-21-00743, <https://rscf.ru/project/25-21-00743/>.

2. Вечкасов Д. Р., Тында А. Н. Решение нелинейных интегральных уравнений Вольтерра с локально нагруженным оператором // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2025. № 4. С. 77–89.
3. Рязанцев В. А., Тында А. Н. Аппроксимация решения двумерного интегрального уравнения Вольтерра с нагруженным оператором // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2026. № 1. С. 49–59.

MSC 65R20

Approximation of solution of two-dimensional Volterra integral equation with a loaded operator

V.A. Ryazantsev¹, A.N. Tynda¹

Penza State University¹

Abstract: A numerical method for solution of two-dimensional Volterra integral equation with local loads is constructed in the paper. The proposed method is based on reduction of the problem to solving the system of linear equations in approximation coefficients of the unknown function on the grid of special type. Calculations that have been performed for the paper proved the efficiency of the method.

Keywords: two-dimensional integral equation, Volterra equation, piecewise-linear approximation, local loads