

Численное моделирование волновых процессов на графе

Рыбаков М.А.¹

Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина¹

Аннотация: Исследование колебаний упругих струнных сетей необходимо для анализа виброакустических характеристик строительных и авиакосмических конструкций, прогнозирования резонансов и проектирования систем виброзащиты. В работе рассматривается начально-краевая задача для волнового уравнения на графе, моделирующая такие колебания. Условия согласования в узлах графа описывают непрерывность смещения и баланс сил, позволяя учесть как идеальное соединение, так и соединение, в котором происходит торможение или ускорение волнового процесса под влиянием внешних воздействий и изменений жёсткости примыкающих струн – рёбер графа. Для решения используется явная разностная схема с двойными узлами. Вычислительные эксперименты подтвердили устойчивость и точность метода.

Ключевые слова: численное моделирование, начально-краевая задача, волновой процесс, граф, условия согласования.

Рассматривается начально-краевая задача, определяющая математическую модель волнового процесса на графе $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ с внутренним узлом ξ (рис. 1). Ребро γ_1 параметризовано отрезком $[0, 1/2]$, ребро γ_2 — отрезком $[1/2, 1]$. Актуальность таких задач обоснована в работах по распространению волн на графах [1].

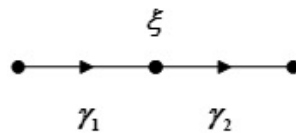


Рис. 1. Граф Γ

Пусть функция $u(x, t)$, определяющая волновой процесс, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - a(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - b(x)u(x, t) = f(x, t), \quad x \in \Gamma, \quad t \in (0, T], \quad (1)$$

условиям согласования в узле ξ

$$u(x, t)|_{x=\frac{1}{2} \in \gamma_1} = u(x, t)|_{x=\frac{1}{2} \in \gamma_2}, \quad (2)$$

$$a(x)_{\gamma_1} \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=\frac{1}{2} \in \gamma_1} = \alpha \cdot a(x)_{\gamma_2} \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=\frac{1}{2} \in \gamma_2}, \quad (3)$$

начальным

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \Gamma, \quad (4)$$

и граничным условиям

$$u(x, t)|_{x=0} = u(x, t)|_{x=1} = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (5)$$

Для волнового процесса поперечных колебаний упругой струнной конструкции коэффициенты $a(x)$ и $b(x)$ в уравнении (1) определяют инерционные и упругие характеристики среды. Коэффициент $a(x)$ – коэффициент упругости материала конструкции, коэффициент $b(x)$ характеризует внутреннее сопротивление сплошной среды. Функция источника $f(x, t)$ задает мощность распределенного внешнего воздействия. Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определяют начальное отклонение и начальную скорость точек конструкции при $t = 0$.

Условие (2) обеспечивает непрерывность поперечного смещения $u(x, t)$ в узле ξ . Условие (3) задает баланс сил натяжения в узле ξ , где коэффициент α характеризует внешнее воздействие на упругий материал конструкции (тормозящее или усиливающее) волновой процесс в узле ξ .

Аппроксимация начально-краевой задачи (1)-(5) приводит к дискретному аналогу математической модели. Для построения разностной схемы используется подход, изложенный в [2]:

$$\begin{aligned} \frac{(u_i^{j+1})_{\gamma_k} - 2(u_i^j)_{\gamma_k} + (u_i^{j-1})_{\gamma_k}}{\tau^2} - (a_i)_{\gamma_k} \frac{(u_{i+1}^j)_{\gamma_k} - 2(u_i^j)_{\gamma_k} + (u_{i-1}^j)_{\gamma_k}}{h^2} - (b_i)_{\gamma_k} (u_i^j)_{\gamma_k} &= (f_i^j)_{\gamma_k}, \\ i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{1, K-1}, \quad k = 1, 2, \\ (u_N^{j+1})_{\gamma_1} &= (u_0^{j+1})_{\gamma_2}, \\ (a_N)_{\gamma_1} \cdot \frac{(u_N^{j+1})_{\gamma_1} - (u_{N-1}^{j+1})_{\gamma_1}}{h} &= \alpha \cdot (a_0)_{\gamma_2} \cdot \frac{(u_1^{j+1})_{\gamma_2} - (u_0^{j+1})_{\gamma_2}}{h}, \\ (u_i^0)_{\gamma_k} &= (\varphi_i)_{\gamma_k}, \quad \frac{(u_i^1)_{\gamma_k} - (u_i^0)_{\gamma_k}}{\tau} = (\psi_i)_{\gamma_k}, \quad i = \overline{0, N}, \quad k = 1, 2, \\ (u_0^{j+1})_{\gamma_1} &= (u_N^{j+1})_{\gamma_2} = 0. \end{aligned}$$

На основе этой разностной схемы рассмотрена тестовая задача, в которой $a(x) = 1$, $b(x) = 0$, $f(x, t) = 0$, $\varphi(x) = \sin(2\pi x)$, $\psi(x) = 0$, $\tau = 0.01$, $h = 0.05$, $T = 1$.

Графические изображения вычисленных значений $u(x, t)$ на графе Γ при различных временных значениях и значениях коэффициента α представлены на рис. 2 и рис. 3.

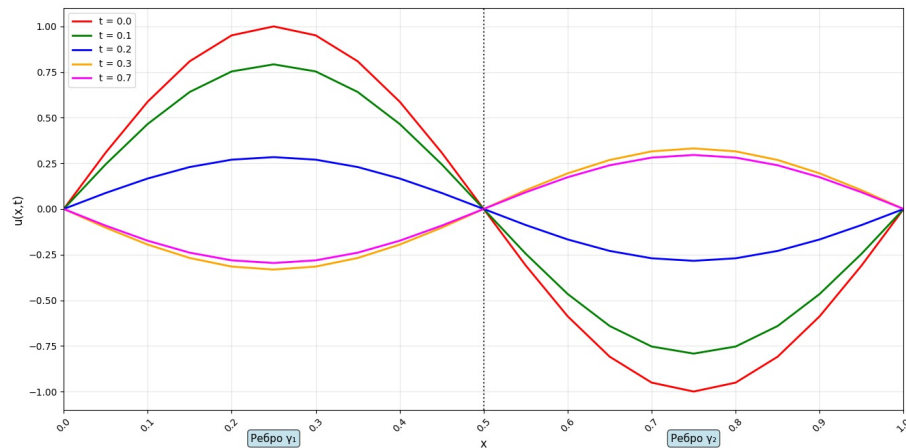


Рис. 2. Значения $u(x, t)$ на графе Γ при $\alpha = 1$

На графиках эволюции волны на графе Γ при $\alpha = 1$ излом отсутствует, и волна гладко переходит через узел ξ . В случае $\alpha = 5$ наблюдается скачок градиента (излом), соответствующий балансу сил и изменению упругих свойств среды. Плавное

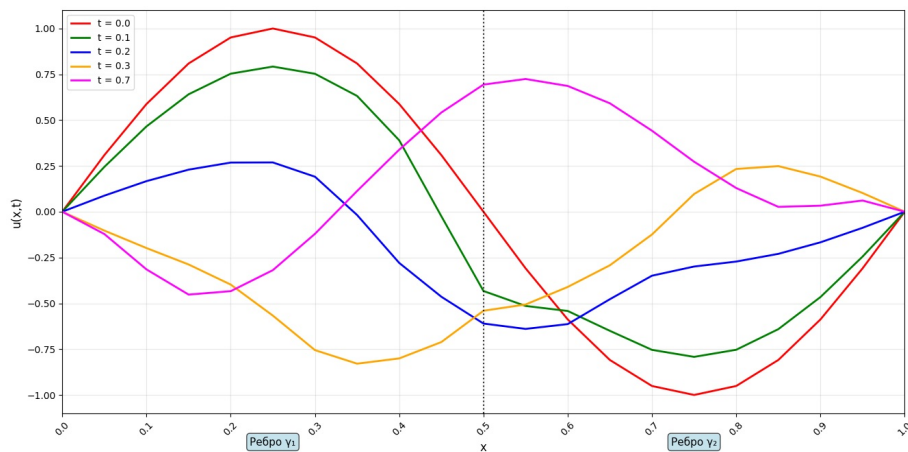


Рис. 3. Значения $u(x, t)$ на графе Γ при $\alpha = 5$

затухание амплитуды колебаний с сохранением формы профиля во времени подтверждает корректность работы численной схемы.

Для подтверждения точности и сходимости разработанного алгоритма было проведено численное решение тестовой «классической» (т.е. при $\alpha = 1$) начально-краевой задачи (1)-(5), где $a(x) = 1$, $b(x) = 0$, $f(x, t) = 0$, $\varphi(x) = \sin(2\pi x)$, $\psi(x) = 0$, $T = 1$, для которой известно точное аналитическое решение $u(x, t) = \sin(2\pi x) \cos(2\pi t)$. Для количественной оценки точности численного решения вычислялась максимальная абсолютная погрешность во всех узлах сетки. Для сетки с шагами $\tau = 0.01$, $h = 0.05$ получена погрешность $\Delta_{\max} = 0.025011$, для $\tau = 0.005$, $h = 0.025$ — погрешность $\Delta_{\max} = 0.013741$, а для $\tau = 0.0025$, $h = 0.0125$ — погрешность $\Delta_{\max} = 0.007172$. Полученные значения погрешностей свидетельствуют о том, что при уменьшении шага сетки в два раза погрешность уменьшается в два раза.

Таким образом, разработанная разностная схема является сходящейся и устойчивой, что подтверждает её пригодность для практических инженерных расчётов. В отличие от аналитических методов (например, с использованием преобразования Лапласа [3]), которые имеют ограниченную применимость, предложенный численный подход позволяет моделировать волновые процессы на графах со сложной топологией, и учитывать сложные условия сопряжения в узлах ветвления.

Литература

1. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 272 с.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем. Москва: Наука, 1977. 656 с.
3. Рыбаков М.А. Решение задачи переноса сплошной среды по сетевому носителю в символьном виде // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2023. Т. 11, Вып. 4. URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1451>.

MSC 35R02

Numerical modeling of wave processes on a graph

M.A. Rybakov¹

Derzhavin Tambov State University¹

Abstract: The investigation of vibrations in elastic string networks is crucial for the analysis of vibroacoustic properties of civil and aerospace structures, the prediction of resonant behavior, and the design of vibration isolation systems. The present work considers an initial-boundary value problem for the wave equation on a graph that describes such vibrations. The coupling conditions at the graph nodes enforce continuity of displacement and force balance, thereby accounting for both ideal joints and joints where external influences and stiffness changes of adjacent strings (graph edges) decelerate or accelerate the wave propagation. An explicit finite-difference scheme with double nodes is used for the numerical solution. Numerical experiments have verified the stability and accuracy of the proposed method.

Keywords: numerical modeling, initial-boundary value problem, wave process, graph, coupling conditions.