

Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
XII ВСЕРОССИЙСКОЙ НАУЧНОЙ
МОЛОДЕЖНОЙ ШКОЛЫ-СЕМИНАРА
имени Е.В. Воскресенского



Саранск
2026

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМ. М.В. КЕЛДЫША РАН

СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

**Математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ**

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
XII ВСЕРОССИЙСКОЙ НАУЧНОЙ
МОЛОДЕЖНОЙ ШКОЛЫ-СЕМИНАРА
имени Е.В. Воскресенского

Саранск
21 — 24 июля 2026 г.

Саранск
2026

УДК 510:004.5

ББК В1

М341

Р е д а к ц и о н н а я к о л л е г и я:

член-корр. РАН, д.ф.-м.н. профессор В.Ф. Тишкин (отв. редактор):

д.ф.-м.н. профессор П.А. Вельмисов;

д.ф.-м.н. профессор Е.Б. Кузнецов;

д.ф.-м.н. профессор О.В. Починка.

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ М341 [Электронный ресурс]: Сборник материалов XII Международной научной молодежной школы-семинара имени Е.В. Воскресенского (Саранск, 21-24 июля 2026 г.) / редкол.: В.Ф. Тишкин (отв. ред.) [и др.]. — Саранск: СВМО, 2026. — 250 с. Режим доступа: <http://conf.svmo.ru/files/2026/ThesesSaransk2026.pdf>

ISBN 978-5-901661-65-9

Настоящее издание содержит материалы докладов участников XII Всероссийской научной молодежной школы-семинара «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» имени Е.В. Воскресенского, проходившей в Национальном исследовательском Мордовском государственном университете с 21 по 24 июля 2026 г.

Представляет интерес для научных работников, студентов и аспирантов.

УДК 510:004.5

ББК В1

Публикуется на основании Устава Межрегиональной общественной организации «Средне-Волжское математическое общество» (п. 2.2) и по решению редакционно-издательского отдела СВМО.

ISBN 978-5-901661-65-9

© Коллектив авторов, 2026

© Оформление. СВМО, 2026

Предисловие

Настоящее издание содержит материалы докладов XII Всероссийской научной молодежной школы-семинара «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» имени Е. В. Воскресенского, которая была проведена с 21 по 24 июля 2026 г. в г. Саранск (Россия). Организаторами школы-семинара выступили Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН и Средне-Волжское математическое общество.

Первая молодёжная научная школа-семинар по математическому моделированию, численным методам и комплексам программ организована в 2003 году. С тех пор школы-семинары стали регулярно проводится один раз в два года (чередуюсь с научными конференциями). Основателем и идейным вдохновителем научных конференций и школ-семинаров являлся талантливый ученый и организатор д.ф.-м.н. профессор Е.В. Воскресенский. Он руководил этими мероприятиями до 2008 года.

Доклады, представленные на школе-семинаре, посвящены исследованиям математических моделей в физике, химии, биологии, экономике и других областях человеческого знания. Диапазон подходов к исследованию моделей, рассмотренных в докладах, достаточно широк и включает как качественные, так и численные методы. Как правило, при использовании численных методов авторы привлекают современные компьютерные технологии, например, параллельные вычисления. Тематика докладов соответствует семинарам школы:

1. Принципы построения математических моделей.
2. Численная реализация алгоритмов математических моделей.
3. Динамические системы и качественные методы анализа математических моделей.
4. Математические модели физики, химии, биологии, экономики, социологии, экологии и других отраслей науки.

Все доклады, представленные на школе-семинаре, были предварительно прорецензированы Программным комитетом.

Организаторы благодарны всем участникам школы-семинара за интересные доклады и плодотворную дискуссию.

**Программный, организационный и редакционный комитеты
XII Всероссийской научной молодежной школы-семинара
«Математическое моделирование, численные методы и комплексы
программ» имени Е.В. Воскресенского
Саранск, 21 — 24 июля 2026 года**

Председатель организационного комитета —

и.о. ректора Национального исследовательского Мордовского государственного университета член-корреспондент РАН Л.А. Балыкова (г. Саранск)

Председатель программного комитета —

член-корреспондент РАН д.ф.-м.н. профессор В.Ф. Тишкин (Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва).

Ученый секретарь —

к.ф.-м.н. О.С. Язовцева (Национальный исследовательский Мордовский государственный университет, г. Саранск)

Программный комитет:

д.ф.-м.н., доцент	Е.Е. Пескова,	г. Саранск,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	Д.В. Баландин,	г. Н. Новгород,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	П.А. Вельмисов,	г. Ульяновск,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	И.М. Губайдуллин,	г. Уфа,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	Ю.Н. Дерюгин,	г. Саров,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	А.П. Жабко,	г. Санкт-Петербург,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	А.М. Камачкин,	г. Санкт-Петербург,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	А.С. Козелков,	г. Саров,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	Н.Д. Кузьмичев,	г. Саранск,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	Е.Б. Кузнецов,	г. Москва,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	С.И. Мартынов,	г. Сургут,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	Н.Д. Морозкин,	г. Уфа,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	О.В. Починка,	г. Н. Новгород,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	Н.В. Старостин,	г. Н. Новгород,	Россия.
к.ф.-м.н.	Л.А. Сухарев,	г. Саранск,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	В.А. Титарев,	г. Москва,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	П.А. Шаманаев,	Сириус,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	М.А. Шишленин,	г. Новосибирск,	Россия.
д.ф.-м.н., профессор	А.А. Глуцок,	г. Лион,	Франция.

Организационный комитет:

д.ф.-м.н., профессор	П.А. Рябочкина,	г. Саранск,	Россия.
к.т.н.	А.М. Давыдкин,	г. Саранск,	Россия.
д.т.н., профессор	П.В. Сенин,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	И.И. Чучаев,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	Т.Ф. Мамедова,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	С.М. Мурюмин,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	Д.К. Егорова,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	А.Н. Тында,	г. Пенза,	Россия.
к.ф.-м.н.	Д.В. Тарасов,	г. Пенза,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	Е.В. Десяев,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	А.О. Сыромясов,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., с.н.с.	М.Н. Вишнякова,	г. Саров,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	Т.Е. Бадокина,	г. Саранск,	Россия.
к.м.н.	С.Х. Зинина,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	О.Е. Каледин,	г. Саранск,	Россия.
к.ф.-м.н., доцент	Е.А. Каледина,	г. Саранск,	Россия.
аспирант	В.Е. Мальков,	г. Саранск,	Россия.
аспирант	М.С. Нефедов,	г. Саранск,	Россия.
студент	Н.В. Ошина,	г. Саранск,	Россия.
студент	Н.А. Тиньгаева,	г. Саранск,	Россия.
аспирант	В.В. Логинов,	г. Саранск,	Россия.
аспирант	Е.С. Калабкин,	г. Саранск,	Россия.
студент	В.В. Вдовин,	г. Саранск,	Россия.
студент	А.Д. Мулюгин,	г. Саранск,	Россия.
аспирант	С.Ф. Сайфетдинов,	г. Саранск,	Россия.
студент	И.В. Митрюхин,	г. Саранск,	Россия.
студент	М.С. Мустайкин,	г. Саранск,	Россия.
студент	И.Р. Янгляев,	г. Саранск,	Россия.
студент	А.В. Панов,	г. Саранск,	Россия.

Содержание

Абрашкин А.М. Применение дифференциальных уравнений в частных производных для оптимизации формирования избирательных округов	14
Банников Н.В., Дерюгин Ю.Н. Моделирование процесса возникновения одномерной детонации методом сглаженных частиц	20
Баязитова А.И., Щепотьев Е.О., Губайдуллин И.М. Нестационарное математическое моделирование реактора гидроочистки прямогонного бензина	23
Беляева А.А., Головизнин В.М., Дерюгин Ю.Н. Методика расчёта двумерных нестационарных задач газовой динамики на деформируемой сетке с использованием схемы КАБАРЕ	29
Васильев А.Н., Тархов Д.А., Шемякина Т.А. Аналитико-нейросетевая модификация метода Хойна для построения модели процессов в химическом реакторе	33
Веселов М.Р., Дерюгин Ю.Н. Численное исследование истечения газа ксенона через сверхзвуковое сопло в вакуумную область	37
Выборнова Ю.В., Киреев С.В., Вельмисов П.А. Исследование нелинейной динамики системы контроля за давлением	40
Гайворонская Ю.Е., Дерюгин Ю.Н., Головизнин В.М. Численное моделирование удара алюминиевых пластин с использованием схемы КАБАРЕ	45
Гарипова А.В., Гарипов Д.Г., Гудаев Ш.Д., Наумова Д.Н., Плужян К.Г. Разработка программного обеспечения для моделирования динамики заряженных частиц	50
Гладун А.В., Вельмисов П.А. О построении стабилизирующего управления для трубопроводной системы	56
Губайдуллин И.М., Янгляев И.Р., Повещенко Ю.А., Подрыга В.О., Язовцева О.С. Об одном алгоритме разрешения пространственных структур с внутренними несогласованными границами	61
Гусельникова И.В. Сходящиеся разностные схемы в анализе сетеподобных гидродинамических процессов	64
Евтина Д.С., Жабко А.П. Устойчивость однородных дифференциально-разностных систем нейтрального типа	69
Ерошкина М.С., Головизнин В.М., Дерюгин Ю.Н. Применение схемы КАБАРЕ для численного моделирования двумерной тепловой конвекции	74
Жалнин Р.В., Мулюгин А.Д., Вдовин В.В. Сравнительный анализ линейных реша-	

телей для безматричного метода Ньютона-Крылова при решении задач газовой динамики неявной схемой для разрывного метода Галёркина	77
Зайцев А.С., Баркалов К.А. Исследование схем редукции размерности для алгоритма поиска нуля неотрицательной функции	83
Зинина С.Х., Красулин Н.И. Алгоритмическая сложность проверки изоморфизма графов, являющихся топологическими инвариантами градиентно-подобных диффеоморфизмов на поверхностях	89
Калабкин Е.С., Мамедова Т.Ф. О пределе обнаружения ботов по временным меткам	92
Конченко П.А., Губайдуллин И.М. Многокритериальная оптимизация технологических параметров гидроизомеризации н-гексадекана с учетом диффузионных ограничений в грануле цеолитного катализатора	95
Кордияк Г.В., Садыков М.Ф. Математическое моделирование процесса взаимодействия автономного роботизированного комплекса с изморозевыми отложениями на ЛЭП	101
Кузнецов Е.Б., Леонов С.С. Проникновение агрессивной среды в трубчатый стержень кольцевого поперечного сечения	105
Кузнецов Е.Б., Леонов С.С. Физически-информированные нейронные сети при решении коэффициентных обратных задач	109
Кузьмичев Н.Д. Аппроксимация производных второго и третьего порядка коэффициентами Фурье	115
Кутяenkova М.А., Поздникова А.Д., Губайдуллин И.М. Математическая модель реакторного блока каталитического риформинга с учетом гидродинамики неподвижного слоя катализатора и кинетики химических превращений	121
Литвинов В.Л., Литвинова К.В. Нейросетевое моделирование продольных колебаний каната с подвижной границей	126
Логинов В.В., Пескова Е.Е. Гибридный GPU-алгоритм для моделирования осесимметричных реагирующих течений с жесткой химической кинетикой	130
Мартынов С.И., Ткач Л.Ю. Модель самодвижущейся системы вращающихся частиц вблизи плоской стенки	136
Мешкова Е.А., Сыромясов А.О. Моделирование фильтрации вязкопластической жидкости в пакете ЛОГОС	141
Мизхер У.Д., Мизхер М.Д., Абрашкин П.М., Вельмисов П.А. Численное моделирование сгорания биогаза в камере с центральным впрыском воздуха	146

Митрюхин И.В., Язовцева О.С., Усманова А.А. Численное исследование процесса окислительной регенерации слоя цилиндрического катализатора	151
Мищенко В.П. Квартальная прогнозная модель с инвестиционным акселератором Кларка	154
Морозкин Н.Д., Колонских Д.М. Математическое моделирование восстановления остаточной намагниченности бурильных труб по данным магнитного градиентометра	159
Морозкин Н.Д., Морозкин Н.Н., Садрисламов М.Ф. Наиточнейший нагрев неограниченной пластины с учетом ограничений на термонапряжения	164
Морозов К.Е., Чижов К.В. Об обратимых возмущениях системы с нелинейным центром	169
Мустайкин М.С., Пескова Е.Е. Об одном вычислительном алгоритме для моделирования дозвуковых реагирующих течений в трубах круглого сечения	169
Никонов В.И. Триангуляция линейных систем	173
Панов А.В., Орехова В.Н. Численное исследование пиролиза этана в цилиндрическом реакторе при воздействии лазерного излучения	176
Переварюха А.Ю. Гибридные модели для анализа двух типов запаздывающей регуляции алеаторических биофизических процессов	179
Подгорнов А.А., Каледина Е.А. Реализация PINN для вихря Тейлора–Грина ...	184
Рыбаков М.А. Численное моделирование волновых процессов на графе	189
Рязанцев В.А., Тында А.Н. Аппроксимация решения двумерного интегрального уравнения Вольтерра с нагруженным оператором	193
Савинков А.С. Построение регрессионной модели рентабельности производственных фондов нефтедобывающего предприятия	196
Сайфетдинов С.Ф., Мамедова Т.Ф. Анализ и оценка математических моделей синтеза медицинских данных	200
Сахаров А.Н. $SO(n)$ -расширения линейных квазипериодических систем	203
Сидорова А.В., Шишлонов А.А. Реализация параллельного алгоритма на основе технологии CUDA для численного исследования дозвуковых химически активных сред	208
Соловьева А.К. Численная реализация кооперативно-игрового алгоритма построения устойчивых коалиционных структур на основе матрицы попарного сходства	212

Тамарова Ю.А. Численное исследование динамики упругого элемента проточного канала	217
Тамарова Ю.А., Вельмисов П.А. Исследование бифуркации решения одной задачи аэрогидроупругости	222
Терентьев В.А. Численное моделирование зеркально-теневого метода контроля цилиндрических изделий на основе открытых программных средств	228
Хисаметдинов И.Ф., Хашпер А.Л., Урлуков А.С., Губайдуллин И.М. Разработка и идентификация кинетической модели процесса низкотемпературной паровой конверсии алканов	232
Хоха Д.И. Унифицированное программное обеспечение для оценивания динамических производственных функций и моделей машинного обучения	236
Чертищева С.А., Судьенков Ю.В., Кучмин А.Ю. Дискретный спектральный анализ акустических импульсов при оптоакустических исследованиях полимеров и композитов	241
Шаманаев П.А. К вопросу об исследовании вынужденных колебаний в неоднородной цепочке линейных осцилляторов с трением и малым параметром	244
Юрова Т.С., Попов И.Ю. Асимптотика резонансных состояний для двухмерных волноводов, соединенных сближающимися отверстиями	246
Юферева Д.Д., Яковлев А.Б. Исследование эффективности захвата металлических компонентов космического мусора катушкой с электрическим током	252
V.L. Leontiev. About global and local orthogonal splines	258

Contents

A.M. Abrashkin. Application of partial differential equations to the optimization of electoral district formation	14
N.V. Bannikov, Yu.N. Deryugin. Simulation of the occurrence of one-dimensional detonation using the smoothed particle method	20
A.I. Bayazitova, E.O. Shchepot'yev, I.M. Gubaydullin. Non-stationary mathematical modeling of a straight-run gasoline hydrotreating reactor	23
A.A. Belyaeva, V.M. Goloviznin, Yu.N. Deryugin. A method for calculating two-dimensional non-stationary problems of gas dynamics on a deformable grid using the CABARET scheme	29
A.N. Vasilyev, D.A. Tarkhov, T.A. Shemyakina. Analytical and neural network modification of Heun's method for constructing a model of processes in a chemical reactor	33
M.R. Veselov, Yu.N. Deryugin. Numerical investigation of the outflow of xenon gas through a supersonic nozzle into a vacuum region	37
Yu.V. Vybornova, S.V. Kireev, P.A. Velmisov. Research on the nonlinear dynamics of the pressure control system	40
Yu.E. Gayvoronskaya, Yu.N. Deryugin, V.M. Goloviznin. Numerical simulation of the impact of aluminum plates using the CABARET scheme	45
A.V. Garipova, D.G. Garipov, Sh.D. Gudaev, D.N. Naumova, K.G. Pluzyan. Development of Software for simulation of charged particle dynamics	50
A.V. Gladun, P.A. Velmisov. On the Construction of Stabilizing Control for a Pipeline System	56
I.M. Gubaydullin, I.R. Yanglyayev, Yu.A. Poveshchenko, V.O. Podryga, O.S. Yazovtseva. On an algorithm for resolving spatial structures with internal non-matching boundaries	61
I.V. Guselnikova. Convergent difference schemes in the analysis of network-like hydrodynamic processes	64
D.S. Evtina, A.P. Zhabko. Stability of homogeneous differential-difference systems of neutral type	69
M.S. Eroshkina, V.M. Goloviznin, Yu.N. Deryugin. Application of the CABARE scheme for numerical simulation of two-dimensional thermal convection	74
R.V. Zhalnin, A.D. Mulyugin, V.V. Vdovin. Approximation of holder functions by its Fourier coefficients for a harmonically modulated argument	77

A.S. Zaitsev, K.A. Barkalov. Investigation of dimensionality reduction schemes for an algorithm for finding the zero value of a non-negative function	83
S.K. Zinina, N.I. Krasulin. Algorithmic complexity of checking isomorphism of graphs that are topological invariants of gradient-like diffeomorphisms on surfaces.	89
E.S. Kalabkin, T.F. Mamedova. On the Detection Limit of Bots Based on Time-stamps	92
P.A. Konchenko, I.M. Gubaydullin. Multiobjective Optimization of Technological Parameters of n-Hexadecane Hydroisomerization with Allowance for Diffusion Limitations in a Zeolite Catalyst Pellet	95
G.V. Kordiyak, M.F. Sadykov. Mathematical Modeling of the Interaction Process Between an Autonomous Robotic Complex and Frost Deposits on Power Transmission Lines	101
E.B. Kuznetsov, S.S. Leonov. Penetration of an aggressive medium into a tubular rod of annular cross section	105
E.B. Kuznetsov, S.S. Leonov. Physics Informed Neural Networks in Solving Coefficient Inverse Problems	109
N.D. Kuzmichev. Approximation of second and third order derivatives by Fourier coefficients	115
M.A. Kutiyenkova, A.D. Pozdnikova, I.M. Gubaydullin. Mathematical model of a catalytic reforming reactor unit taking into account the hydrodynamics of a fixed catalyst bed and the kinetics of chemical transformations	121
V.L. Litvinov, K.V. Litvinova. Neural network modeling of longitudinal oscillations of a rope with a moving boundary	126
V.V. Loginov, E.E. Peskova. A hybrid GPU algorithm for modeling axisymmetric reacting flows with stiff chemical kinetics	130
S.I. Martynov, L.Yu. Tkach. Model of a self-propelled system of rotating particles near a flat wall	136
E.A. Meshkova, A.O. Syromyasov. Modeling of Viscoplastic Fluid Filtration in the LOGOS Software Package	141
U.J. Mizher, M.J. Mezher, P.M. Abrashkin, P.A. Velmisov. Numerical simulation of biogas combustion in a chamber with central air injection	146
I.V. Mitryukhin, O.S. Yazovtseva, A.A. Usmanova. Numerical study of the oxidative regeneration process of a cylindrical catalyst bed	151
V.P. Mishchenko. Quarterly Forecasting Model with Clark's Investment Accelerator	154

N.D. Morozkin, D.M. Kolonskikh. Mathematical Modeling of Residual Magnetization Recovery in Drill Pipes Using Magnetic Gradiometer Data	159
N.D. Morozkin, N.N. Morozkin, M.F. Sadrislamov. Precise heating of an unlimited plate with constraints on thermal stresses	164
K.E. Morozov, K.V. Chizhov. On reversible perturbations of a system with a nonlinear center	169
M.S. Mustaikin, E.E. Peskova. On a Computational Algorithm for Modeling Subsonic Reacting Flows in Circular Pipes	169
V.I. Nikonov. Triangulation of linear systems	173
A.V. Panov, V.N. Orekhova. Numerical study of ethane pyrolysis in a cylindrical reactor under laser radiation	176
A.Yu. Perevaryukha. Hybrid models for the analysis of two types of delayed regulation of aleatoric biophysical processes	179
A.A. Podgornov, E.A. Kaledina. PINN implementation for the Taylor-Green vortex	184
M.A. Rybakov. Numerical modeling of wave processes on a graph	189
V.A. Ryazantsev, A.N. Tynda. Approximation of solution of two-dimensional Volterra integral equation with a loaded operator	193
A.S. Savinkov. Construction of a Regression Model of Return on Production Assets of an Oil-Producing Enterprise	196
S.F. Saifetdinov, T.F. Mamedova. Analysis and evaluation of mathematical models for medical data synthesis	200
A.N. Sakharov. $SO(n)$ -extensions of linear quasiperiodic systems	203
A.V. Sidorova, A.A. Shishlonov. Implementation of a parallel algorithm based on CUDA technology for the numerical study of subsonic chemically active media	208
A.K. Solovyeva. Numerical implementation of a cooperative game algorithm for constructing stable coalition structures based on a pairwise similarity matrix	212
Yu.A. Tamarova. Numerical study of the dynamics of an elastic element of a flow channel	217
Yu.A. Tamarova, P.A. Velmisov. Study of the bifurcation of a solution to a problem of aerohydroelasticity	222
V.A. Terentev. Numerical simulation of the mirror-shadow method for testing cylindrical	

products based on open-source software	228
I.F. Khisametdinov, A.L. Khashper, A.S. Urlukov, I.M. Gubaidullin. Development and Identification of a Kinetic Model for Low-Temperature Steam Conversion of Alkanes	232
D.I. Khokha. Unified Software for Estimating Dynamic Production Functions and Machine Learning Models	236
S.A. Chertishcheva, Yu.V. Sudenkov, A.Yu. Kuchmin. Discrete spectral analysis of acoustic pulses in optoacoustic investigations of polymers and composites	241
P.A. Shamanaev. On the study of forced oscillations in a non-uniform chain of linear oscillators with friction and a small parameter	244
T.S. Yurova, I.Yu. Popov. Asymptotics of resonant states for two-dimensional waveguides connected by converging apertures	246
D.D. Yufereva, A.B. Yakovlev. Study on the efficiency of capturing metallic components of space debris using a current-carrying coil	252
V.L. Leontiev. About global and local orthogonal splines	258

УДК 519.63

Применение дифференциальных уравнений в частных производных для оптимизации формирования избирательных округов

Абрашкин А.М.¹

Ульяновский Государственный Технический Университет¹

Аннотация: Статья посвящена анализу возможностей применения математического моделирования для выявления политически мотивированного формирования границ избирательных округов и их дальнейшей оптимизации. Задача формирования электоральных округов представлена как проблема разбиения взвешенного графа, используя методы решения дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП). В основе подхода лежит минимизация «энергии компактности», обеспечивающая оптимальную форму округов при соблюдении принципа равного представительства населения. Процедура вычисления градиентного потока реализована через алгоритм Мэрримана-Бенса-Ошера и аукционную динамику Берцекаса. Метод позволяет количественно оценивать существующие карты на предмет искусственных искажений, и генерировать альтернативные, географически обоснованные варианты разбиения региона на округа.

Ключевые слова: джерримендеринг, дифференциальные уравнения, частные производные.

1. Введение

Джерримендеринг – произвольная демаркация избирательных округов с целью искусственного изменения соотношения политических сил в них и, как следствие, в целом на территории проведения выборов [1].

Политически мотивированное манипулирование границами избирательных округов имеет место, когда границы округов прокладываются с целью выборочного ослабления избирательной силы групп меньшинств и политических оппонентов. Эта практика имеет долгую историю: первые записи о политически мотивированных границах округов датируются ещё до выборов в Первый Конгресс США в 1789 году [2].

В российской электоральной практике данная технология приобрела специфический характер, известный как «лепестковая нарезка» округов. При таком подходе к небольшому участку крупного областного центра искусственно присоединяется огромная по площади сельская территория, из-за чего округ может брать свое начало в черте города и уходить на сотни километров вглубь полей и деревень. Подобная геометрия обусловлена тем, что в крупных городах уровень протестного голосования традиционно выше, а поддержка действующих властей ниже. В то же время в сельской местности явка остается стабильно высокой, а электорат голосует более консервативно и лояльно.

Современное программное обеспечение и методы анализа данных позволили осуществлять манипуляции с избирательными округами с беспрецедентной эффективностью. Смешивая городские протестные районы с сельскими, организаторы выборов гарантированно растворяют голоса критически настроенных городских избирателей

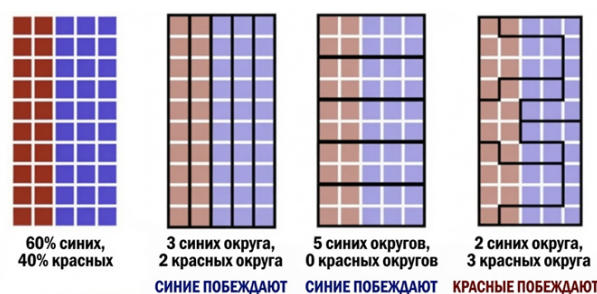


Рис. 1. Влияние конфигурации границ избирательных округов на электоральный результат

в общей массе лояльного сельского населения.

Отличительной чертой карты, подвергшейся политическому манипулированию, является совокупность странно начерченных границ округов, что служит либо для концентрации, либо для изоляции избирателей определённых политических взглядов (Рис.1). В результате многие метрики для количественной оценки «джерримендеринга» сосредоточены на выявлении неестественных форм и границ округов.

На сегодняшний день в литературе существует по меньшей мере тридцать различных способов оценки «компактности избирательных округов», многие из которых фокусируются на длине периметра и минимальной ограничивающей площади как ключевых показателях компактности округа [3]. Эти оценки доказали свою эффективность при выдвижении и обосновании правовых аргументов, касающихся манипуляций с избирательными округами, однако они оставляют желать лучшего [4].

В данной статье оптимизация границ избирательных округов рассматривается как задача разбиения графа. Этот подход позволит бороться с манипуляциями при определении границ округов, опираясь на методы из обширной математической литературы по разбиениям. Подходы, основанные на дифференциальных уравнениях в частных производных, используют очень простую идею: необходимо определить функцию энергии, которая учитывает характеристики оптимального разбиения, а затем вычислить градиентный поток этой энергии.

Градиентный поток следует по пути наибольшего спада энергии. Таким образом, по мере развития потока во времени характеристики разбиения улучшаются. В контексте манипуляций с формированием избирательных округов этот подход позволяет как оценивать существующие карты, так и генерировать новые.

Основой данного метода является геометрическое ДУЧП: движение по средней кривизне. Движение по средней кривизне, или поток кривизны, воздействует на множества, изменяя их границы.

Поток кривизны возникает как градиентный спуск для энергий, измеряющих длину границы. Таким образом, ДУЧП естественным образом сглаживает и сокращает границы между множествами. Для получения корректных карт избирательных округов необходимо гарантировать сохранение приблизительно равной численности населения в округах на протяжении всего итерационного процесса. Интерпретируя численность населения округа как ограничение по объёму для рассматриваемого множества, можно поддерживать равную численность населения с помощью потока кривизны, сохраняющего объём.

Сначала определяется задача о нарезке округов на основе структуры взвешенного графа. Узлами графа являются малые территориальные единицы, определенные местным органом переписи населения. Это позволяет разбивать регион на округа,

соблюдая при этом структуру местных сообществ. Затем определяется «энергия компактности», которая измеряет границы округов и накладывает штраф за пространственный разброс. В заключение вычисляется градиентный поток этой энергии с помощью аукционной динамики — алгоритма, для вычисления многофазных потоков кривизны с сохранением объема [5].

2. Определение системы округов

Задача моделируется на структуре взвешенного графа (V, W) . Вершины графа $x \in V$ представляют собой малые территориальные единицы, определенные местным органом переписи населения. Географический центр каждой единицы обозначается как c_x . Матрица весов W определяет степень связности между единицами, вычисляемую на основе расстояния $d_{x,y}$ между их центроидами. Для обеспечения разреженности матрицы связи ограничиваются k ближайшими соседями с использованием весов Зельника-Манора и Пероны:

$$W_{x,y} = \exp \left(-\frac{d_{x,y}^2}{\sigma_x \sigma_y} \right), \quad (1)$$

где σ_x представляет собой локальный масштабный коэффициент расстояния. Матрица весов нормализуется для обеспечения численной устойчивости.

Карта округов определяется как разбиение множества вершин на N непересекающихся районов $D_1, \dots, D_N$. Для соблюдения принципа «один человек — один голос» накладывается ограничение снизу P на численность населения каждого округа. Численность населения P_i определяется как сумма показателей p_x всех входящих в округ единиц. Разбиение описывается функцией $u : V \rightarrow R^N$, где:

$$u_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in D_i \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (2)$$

3. Энергия компактности

Данный метод использует функционал энергии, который количественно выражает «компактность» карты округов, объединяя длину границ и показатель пространственного разброса. Энергия $E_\alpha(u, c)$ задается выражением:

$$E_\alpha(u, c) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{x,y \in V} u_i(x) A(x, y) (1 - u_i(y)) + \alpha \sum_{i=1}^N \sum_{x \in V} u_i(x) \|c_i - c(x)\|^2. \quad (3)$$

Здесь $A = W^T W$ играет роль веса разреза графа, аппроксимируя длину границ, в то время как второе слагаемое штрафует за удаленность центроидов единиц c_x от центроида округа c_i . Параметр α является неотрицательным весовым коэффициентом.

4. Метод Мэрримана-Бенса-Ошера и аукционная динамика

Для вычисления градиентного потока данной энергии применяется алгоритм Мэрримана-Бенса-Ошера [6], используя метод «аукционной динамики». Этот подход

минимизирует линеаризацию функционала энергии при соблюдении ограничений по объему. Алгоритм итерируется следующим образом:

$$u^{n+1} = \arg \min_{u \in S_N} (\nabla E_\alpha(u^n, c), u - u^n). \quad (4)$$

Уравнение (4) представляет собой задачу комбинаторной оптимизации. Хотя целевая функция является линейной, множество допустимых разбиений, S_N , является невыпуклым множеством. Чтобы преодолеть эту трудность, можно вместо этого поставить задачу минимизации на выпуклой оболочке множества S_N . Такое ослабление преобразует уравнение (4) в задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned} u^{n+1} = \operatorname{argmin}_{u \geq 0} & \langle \nabla E_\alpha(u^n, c), u - u^n \rangle, \\ \text{s.t. } \sum_{i=1}^N u_i(x) &= 1, \sum_{x \in V} u_i(x) p_x \geq P. \end{aligned} \quad (5)$$

Решение находится с помощью аукционного алгоритма Берцекаса [7]. После обновления разбиения центроиды округов корректируются посредством минимизации квадратичной формы для дальнейшего снижения энергии.

5. Температура и данные

Для предотвращения попадания в локальные минимумы в алгоритм вводится «температура» – случайные возмущения, добавляемые в виде гауссовских случайных величин $\mathcal{N}(0, T)$ в градиент. В процессе вычислений значение температуры постепенно снижается (метод отжига) для обеспечения сходимости к состоянию с минимальной энергией.

Литература

1. Википедия. Джерримендеринг [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <https://ru.wikipedia.org/wiki/Джерримендеринг>. - Дата обращения: 09.07.2026.
2. Hunter T. R. The First Gerrymander?: Patrick Henry, James Madison, James Monroe, and Virginia's 1788 Congressional Districting [Электронный ресурс]. URL: https://www.researchgate.net/publication/236730512_The_First_Gerrymander_Patrick_Henry_James_Madison_James_Monroe_and_Virginia's_1788_Congressional_Districting. Дата обращения: 09.07.2026.
3. Википедия. Джерримендеринг [Электронный ресурс]. URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/Джерримендеринг>. Дата обращения: 09.07.2026.
4. Barnes R., Solomon J. Gerrymandering and Compactness: Implementation Flexibility and Abuse [Электронный ресурс]. URL: <https://arxiv.org/abs/1803.02857>. Дата обращения: 09.07.2026.
5. Jacobs M., Merkurjev E., Esedoglu S. Auction dynamics: A volume constrained MBO scheme [Электронный ресурс]. URL: https://www.math.purdue.edu/~jacob225/papers/auction_revised.pdf. Дата обращения: 09.07.2026.

6. Merriman B., Bence J. K., Osher S. J. Diffusion generated motion by mean curvature [Электронный ресурс]. URL: <https://ww3.math.ucla.edu/camreport/cam92-18.pdf>. Дата обращения: 09.07.2026.
7. Bertsekas D. A distributed algorithm for the assignment problem. Technical report, MIT [Электронный ресурс]. URL: https://web.mit.edu/dimitrib/www/Bertsekas_Auction_Distributed_1979.pdf. Дата обращения: 09.07.2026.

MSC 49Q10

Application of partial differential equations to the optimization of electoral district formation

A.M. Abrashkin¹

Ulyanovsk State Technical University¹

Abstract: The article is devoted to the analysis of the possibilities of using mathematical modeling to identify politically motivated formation of the boundaries of electoral districts and their further optimization. The problem of forming electoral districts is presented as a problem of partitioning a weighted graph using methods for solving partial differential equations (PDE). The approach is based on minimizing the “energy of compactness”, ensuring the optimal shape of the districts while respecting the principle of equal representation of the population. The procedure for calculating the gradient flow is implemented through the Merriman-Bence-Osher algorithm and Bertsekas auction dynamics. The method allows you to quantitatively evaluate existing maps for artificial distortions, and generate alternative, geographically based options for dividing the region into districts.

Keywords: Gerrymandering, differential equations, partial derivatives.

УДК 519.63

Моделирование процесса возникновения одномерной детонации методом сглаженных частиц

Банников Н.В.¹, Дерюгин Ю.Н.²

Филиал Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в
городе Сарове¹

Аннотация: Работа посвящена численному моделированию процесса возникновения и распространения одномерной детонационной волны с использованием бессеточного метода сглаженных частиц (SPH). В рамках исследования разработана SPH-аппроксимация уравнений газовой динамики, которая в дальнейшем будет дополнена моделью химической кинетики для описания энерговыделения в зоне реакции. Программная реализация выполнена на языке C++. Проведено тестирование модели на классической задаче о плоской детонационной волне, получены профили давления, плотности и скорости. Показано, что при оптимальном выборе сглаживающего ядра и его параметров предложенный подход качественно и количественно корректно воспроизводит структуру детонационного фронта, демонстрируя преимущества бессеточных методов при моделировании разрывных течений.

Ключевые слова: детонационная волна, ударная волна, sph, сглаживающее ядро, бессеточный метод.

Изучение процессов возникновения и распространения детонации относится к числу актуальных задач физики взрыва и горения. При математическом описании таких явлений необходимо учитывать наличие ударных волн, сильных разрывов параметров среды и химических реакций, сопровождающихся выделением энергии. Использование традиционных сеточных методов в подобных задачах может быть затруднено из-за больших градиентов физических величин, деформаций среды и необходимости корректного описания фронта волны. Поэтому перспективным подходом является метод сглаженных частиц, относящийся к бессеточным численным методам и позволяющий моделировать разрывные течения без построения фиксированной расчетной сетки.

Целью работы является построение и численная реализация одномерной модели процесса возникновения детонации на основе метода сглаженных частиц. Для достижения данной цели рассматривается SPH-аппроксимация уравнений газовой динамики, описывающих изменение плотности, скорости и давления в расчетной области. Кроме того, в модель в дальнейшем планируется включение описания химической кинетики, позволяющее учитывать энерговыделение в зоне реакции. Особое внимание уделяется выбору параметров сглаживания и структуры расчетной схемы, поскольку от них зависит устойчивость вычислений и корректность воспроизведения детонационного фронта.

В ходе работы была выполнена программная реализация одномерного SPH-кода на языке C++. Разработанная модель была протестирована на задаче расчета постоянного течения, задаче Soda, задаче Le Blanc, а также на задаче взаимодействия ударных волн (Blast Waves). В результате расчетов получены распределения основных газодинамических величин: давления, плотности и скорости. Их анализ позволил оценить особенности применения метода сглаженных частиц к моделированию

детонационных процессов. Показано, что качество численного решения существенно зависит от выбора сглаживающего ядра и параметров сглаживания. При корректной настройке расчетной модели метод SPH позволяет адекватно воспроизводить структуру детонационной волны и может быть использован для исследования процесса ее возникновения в одномерной постановке.

Литература

1. Забабахин Е.И. Некоторые вопросы газодинамики взрыва. Снежинск: РФЯЦ - ВНИИТФ, 1997.
2. Liu G.R., Liu M.B. Smoothed Particle Hydrodynamics: A Meshfree Particle Method. Singapore: World Scientific, 2003. 449 p.

MSC 76L05

Simulation of the occurrence of one-dimensional detonation using the smoothed particle method

N.V. Bannikov¹, Yu.N. Deryugin²

Branch of Lomonosov Moscow State University in Sarov¹

Abstract: The paper is devoted to numerical modeling of the process of occurrence and propagation of a one-dimensional detonation wave using the grid-free smoothed particle (SPH) method. As part of the study, an SPH approximation of the equations of gas dynamics was developed, which will be further supplemented by a model of chemical kinetics to describe the energy release in the reaction zone. The software implementation is implemented in C++. The model was tested on the classical problem of a plane detonation wave, and pressure, density, and velocity profiles were obtained. It is shown that with an optimal choice of the smoothing core and its parameters, the proposed approach reproduces the detonation front structure qualitatively and quantitatively correctly, demonstrating the advantages of mesh-free methods in modeling discontinuous flows.

Keywords: detonation wave, shock wave, sph, smoothing core, grid-free method.

УДК 519.63

Нестационарное математическое моделирование реактора гидроочистки прямогонного бензина*

Баязитова А.И.¹, Щепотьев Е.О.¹, Губайдуллин И.М.^{1,2}

ФГБОУ ВО «УГНТУ»¹, Институт нефтехимии и катализа УФИЦ РАН²

Аннотация: Предложена нестационарная многомасштабная математическая модель процесса гидроочистки прямогонного бензина в неподвижном слое катализатора. Модель объединяет химическую кинетику, диффузию и теплопроводность внутри пористой гранулы, конвективный и радиальный перенос в слое, тепловой баланс и изменение давления. Связь между масштабами задается условиями массо- и теплообмена на поверхности гранулы. Концентрации и температура рассматриваются как функции времени, продольной и радиальной координат реактора, а внутри гранулы вводится дополнительная пространственная координата. После пространственной дискретизации методом конечных объемов исходная система уравнений в частных производных сводится к большой жесткой системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Для интегрирования применяются неявные методы BDF и Radau IIA.

Ключевые слова: гидроочистка, нестационарная модель, неподвижный слой, пористая гранула, тепломассоперенос, метод линий, BDF, Radau.

1. Структура математической модели

Процесс в каталитическом реакторе протекает одновременно на нескольких пространственных масштабах. На уровне активных центров задаются скорости химических реакций. Внутри пористой гранулы реагенты диффундируют к активной поверхности, а образующиеся продукты движутся к внешней границе частицы. В слое катализатора смесь переносится вдоль реактора, перераспределяется по радиусу, нагревается за счет химических реакций и теряет давление. Поэтому отдельное рассмотрение только кинетики или только гидродинамики не позволяет описать взаимное влияние процессов [1].

Рассматривается цилиндрический реактор длиной L и радиусом R . Координата $z \in [0, L]$ направлена вдоль потока, $r \in [0, R]$ является радиальной координатой, t обозначает физическое время. Для описания процессов внутри гранулы вводится локальная координата $\xi \in [0, R_p]$, где R_p – эквивалентный радиус частицы. Таким образом, полная модель зависит от переменных (t, z, r, ξ) .

Для компонента i используются концентрация $C_i(t, z, r)$ и локальный молярный поток

$$J_i = u_z C_i. \quad (1)$$

Суммарная концентрация газовой смеси, полный молярный поток и скорость опре-

*Исследование выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания Института нефтехимии и катализа УФИЦ РАН FMRS-2025-0031 «Компьютерное моделирование химических и химико-технологических процессов: разработка и тестирование новых алгоритмов и программ».

деляются соотношениями

$$C_{\Sigma} = \frac{P}{RT}, \quad J_{\Sigma} = \sum_i J_i, \quad u_z = \frac{J_{\Sigma}}{C_{\Sigma}}. \quad (2)$$

Молярные доли находятся как $y_i = C_i/C_{\Sigma} = J_i/J_{\Sigma}$. Свойства смеси – молярная масса, плотность, теплоемкость, вязкость и теплопроводность – пересчитываются по локальным значениям T , P и y_i . Компонентный состав сырья задается набором репрезентативных веществ, достаточным для расчета состава и теплофизических свойств смеси.

2. Кинетика и процессы в грануле катализатора

Химические превращения описываются системой из N_r реакций. Собственная скорость реакции j задается выражением типа Лэнгмюра–Хиншельвуда:

$$r_j^{\text{int}} = k_j(T_p) \frac{\prod_i p_i^{\alpha_{ij}}}{\left(1 + \sum_m K_m p_m\right)^{n_j}}, \quad k_j(T_p) = k_{0,j} \exp\left(-\frac{E_j}{RT_p}\right). \quad (3)$$

Здесь p_i – парциальное давление компонента i ; α_{ij} – порядок реакции по этому компоненту; K_m – коэффициент адсорбции компонента m ; n_j – показатель торможения реакции; $k_{0,j}$ и E_j – предэкспоненциальный множитель и энергия активации. Такая форма учитывает влияние реагентов и торможение реакции веществами, адсорбирующимися на поверхности катализатора.

Внутри гранулы учитываются нестационарная диффузия и химические реакции. Для геометрии с параметром m материальный баланс имеет вид

$$\varepsilon_p \frac{\partial C_{i,p}}{\partial t} = \frac{1}{\xi^m} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^m D_{\text{eff},i} \frac{\partial C_{i,p}}{\partial \xi} \right) + \rho_{\text{cat}} \sum_{j=1}^{N_r} \nu_{ij} r_{j,p}, \quad (4)$$

где ε_p – пористость гранулы; $D_{\text{eff},i}$ – эффективный коэффициент диффузии; ρ_{cat} – плотность каталитического материала; ν_{ij} – стехиометрический коэффициент. Значения $m = 1$ и $m = 2$ соответствуют цилиндрической и сферической геометрии.

Изменение температуры внутри гранулы описывается уравнением

$$(\rho c_p)_p \frac{\partial T_p}{\partial t} = \frac{1}{\xi^m} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^m \lambda_{\text{eff},p} \frac{\partial T_p}{\partial \xi} \right) + \rho_{\text{cat}} \sum_{j=1}^{N_r} (-\Delta H_j) r_{j,p}. \quad (5)$$

В центре гранулы выполняются условия симметрии

$$\left. \frac{\partial C_{i,p}}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial T_p}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0. \quad (6)$$

На внешней поверхности связываются процессы внутри гранулы и в основном потоке:

$$-D_{\text{eff},i} \left. \frac{\partial C_{i,p}}{\partial \xi} \right|_{R_p} = k_{f,i} (C_i^s - C_i^b), \quad (7)$$

$$-\lambda_{\text{eff},p} \left. \frac{\partial T_p}{\partial \xi} \right|_{R_p} = h_{fs}(T_s - T_b). \quad (8)$$

Здесь индексы b и s относятся к основному потоку и поверхности гранулы; $k_{f,i}$ и h_{fs} – коэффициенты внешнего массо- и теплообмена.

Для связи с уравнениями слоя вычисляется средняя скорость реакции

$$\bar{r}_j = \frac{1}{V_p} \int_{V_p} r_{j,p} dV, \quad S_i = \rho_B \sum_{j=1}^{N_r} \nu_{ij} \bar{r}_j, \quad (9)$$

где S_i – источник или сток компонента в единице объема слоя, ρ_B – насыпная плотность катализатора. При необходимости результат решения внутри гранулы можно представить коэффициентом эффективности $\eta_j = \bar{r}_j / r_j(\mathbf{C}^s, T_s)$.

3. Нестационарные балансы в слое и гидродинамика

Материальный баланс компонента в осесимметричной постановке записывается как

$$\frac{\partial(\varepsilon_b C_i)}{\partial t} + \frac{\partial(u_z C_i)}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r D_{er,i} \frac{\partial C_i}{\partial r} \right) + S_i, \quad (10)$$

где ε_b – порозность слоя, $D_{er,i}$ – эффективный коэффициент радиального переноса. Члены уравнения описывают накопление вещества, конвективный перенос вдоль реактора, радиальное перераспределение и химические превращения.

Тепловой баланс слоя имеет вид

$$C_{\text{heat}} \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_g c_{p,g} u_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda_{er} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + Q_{rxn}, \quad (11)$$

где C_{heat} – объемная теплоемкость системы газ–катализатор, λ_{er} – эффективная радиальная теплопроводность. Тепловой источник определяется средними скоростями реакций:

$$Q_{rxn} = \rho_B \sum_{j=1}^{N_r} (-\Delta H_j) \bar{r}_j. \quad (12)$$

Падение давления рассчитывается в квазистационарном приближении по уравнению Эргуна [2]:

$$-\frac{\partial P}{\partial z} = 150 \frac{(1 - \varepsilon_b)^2 \mu u_z}{\varepsilon_b^3 d_p^2} + 1.75 \frac{(1 - \varepsilon_b) \rho_g u_z^2}{\varepsilon_b^3 d_p}. \quad (13)$$

Первый член учитывает вязкостное, второй – инерционное сопротивление слоя. Давление влияет на плотность, скорость, парциальные давления и, следовательно, на кинетику и перенос.

Коэффициенты внешнего переноса определяются через критерии

$$Re_p = \frac{\rho_g u_z d_p}{\mu}, \quad Pr = \frac{c_{p,g} \mu}{\lambda_g}, \quad Sc_i = \frac{\mu}{\rho_g D_i}, \quad (14)$$

и корреляции для неподвижного слоя [3]

$$Nu = 2 + 1.1 Re_p^{0.6} Pr^{1/3}, \quad Sh_i = 2 + 1.1 Re_p^{0.6} Sc_i^{1/3}. \quad (15)$$

Тогда $h_{fs} = Nu\lambda_g/d_p$, $k_{f,i} = Sh_i D_i/d_p$.

Для слоя задаются начальные распределения $C_i^0(z, r)$ и $T^0(z, r)$. На входе определяются состав, температура и давление потока. На оси реактора выполняются условия симметрии, а на стенке – отсутствие массового потока и условие теплообмена:

$$\left. \frac{\partial C_i}{\partial r} \right|_{r=0,R} = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad -\lambda_{er} \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = h_w(T - T_w). \quad (16)$$

4. Численное решение

Уравнения слоя дискретизируются по координатам z и r , а уравнения гранулы – по ξ . Для сохранения материального и теплового балансов используется метод конечных объемов. Конвективные потоки по продольной координате аппроксимируются направленной схемой, а диффузионные и теплопроводные члены – консервативными центральными разностями. После пространственной дискретизации методом линий получается система

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}), \quad (17)$$

где вектор $\mathbf{Y}$ содержит концентрации и температуры в узлах слоя и гранул. Давление и локальные свойства смеси пересчитываются на каждом шаге по времени.

Полученная система является жесткой. Причиной являются разные характерные времена химических реакций, диффузии внутри гранулы, переноса в слое и изменения температуры. Для интегрирования используются неявные методы BDF и Radau ПА [4]. В обоих методах на каждом шаге решается нелинейная система, для чего применяется метод Ньютона. Разреженная структура матрицы Якоби определяется локальностью пространственной аппроксимации и может использоваться для уменьшения вычислительных затрат.

Проверка вычислительного алгоритма включает уменьшение шагов по z , r и ξ , сравнение решений BDF и Radau, контроль неотрицательности концентраций, выполнение материального и теплового балансов и оценку невязок граничных условий. В стационарном режиме производные по времени должны стремиться к нулю, что позволяет дополнительно сравнить нестационарное решение со стационарной постановкой.

Построенная модель объединяет химическую кинетику, процессы в пористой грануле, перенос в слое и гидродинамику реактора в единой нестационарной системе. Такая постановка позволяет рассчитывать изменение состава, температуры и давления не только по координатам аппарата, но и во времени, а также учитывать взаимное влияние процессов, протекающих на разных масштабах.

Литература

1. Iordanidis A.A. Mathematical Modeling of Catalytic Fixed Bed Reactors: PhD thesis. University of Twente, 2002.
2. Ergun S. Fluid Flow through Packed Columns // Chemical Engineering Progress. 1952. Vol. 48. P. 89-94.
3. Wakao N., Kaguei S. Heat and Mass Transfer in Packed Beds. New York: Gordon and Breach, 1982. 364 p.

4. Hairer E., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems. Berlin: Springer, 1996.

MSC 65L05

Non-stationary mathematical modeling of a straight-run gasoline hydrotreating reactor

A.I. Bayazitova¹, E.O. Shchepot'ev¹, I.M. Gubaydullin^{1,2}

USPTU¹, Institute of Petrochemistry and Catalysis UFRC RAS²

Abstract: A non-stationary multiscale mathematical model of the hydrotreating process of straight-run gasoline in a stationary catalyst layer is proposed. The model combines chemical kinetics, diffusion and thermal conductivity inside a porous granule, convective and radial transport in a layer, thermal balance and pressure change. The relationship between the scales is determined by the conditions of mass and heat exchange on the surface of the pellet. Concentrations and temperature are considered as functions of time, longitudinal and radial coordinates of the reactor, and an additional spatial coordinate is introduced inside the pellet. After spatial discretization by the finite volume method, the initial system of partial differential equations is reduced to a large stiff system of ordinary differential equations. The implicit BDF and Radau IIA methods are used for integration.

Keywords: hydrotreating, non-stationary model, fixed layer, porous granule, heat and mass transfer, line method, BDF, Radau.

УДК 519.63

Методика расчёта двумерных нестационарных задач газовой динамики на деформируемой сетке с использованием схемы КАБАРЕ

Беляева А.А.¹, Головизнин В.М.², Дерюгин Ю.Н.¹

Филиал Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова в городе Сарове¹, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова²

Аннотация: Одной из актуальных задач вычислительной гидродинамики является моделирование газодинамических течений в областях, границы которых меняются в процессе решения. В таких задачах, как правило, использование схем повышенного порядка аппроксимации связано с определёнными трудностями. Одним из способов преодоления этих трудностей является применение схемы КАБАРЕ, обладающей к тому же хорошими дисперсионно-диссипативными свойствами, что обеспечивает точное и устойчивое решение систем гиперболических уравнений. В работе приводится описание разработанного алгоритма и его конкретной реализации, а также рассматривается применение метода КАБАРЕ для СЭЛ методов.

Ключевые слова: схема КАБАРЕ, деформируемая сетка, Fortran, OpenMP, двумерная постановка, газодинамика.

Одной из актуальных задач вычислительной гидродинамики является моделирование газодинамических течений в областях, границы которых меняются в процессе решения. В таких задачах, как правило, использование схем повышенного порядка аппроксимации связано с определёнными трудностями. Одним из способов преодоления этих трудностей является применение схемы КАБАРЕ [1,2]. В схеме КАБАРЕ вводятся два типа переменных: консервативные, которые определяются в центрах ячеек, и потоковые, которые определяются на гранях ячеек, и для их определения используются разные алгоритмы. Известно также, что этот метод разработан с учетом минимизации численной дисперсии и диссипации [3], что обеспечивает точное и устойчивое решение систем гиперболических уравнений, которые используются для моделирования газодинамических течений.

Предлагается алгоритм, позволяющий решать задачи газовой динамики как в плоской, так и в осесимметричной постановке. И в том и в другом случае расчётная область преобразуется к квадрату на каждом временном шаге для корректного применения численной схемы.

Расчёт состоит из следующих этапов:

1. Определение нового положения границ расчётной области.
2. Построение сетки на новом шаге по времени и определение метрических коэффициентов разностной сетки.
3. Вычисление значений консервативных элементов на промежуточном шаге по времени из аппроксимации исходных уравнений в виде законов сохранения.
4. Вычисление значений потоковых элементов на новом шаге по времени на основе характеристической формы уравнений относительно инвариантов, в соответствии с общей организацией схемы КАБАРЕ, значения инвариантов определяются с ис-

пользованием линейной экстраполяции и нелинейной коррекции согласно принципу максимума, примитивные параметры на границах ячейки определяются по значениям инвариантов в зависимости от характера течения.

5. На заключительном этапе определяются значения консервативных элементов на новом шаге по времени, вычисление этих значений проводится по дивергентной разностной схеме, потоки в этой схеме определяются по вычисленным потоковым переменным.

В работе приводится описание разработанного алгоритма и его конкретной реализации, а также рассматривается применение метода КАБАРЕ для СЭЛ методов. Программа выполнена на языке Фортран и позволяет производить как последовательные, так и параллельные с использованием OpenMP расчёты двумерных газодинамических задач. Методика проверена на ряде тестовых задач: Blast Wave (рис. 1) [4], задачи о распространении гауссова возмущения (рис. 2) и задачи о неустойчивости Кельвина-Гельмгольца (рис. 3).

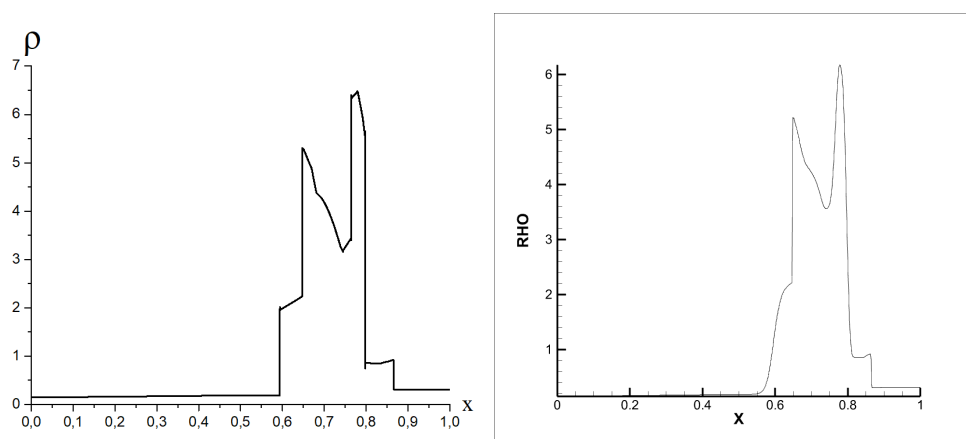


Рис. 1. Профили эталонного (слева) и рассчитанного по схеме КАБАРЕ (справа) решений задачи Blast Wave. Профиль плотности

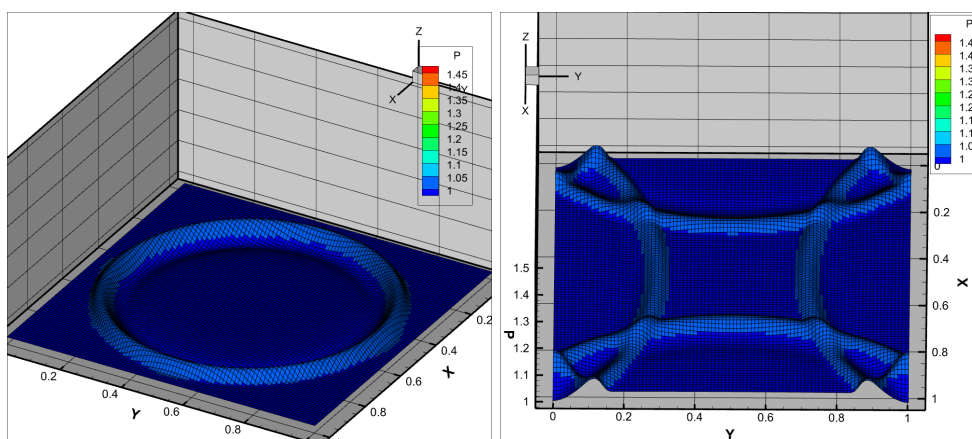


Рис. 2. Интерференция волновых фронтов после отражения возмущения от периодических границ

Обсуждаются вопросы дальнейшего развития методики.

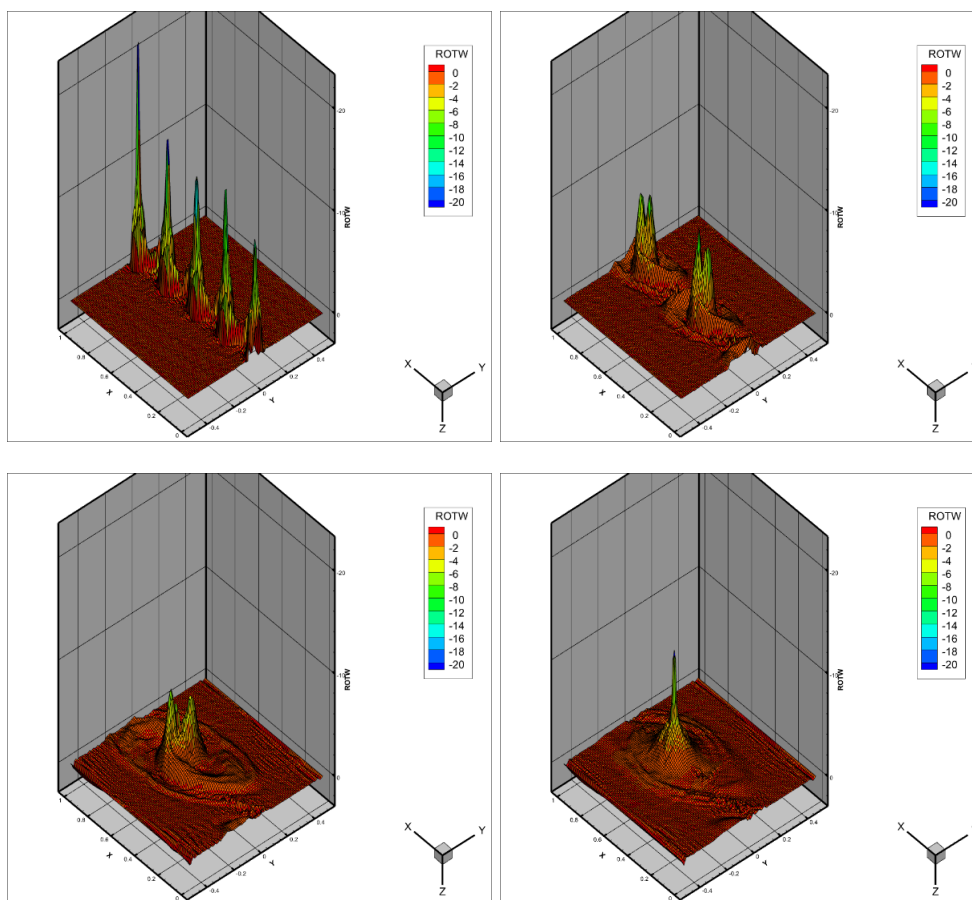


Рис. 3. Формирование, слияние и закручивание вокруг общего центра масс вихревых структур.
 Формирование единого устойчивого вихря

Список литературы

1. Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А., Короткин И.А. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. Москва: Издательство Московского университета, 2013. 472 с.
2. Головизнин В.М., Самарский А.А. Некоторые свойства разностной схемы «КАБАРЕ» // Математическое моделирование. 1998. Т. 10, № 1. URL: http://lim.cmc.msu.ru/assets/content/cabaret/1998_2_samarsky_goloviznin-nekotoryie-svoystva-raznostnoj-sxemyi-kabare.pdf. Дата обращения: 09.07.2026.
3. Головизнин В.М., Соловьев А.В. Дисперсионные и диссипативные характеристики разностных схем для уравнений в частных производных гиперболического типа. Москва: МаксПресс, 2018. 200 с.
4. Woodward P., Colella P. The Numerical Simulation of Two-Dimensional Fluid Flow with Strong Shocks // Journal of computational physics. 1984. Vol. 54. P. 115-173.

MSC 76M20

A method for calculating two-dimensional non-stationary problems of gas dynamics on a deformable grid using the CABARET scheme

Belyaeva A.A.¹, Goloviznin V.M.², Deryugin Yu.N.¹

Branch of Lomonosov Moscow State University in Sarov¹, Lomonosov Moscow State
University²

Abstract: One of the urgent tasks of computational fluid dynamics is the modeling of gas-dynamic flows in areas whose boundaries change during the solution process. In such problems, as a rule, the use of higher-order approximation schemes is associated with certain difficulties. One of the ways to overcome these difficulties is to use the CABARET scheme, which also has good dispersion-dissipative properties, which provides an accurate and stable solution to systems of hyperbolic equations. The paper describes the developed algorithm and its specific implementation, as well as considers the application of the CABARET method for SEL methods.

Keywords: CABARET scheme, deformable grid, Fortran, OpenMP, two-dimensional statement, gas dynamics.

УДК 004.032.26+519.62+517.951

Аналитико-нейросетевая модификация метода Хойна для построения модели процессов в химическом реакторе

Васильев А.Н.¹, Тархов Д.А.¹, Шемякина Т.А.¹

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого¹

Аннотация: В статье исследуются новые подходы к созданию адаптивных моделей, способных подстраиваться под обновляемые данные. Предлагаемый подход объединяет аналитическую модификацию классических численных методов с физически информированными нейронными сетями (PINN). При таком подходе строится иерархия приближённых решений в виде функций. Работа метода проиллюстрирована на примере модели процессов в химическом реакторе. В этой модели параметры задачи вводятся в набор входных переменных. Для построения приближённого параметрического решения применяется аналитическая модификация метода Хойна. Численные эксперименты при разных уровнях включения нейросетевого подхода показывают, что многослойные методы дают возможность строить более простые модели, не теряя точности, что упрощает их использование и адаптацию при поступлении новых данных.

Ключевые слова: неизотермический химический реактор, метод Хойна, нейронные сети, параметрическое решение.

1. Введение

Задачи нахождения приближённого решения дифференциальных уравнений решались успешно классическими численными методами [1]. Основная сложность применения этих методов к прикладным задачам состоит в том, что модель реального объекта, данная только в виде дифференциального уравнения, изначально неточна, и уточнение модели – её численного решения – с помощью использования измерений затруднено.

В процессе преодоления таких проблем появились методы приближённого решения дифференциальных уравнений с помощью физически информированных нейронных сетей (PINN) [2, 3]. Однако нейросетевое моделирование требует ресурсоёмкой процедуры обучения. В работе проведено объединение подхода PINN и подхода, основанного на аналитической модификации численных методов. В ней продолжается рассмотрение нового гибридного подхода в создании адаптивных моделей, способных подстраиваться под обновляемые данные.

Метод продемонстрирован на примере модели, описывающей процессы тепло- и массо-обмена в химическом реакторе [4]. Предлагаемый подход объединяет аналитическую модификацию [5, 6] выбранного численного метода (в частности, метода Хойна [1]) с физически информированными нейронными сетями.

2. Постановка задачи. Метод решения

Рассматривается стационарная задача о тепловом взрыве в плоскопараллельном случае в предположении, что реакция является одностадийной, необратимой, не сопровождается фазовыми переходами, протекает в неподвижной среде.

Математическая модель химического реактора при указанных допущениях приводится в виде нелинейного дифференциального уравнения второго порядка [4]:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \delta \exp(y) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad (1)$$

с краевыми условиями:

$$\frac{dy}{dx}(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad (2)$$

где δ – параметр задачи, $\delta \in [0.1, \delta_*]$, $\delta_* \approx 0,878458$.

Задача (1)-(2) сводится к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = z(x), \\ \frac{dz}{dx} = -\delta \exp(y(x)), \end{cases} \quad (3)$$

с краевыми условиями: $y'(0) = 0$, $y(1) = 0$, $z(0) = 0$.

Обычно для такой системы строят дискретное численное решение. В данной работе мы предлагаем альтернативный подход, направленный на построение приближённого решения в функциональной форме. Мы строим приближённое решение на переменном интервале: $D = [\min(x_0, x), \max(x_0, x)]$. Комбинированная схема обобщённого метода Хойна представима в следующем виде:

$$y_{k+1} = y_k + x((1-u)z_k + uz_{k+1}) = y_k + xz_k - \delta x^2 u \exp(y_k), \quad k = \overline{0, n},$$

где u – вспомогательный параметр, $z_{k+1} = z_k - \delta x \exp(y_k)$, $z_0 = 0$, $y_0 = u \delta \exp(y_0)$, $h_k = h_k(x)$, $y_k = y_k(x)$, $y_0(x) = y_0$, тогда приближённое решение представлено в виде $y(x) \approx y_n(x)$. Число n называется числом слоёв модели. Для $n = 1$ искомое приближённое решение запишется в виде $y(x) = (1 - x^2)y_0$.

Рассматриваем три уровня моделей.

Первый уровень моделей исследуется при $y_0 = \text{const}$. Параметр u метода Хойна находим на основе минимизации функционала ошибки задачи для уравнения химического реактора.

Второй уровень моделей исследуется при $y_0 = y_0(\delta)$, т.е. состоит в поиске параметра схемы в виде нейросетевой функции параметра задачи.

Третий уровень моделей исследуется при $y_0 = y_0(x, \delta)$. При этом параметр схемы ищется в виде нейросетевой функции двух переменных – параметра задачи и независимой переменной уравнения. Для этого уровня моделей параметр y_0 представлен в виде нейронной сети:

$$y_0(x, \delta) = \sum_{i=1}^m c_i v_i(x, \delta, \mathbf{a}_i) + c_0,$$

где v_i – базовые функции, c_i – обучаемые коэффициенты, $\mathbf{a}_i$ – дополнительные параметры. Для второго уровня моделей из последней формулы исключается переменная x .

Параметры нейронной сети определяются путем минимизации функционала ошибки, определённого на множестве точек выборки. Основные потери определяются по формуле:

$$J = \sum_{j=1}^m \left(\frac{d^2 y_k}{dx^2}(M_j) + \delta \exp(y_k(M_j)) \right)^2,$$

где $M_j = (x_j, \delta_j)$, $j = \overline{0, m}$, – случайно сгенерированные точки выборки в области параметров.

3. Вычислительные эксперименты

Расчеты проведены в области $x \in [0, 1]$, $\delta \in [0.1, \delta_*]$. Результаты исследований демонстрируют эффективность и гибкость предложенного аналитико-нейросетевого подхода для решения и моделирования задач с гетерогенными данными, среди которых могут быть и нелинейные дифференциальные уравнения. Рассмотренный в данной работе метод позволил получить простые формулы для приближённого решения задачи (1)-(2). Данные формулы существенно проще формул, полученных методами, используемыми в работах [2, 3, 5, 6].

4. Заключение

Рассмотренная модельная задача подтверждает вывод о том, что многослойные методы дают возможность строить более простые модели, не теряя в точности, что упрощает их использование и адаптацию при поступлении новых данных.

Литература

1. Вержбицкий В.М. Численные методы математической физики // Директ-Медиа. 2021. 210 с.
2. Васильев А.Н., Тархов Д.А., Шемякина Т.А. Гибридный метод построения параметрической нейросетевой модели катализатора // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2014. Т. 1, № 10. С. 476-484.
3. Васильев А.Н., Тархов Д.А., Шемякина Т.А. Моделирование процессов в химическом реакторе на основе нейронных сетей // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. Материалы VII Всероссийской научной молодежной школы-семинара имени Е.В. Воскресенского с международным участием. 2016. С. 22-23.
4. Худяев С.И. Пороговые явления в нелинейных уравнениях // ФИЗМАТЛИТ. 2003. 268 с.
5. Shemyakina T.A., Tarkhov D.A., Vasilyev A.N., Velichko Y. Comparison of two neural network approaches to modeling Processes in a Chemical Reactor // Thermal Science. 2019. Т. 23, № S2. С. S583-S589.
6. Tarkhov D., Lazovskaya T., Malykhina G. Constructing Physics-Informed Neural Networks with Architecture Based on Analytical Modification of Numerical Methods by Solving the Problem of Modelling Processes in a Chemical Reactor // Sensors. 2023. Vol. 23, No. 663. DOI: 10.3390/s23020663.

MSC 004.032.26+519.62+517.951

Analytical and neural network modification of Heun's method for constructing a model of processes in a chemical reactor

A.N. Vasilyev¹, D.A. Tarkhov¹, T.A. Shemyakina¹

Peter the Great Saint Petersburg Polytechnic University¹

Abstract: The article explores new approaches to creating adaptive models that can fit to updated data. The proposed approach combines an analytical modification of classical numerical methods with physics informed neural networks (PINN). This approach builds a hierarchy of approximate solutions in the form of functions. The operation of the method is illustrated by an example of a process model in a chemical reactor. In this model, the task parameters are entered into a set of input variables. An analytical modification of Heun's method is used to construct an approximate parametric solution. Numerical experiments at different levels of the neural network approach inclusion show that multilayer methods make it possible to build simpler models without losing accuracy, which simplifies their use and adaptation when new data is received.

Keywords: non-isothermal chemical reactor, Heun's method, neural networks, parametric solution.

УДК 519.63

Численное исследование истечения газа ксенона через сверхзвуковое сопло в вакуумную область

Веселов М.Р.¹, Дерюгин Ю.Н.¹

Филиал Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова в
городе Сарове¹

Аннотация: В статье представлен двумерный метод расчета вязких сжимаемых течений в плоских и осесимметричных областях. Метод основан на использовании неструктурированных сеток и неявных приближений уравнений Навье–Стокса. Разностные уравнения получены на основе метода контрольного объема в дельта-форме относительно приращения требуемого решения. Для повышения разрешающей способности схемы используется одномерная линейная реконструкция решения для определения параметров предрасположенности потока. Вязкие течения аппроксимируются центральными разностями. Система разностных уравнений решается с помощью алгебраического многосеточного решателя. Невязкие течения рассчитываются в соответствии с явной схемой. С использованием разработанной методики проведены численные исследования формирования стационарного потока ксенона в сопловом устройстве и истечения сверхзвуковой струи в область вакуума. Расчетные параметры струи показывают, что в потоке могут образовываться кластеры. Представлены результаты сравнения результатов расчета с экспериментальными данными.

Ключевые слова: математическое моделирование, численные методы, вакуумная область.

Постоянно возрастающий объем обрабатываемых данных требует создание процессоров со все более улучшенными характеристиками мощности и скорости вычислений. Во многих странах ведутся работы по разработке новых технологий и развитию новых направлений, которые используют новые физические принципы в производстве интегральных схем. Одним из таких направлений является разработка литографических установок, предназначенных для нанесения внутренних структур микросхем на кремниевые пластины с максимально высоким разрешением ($\sim 10^{-5}$ нм и менее). Для достижения такого разрешения требуется использовать световой источник в экстремально ультрафиолетовом (EUV) диапазоне длин волн. Наиболее перспективным источником EUV излучения является плазма, излучающая кванты с энергией, близкой к 100 эВ, которую можно получить за счет воздействия мощного короткого импульса лазерного излучения на плотную газовую струю ксенона. Один из важных путей практической реализации эффективного источника EUV-излучения является создание струи газа с заданными геометрическими и термодинамическими параметрами. Согласно проведенным оценкам, показано, что при интенсивности лазерного излучения порядка 100 ГВт/см² на длине волны 1 мкм и плотности струи ксенона до 0.01 г/см³, достигается уровень конверсии лазерного излучения в EUV до 3%, достаточных для задач литографии. Для практической реализации эффективного источника EUV-излучения необходимо создание установки, позволяющей формировать струю газа с заданными геометрическими и термодинамическими параметрами. В связи с этим актуальной задачей является разработка расчетной технологии для численного моделирования нестационарных и стационарных течений невязкого

и вязкого газа в каналах и соплах.

В данной работе представлена двумерная методика расчета вязких сжимаемых течений в плоских и осесимметричных областях [1]. Методика основана на использовании неструктурированных сеток, неявных аппроксимаций уравнений Навье–Стокса. Разностные уравнения получены на основе метода контрольного объема в так называемой дельта форме, относительно приращения искомого решения. Для повышения разрешающей способности схемы используется одномерная линейная реконструкция решения для определения предраспадных параметров потока. Вязкие потоки аппроксимируются центральными разностями. Система разностных уравнений решается с использованием алгебраического многосеточного решателя. Невязкие потоки рассчитываются по явной схеме.

С использованием построенной методики проведены численные исследования формирования стационарного потока ксенона в сопловом устройстве и истечения сверхзвуковой струи в вакуумную область. Расчетные параметры струи показывают, что в потоке могут образовываться кластеры. Приводятся результаты сопоставления результатов расчетов с данными эксперимента.

Литература

1. Веселов М.Р., Дерюгин Ю.Н. Параллельная методика расчета двумерных вязких сжимаемых течений на неструктурированной сетке. В печати.

MSC 76D05

Numerical investigation of the outflow of xenon gas through a supersonic nozzle into a vacuum region

M.R. Veselov¹, Yu.N. Deryugin¹

Branch of Lomonosov Moscow State University in Sarov¹

Abstract: This paper presents a two-dimensional method for calculating viscous compressible flows in flat and axisymmetric regions. The technique is based on the use of unstructured grids, implicit approximations of the Navie–Stokes equations. The difference equations are obtained based on the control volume method in the so-called delta form, relative to the increment of the desired solution. To increase the resolution of the circuit, a one-dimensional linear reconstruction of the solution is used to determine the predisposition parameters of the flow. Viscous flows are approximated by central differences. The system of difference equations is solved using an algebraic multigrid solver. Inviscid flows are calculated according to an explicit scheme. Numerical studies of the formation of a stationary xenon flow in a nozzle device and the outflow of a supersonic jet into a vacuum region have been carried out using the constructed methodology. The calculated parameters of the jet show that clusters can form in the flow. The results of comparing the calculation results with experimental data are presented.

Keywords: mathematical modeling, numerical methods, vacuum region.

УДК 533.21:536.23:517.95.

Исследование нелинейной динамики системы контроля за давлением

Выборнова Ю.В.¹, Киреев С.В.¹, Вельмисов П.А.¹

Ульяновский государственный технический университет¹

Аннотация: Рассматривается математическая модель механической системы, состоящей из трубопровода и датчика давления, предназначенного для контроля давления в камере сгорания двигателя. Математическая модель включает нелинейные уравнения газовой динамики, учитывающими изменение скорости, плотности, давления и температуры рабочей среды в трубопроводе. С помощью метода Галеркина построено приближенное решение начально-краевой задачи. Проведены численные эксперименты для различных законов изменения давления и температуры на входе в трубопровод. Получены зависимости от времени перемещения чувствительного элемента датчика и распределения температуры вдоль трубопровода. Исследовано влияние параметров газового потока на динамическое поведение измерительной системы.

Ключевые слова: датчик давления, чувствительный элемент, трубопровод, газовая динамика, нелинейные колебания, метод Галеркина, математическое моделирование.

1. Введение

Датчики давления, применяемые в аэрокосмической и энергетической отраслях для контроля параметров в камерах сгорания двигателей, функционируют в условиях интенсивных тепловых и динамических нагрузок, что предъявляет повышенные требования к их надёжности и точности. Математическое моделирование динамических процессов в системе «трубопровод – датчик давления» основано на системе нелинейных дифференциальных уравнений газовой динамики, описывающих изменение давления, плотности, температуры и скорости потока. Цель работы – построение математической модели на основе уравнений газовой динамики и исследование динамических характеристик системы при различных законах изменения давления и температуры на входе в трубопровод. Применяется метод Галеркина, позволяющий свести краевую задачу к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Проводится серия численных экспериментов для анализа отклика системы на различные виды возмущений.

2. Математическая модель

Математическая модель представляет собой систему четырёх уравнений газовой динамики:

$$\begin{cases} \rho(u_t + uu_x) = -P_x, \\ \rho_t + \rho u_x + u\rho_x = 0, \\ \rho c_v(T_t + uT_x) + Pu_x = kT_{xx} - \beta(T - T_0), \\ P = R\rho T. \end{cases} \quad (1)$$

где $u(x, t)$, $\rho(x, t)$, $P(x, t)$, $T(x, t)$ – скорость, плотность, давление, температура рабочей среды в трубопроводе соответственно, $x \in (0, l_*(t))$, c_v – удельная теплоемкость при постоянном объеме, $R = c_p - c_v$ – универсальная газовая постоянная, k – коэффициент теплопроводности, T_0 – температура окружающей среды. В данной работе коэффициент теплообмена принят равным нулю ($\beta = 0$).

Система уравнений дополняется граничными условиями, соответствующими физической постановке задачи:

$$\begin{cases} P(0, t) = P_0 + P_*(t), \\ u(l_*(t), t) = \dot{w}(t), \\ P(l_*(t), t) = L(w(t)) \equiv m\ddot{w}(t) + F(t, w, \dot{w}) \\ T(0, t) = T_*(t), \\ T_x(l_*(t), t) = 0, \\ \rho(0, t) = \frac{P_0 + P_*(t)}{RT_*(t)} \equiv \rho_*(t) \end{cases} \quad (2)$$

где $l_*(t) = l + w(t)$ – текущее положение поршня, $w(t)$ – его отклонение от положения равновесия, F – силы реакции и демпфирования системы внешних связей. В дальнейшем будем считать функцию F линейной: $F(t, w, \dot{w}) = \alpha\dot{w}(t) + \gamma w(t)$. Первое, четвертое и шестое условия задают законы изменения давления, температуры и плотности на выходе из камеры сгорания (на входе в трубопровод), второе условие – условие непротекания на поверхности поршня, пятое условие – условие теплоизоляции внешней поверхности поршня, третье условие – уравнение движения чувствительного элемента (поршня).

3. Приближенное решение системы методом Галеркина

Для построения приближенного решения системы (1)-(2) применяется метод Галеркина. Поскольку четвертое уравнение системы (1) является алгебраическим (уравнение состояния), для применения метода Галеркина и последующего решения задачи Коши его целесообразно продифференцировать по времени.

Искомые функции представляются в виде разложений по базисным функциям, удовлетворяющим граничным условиям (2). В частности, во втором приближении разложения имеют вид

$$\begin{cases} P = P_0 + P_*(t) + (L(w) - P_0 - P_*(t))\frac{x}{l_*} + P_1(t)x(l_* - x) + \dots, \\ T = T_*(t) + T_1(t)(x^2 - 2l_*x) + T_1(t)(x^3 - \frac{3}{2}l_*x^2) + \dots, \\ u = u_0(t) + (\dot{w}(t) - u_0(t))\frac{x}{l_*} + u_1(t)x(l_* - x) + \dots, \\ \rho = \rho_*(t) + \rho_1(t)x + \rho_2(t)x(l_* - x) + \dots \end{cases} \quad (3)$$

Согласно методу Галеркина, невязки, полученные после подстановки представлений (3) в систему уравнений (1), ортогонализуются на базисных функциях $x^n(l_* - x)$, $n \geq 1$. В первом приближении получается система из четырех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $w(t)$,

$u_0(t), T_1(t), \rho_1(t)$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6}l_*^2(L(w(t)) - P_0 - P_*(t)) - \frac{1}{30}l_*^3u_0^2(t)\rho_1(t) - \frac{1}{12}l_*^2u_0^2(t)\rho_*(t) + \frac{1}{30}l_*^3u_0(t)\rho_1(t)\dot{w}(t) + \frac{1}{12} \\ & l_*^2u_0(t)\rho_*(t)\dot{w}(t) + \frac{1}{30}l_*^4\dot{u}_0(t)\rho_1(t) + \frac{1}{12}l_*^3\dot{u}_0(t)\rho_*(t) + \frac{1}{20}l_*^4\rho_1(t)\ddot{w}(t) + \frac{1}{12}l_*^3\rho_*(t)\ddot{w}(t) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{1}{6}l_*^3\dot{\rho}_*(t) + \frac{1}{12}l_*^4\dot{\rho}_1(t) + \frac{1}{6}l_*^2\rho_*(t)(\dot{w}(t) - u_0(t)) + \frac{1}{6}l_*^3\rho_1(t)\dot{w}(t) = 0, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6}l_*^3c_v\rho_*(t)\dot{T}_*(t) + \frac{1}{12}l_*^4c_v\rho_1(t)\dot{T}_*(t) - \frac{7}{60}l_*^5c_v\rho_*(t)\dot{T}_1(t) - \frac{1}{15}l_*^6c_v\rho_1(t)\dot{T}_1(t) - \\ & - \frac{7}{30}l_*^4c_v\rho_*(t)T_1(t)\dot{w}(t) - \frac{2}{15}l_*^5c_v\rho_1(t)T_1(t)\dot{w}(t) + \frac{1}{12}l_*^2(L(w(t)) + P_0 + P_*(t))\dot{w}(t) - \\ & - \frac{1}{10}l_*^4c_v\rho_*(t)T_1(t)u_0(t) - \frac{1}{30}l_*^5c_v\rho_1(t)T_1(t)u_0(t) - \frac{1}{12}l_*^2(L(w(t)) + P_0 + P_*(t))u_0(t) + \\ & + \frac{1}{6}l_*^3\beta T_*(t) - \frac{7}{60}l_*^5\beta T_1(t) - \frac{1}{3}l_*^3kT_1(t) - \frac{1}{6}l_*^3\beta T_0 = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12}l_*^3(\dot{L}(w(t)) + \dot{P}_*(t)) - \frac{1}{12}l_*^2(L(w(t)) - P_0 - P_*(t))\dot{w}(t) - \frac{1}{6}Rl_*^3T_*(t)\dot{\rho}_*(t) + \\ & + \frac{7}{60}Rl_*^5T_1(t)\dot{\rho}_*(t) - \frac{1}{12}Rl_*^4T_*(t)\dot{\rho}_1(t) + \frac{1}{15}Rl_*^6T_1(t)\dot{\rho}_1(t) - \frac{1}{6}Rl_*^3\dot{T}_*(t)\rho_*(t) - \\ & - \frac{1}{12}Rl_*^4\dot{T}_*(t)\rho_1(t) + \frac{7}{60}Rl_*^5\dot{T}_1(t)\rho_*(t) + \frac{1}{15}Rl_*^6\dot{T}_1(t)\rho_1(t) + \frac{1}{6}Rl_*^4T_1(t)\rho_*(t)\dot{w}(t) + \\ & + \frac{1}{10}Rl_*^5T_1(t)\rho_1(t)\dot{w}(t) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

4. Численный эксперимент

Для проведения расчета были заданы следующие параметры в системе СИ: $l = 3, m = 0.01, P_0 = 101325, \gamma = 10^8, \alpha = 10^8, k = 0.022, c_v = 717.8, R = 8.31$. Начальные условия: $T_1(0) = 0, w(0) = 0, \dot{w}(0) = 0, \ddot{w}(0) = 0, u_0(0) = 0, \rho_1(0) = 0$.

На рис. 1, 2 в качестве примеров представлены графики перемещения поршня $w(t)$ и температуры на поршне $T(l_*(t), t)$ при различных законах изменения давления и температуры на входе в трубопровод.

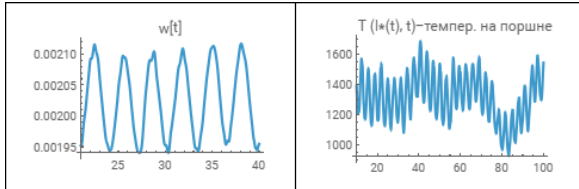


Рис. 1. $P_*(t) = P_0(1 + 0.2 \cos(2t))$,
 $T_*(t) = 1293.15$

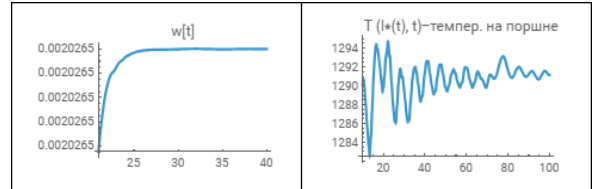


Рис. 2. $P_*(t) = P_0$,
 $T_*(t) = 1293.15 + 20e^{-0.05t} \sin(t)$

Результаты численных экспериментов подтверждают адекватность модели и её применимость для анализа динамических процессов в измерительной системе.

Литература

1. Выборнова Ю.В., Вельмисов П.А. Математическое моделирование динамики механической системы «трубопровод – датчик давления» // Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании: сборник материалов XVII Международной научной конференции. Саранск, 29-31 июля 2025 г. С. 63-68.
2. Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А. Математическое моделирование динамических процессов в системах измерения давления в газожидкостных средах // Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения - XXXV. Материалы Международной Воронежской весенней математической школы. Воронеж, 26-30 апреля 2024 г. С. 81-83.
3. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. Москва: Мир, 1988. 352 с.

MSC 49K20,76N15,80A20.

Research on the nonlinear dynamics of the pressure control system

Yu.V. Vybornova¹, S.V. Kireev¹, P.A. Velmisov¹

Ulyanovsk State Technical University¹

Abstract: A mathematical model of a mechanical system consisting of a pipeline and a pressure sensor designed to control the pressure in the engine combustion chamber is considered. The mathematical model includes nonlinear equations of gas dynamics that take into account changes in the velocity, density, pressure, and temperature of the working medium in the pipeline. An approximate solution of the initial-boundary value problem is constructed using the Galerkin method. Numerical experiments are conducted for various laws of pressure and temperature changes at the inlet of the pipeline. The time dependencies of the movement of the sensor's sensitive element and the temperature distribution along the pipeline are obtained. The influence of gas flow parameters on the dynamic behavior of the measurement system has been studied.

Keywords: pressure sensor, sensitive element, pipeline, gas dynamics, nonlinear oscillations, Galerkin method, mathematical modeling.

УДК 519.63

Численное моделирование удара алюминиевых пластин с использованием схемы КАБАРЕ

Гайворонская Ю.Е.¹, Дерюгин Ю.Н.¹, Головизнин В.М.¹

Филиал Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в
городе Сарове¹

Аннотация: В работе рассматривается численное моделирование удара алюминиевой пластины о неподвижную алюминиевую пластину. Расчёт выполняется для одномерной упруго-пластической модели в лагранжевых координатах. Основными параметрами являются скорость, давление, удельный объём, внутренняя энергия и компоненты девиатора напряжений. Для решения используется схема КАБАРЕ. Она применяется для расчёта распространения ударной волны, её отражения от границ и изменения напряжённого состояния материала. По результатам моделирования анализируются распределения давления, скорости и напряжений в различные моменты времени.

Ключевые слова: схема КАБАРЕ, удар алюминиевых пластин, численное моделирование, упруго-пластичность, ударная волна.

1. Численное моделирование удара алюминиевых пластин с использованием схемы КАБАРЕ

В работе рассматривается численное моделирование одномерного ударного взаимодействия двух алюминиевых пластин. Задача относится к классу нестационарных задач динамики упруго-пластических сред, в которых существенную роль играют распространение ударных волн, отражение волн от границ и изменение напряжённо-деформированного состояния материала. В качестве численного метода используется схема КАБАРЕ, ориентированная на расчёт гиперболических систем уравнений и обладающая компактным вычислительным шаблоном.

Рассматривается постановка задачи, в которой левая алюминиевая пластина движется с заданной начальной скоростью и ударяет по неподвижной алюминиевой пластине. После контакта в зоне взаимодействия возникает область повышенного давления, от которой в обе стороны распространяются волны сжатия. В дальнейшем волновая картина усложняется за счёт отражения волн от свободных поверхностей, изменения скорости материала и формирования областей пластического деформирования.

Расчёт проводится в лагранжевых координатах. Такой выбор координатной системы позволяет описывать движение среды вместе с расчётной сеткой и удобно отслеживать изменение параметров материала во времени. В качестве основных неизвестных используются удельный объём $V = 1/\rho$, скорость u , давление P , внутренняя энергия e и компоненты девиатора напряжений. Для одномерной постановки ключевое значение имеет продольная компонента девиатора напряжений τ_x , входящая в выражение для полного нормального напряжения.

2. Математическая модель

Математическая модель основана на одномерных уравнениях динамики упруго-пластической среды в лагранжевой массовой координате m . Система уравнений может быть записана в виде

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial m} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (P - \tau_x)}{\partial m} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + (P - \tau_x) \frac{\partial u}{\partial m} = 0. \quad (3)$$

Первое уравнение описывает изменение удельного объёма, второе задаёт баланс импульса, третье определяет изменение внутренней энергии за счёт работы напряжений. Величина $P - \tau_x$ соответствует продольному напряжению, определяющему динамику материала в направлении распространения волны.

Для учёта упругой части деформирования используется уравнение эволюции девиатора напряжений

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial t} = \frac{4\mu}{3V} \frac{\partial u}{\partial m}, \quad (4)$$

где μ — модуль сдвига.

При достижении предела текучести напряжения ограничиваются условием пластичности. В одномерном случае при

$$\tau_y = \tau_z = -\frac{1}{2}\tau_x \quad (5)$$

может использоваться условие

$$\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2 \leq \frac{2}{3}Y_0^2, \quad (6)$$

где Y_0 — предел текучести материала. Это позволяет учитывать переход материала из упругого состояния в пластическое при достаточно больших значениях девиаторных напряжений.

Для замыкания системы используется уравнение состояния материала, связывающее давление с удельным объёмом и внутренней энергией:

$$P = P(V, e). \quad (7)$$

Таким образом, математическая модель учитывает изменение плотности, скорости, давления, внутренней энергии и напряжённого состояния материала при ударном нагружении.

3. Схема КАБАРЕ

Численное решение строится на основе схемы КАБАРЕ. Данная схема использует раздельное представление консервативных и потоковых переменных. Консервативные величины располагаются в центрах расчётных ячеек, а потоковые переменные — на их границах. Такое расположение переменных позволяет эффективно рассчитывать перенос возмущений и распространение волн в гиперболических системах уравнений.

Алгоритм схемы КАБАРЕ имеет структуру «предиктор — экстраполяция — коррекция — корректор». На этапе предиктора по значениям переменных на текущем временном слое вычисляются промежуточные значения консервативных переменных. Затем выполняется экстраполяция потоковых переменных на новый временной слой. После этого применяется нелинейная коррекция, ограничивающая появление нефизических осцилляций вблизи разрывов и резких градиентов. На заключительном этапе корректора вычисляются значения консервативных переменных на новом временном слое.

Схематично переход между временными слоями можно представить следующим образом:

$$(U^n, u^n) \rightarrow U^{n+1/2} \rightarrow \tilde{u}^{n+1} \rightarrow u^{n+1} \rightarrow U^{n+1}. \quad (8)$$

Здесь U обозначает консервативные переменные, u — потоковые переменные, а $\tilde{u}^{n+1}$ — предварительно экстраполированные значения потоковых переменных. Нелинейная коррекция потоковых величин особенно важна для задач ударного взаимодействия, поскольку в них присутствуют резкие перепады давления, скорости и напряжений.

Для модельного закона сохранения

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = Q \quad (9)$$

этапы предиктора и корректора могут быть записаны в разностной форме:

$$\frac{U_{i+1/2}^{n+1/2} - U_{i+1/2}^n}{\Delta t/2} + \frac{F_{i+1}^n - F_i^n}{\Delta x} = Q_{i+1/2}^n, \quad (10)$$

$$\frac{U_{i+1/2}^{n+1} - U_{i+1/2}^{n+1/2}}{\Delta t/2} + \frac{F_{i+1}^{n+1} - F_i^{n+1}}{\Delta x} = Q_{i+1/2}^{n+1}. \quad (11)$$

Экстраполяция потоковых переменных на новый временной слой может быть представлена в виде

$$\tilde{u}_i^{n+1} = 2U_i^{n+1/2} - u_i^n. \quad (12)$$

После экстраполяции выполняется коррекция, которая ограничивает значение потоковой переменной с учётом соседних значений. Это снижает вероятность возникновения неустойчивых колебаний около фронта ударной волны и позволяет сохранить более чёткую структуру решения.

4. Численное моделирование ударного взаимодействия

В рассматриваемой задаче начальные условия задаются следующим образом: левая пластина имеет ненулевую скорость, правая пластина находится в состоянии покоя. До момента контакта давление и напряжения соответствуют начальному невозмущённому состоянию материала. После столкновения в зоне контакта формируется скачок давления. Волна сжатия распространяется в движущуюся пластину в направлении её свободной границы, а также в неподвижную пластину вглубь материала.

При достижении свободных поверхностей возникают отражённые волны разгрузки. Их взаимодействие с первоначальными волнами сжатия приводит к изменению распределения скорости и напряжений. При достаточно больших напряжениях в материале возникают области пластического деформирования. Поэтому анализ задачи требует рассмотрения не только давления и скорости, но и девиаторных напряжений.

В ходе численного расчёта анализируются распределения давления, скорости, удельного объёма, внутренней энергии и компонент напряжений в различные моменты времени. Давление позволяет определить положение фронта ударной волны и интенсивность сжатия. Распределение скорости показывает изменение движения материала после столкновения пластин. Удельный объём используется для анализа изменения плотности: уменьшение V соответствует сжатию, увеличение V — разгрузке. Девиаторные напряжения позволяют выделить области упругого и пластического поведения материала.

Основное внимание уделяется следующим стадиям процесса:

1. начальное столкновение пластин;
2. формирование области сжатия в зоне контакта;
3. распространение ударных волн по материалу;
4. отражение волн от свободных границ;
5. изменение напряжённого состояния;
6. возникновение зон пластического деформирования.

Использование схемы КАБАРЕ позволяет получить устойчивое численное решение с достаточно чётким описанием волновых фронтов. Компактность шаблона схемы упрощает построение вычислительного алгоритма, а нелинейная коррекция потоковых переменных уменьшает численное размазывание решения и подавляет нефизические осцилляции около разрывов. Это делает схему применимой для расчёта одномерных задач ударного взаимодействия упруго-пластических тел.

5. Заключение

Таким образом, в работе рассматривается одномерная расчётная модель удара алюминиевых пластин и её численная реализация на основе схемы КАБАРЕ. Полученные распределения физических величин позволяют проследить формирование ударной волны, её распространение и отражение, а также изменение напряжённо-деформированного состояния материала. Рассмотренная постановка может использоваться как базовая модель для дальнейшего исследования более сложных задач динамики деформируемых твёрдых тел, включая задачи с различными материалами, более сложными законами пластичности и многомерной геометрией.

Литература

1. Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. Москва: Изд-во МГУ, 2013. 192 с.
2. Wilkins M.L. Calculation of elastic-plastic flow // Methods in Computational Physics. 1964. Vol. 3. P. 211-263.
3. Головизнин В.М., Самарский А.А. Некоторые свойства разностной схемы «Кабаре» // Математическое моделирование. 1998. Т. 10, № 1. С. 101-116.

MSC 76L05

Numerical simulation of the impact of aluminum plates using the CABARET scheme

Yu.E. Gayvoronskaya¹, Yu.N. Deryugin¹, V.M. Goloviznin¹

Branch of Lomonosov Moscow State University in Sarov¹

Abstract: The paper considers numerical simulation of the impact of an aluminum plate on a fixed aluminum plate. The calculation is performed for a one-dimensional elastic-plastic model in Lagrangian coordinates. The main parameters are velocity, pressure, specific volume, internal energy, and stress deviator components. The CABARET scheme is used for the solution. It is used to calculate the propagation of a shock wave, its reflection from the boundaries and changes in the stress state of the material. Based on the simulation results, the distributions of pressure, velocity, and stress at various points in time are analyzed.

Keywords: CABARET scheme, impact of aluminum plates, numerical modeling, elasto-plasticity, shock wave.

УДК 519.63

Разработка программного обеспечения для моделирования динамики заряженных частиц*

Гарипова А.В.¹, Гарипов Д.Г.¹, Гудаев Ш.Д.¹, Наумова Д.Н.¹, Плужян К.Г.¹
ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ»¹

Аннотация: В ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ» разработано программное обеспечение (ПО) для трехмерного численного самосогласованного моделирования динамики сильноточного электронного пучка и распространения электромагнитных волн. Созданное ПО внедряется для расчетно-теоретического сопровождения разработки новых и модернизации уже имеющихся узлов сильноточной ускорительной техники. ПО позволяет моделировать электронные пучки с плотностью тока порядка единиц МА/м², а также протяженные структуры длиной порядка десяти метров. ПО состоит из модулей для подготовки исходных данных, проведения расчетов и обработки результатов расчета. Каждый модуль представляет собой подпрограмму, реализующую физическую модель или средство обработки данных. В работе представлены архитектура ПО и описаны наборы функциональных возможностей модулей. Приведены результаты тестирования функциональных модулей на примере моделирования выходного резонатора клистрона и моделирования транспортировки сильноточного пучка электронов в вакуумной области.

Ключевые слова: программное обеспечение, трехмерное численное самосогласованное моделирование, динамика сильноточного электронного пучка, метод конечных разностей во временной области, метод «частиц-в-ячейках».

Введение

На всех этапах работ по модернизации и проектированию узлов и систем ускорителей являются актуальными задачи моделирования процессов формирования и ускорения заряженных частиц (ЗЧ), их взаимодействия с элементами конструкции, собственными и внешними электромагнитными полями. В рамках научной программы НЦФМ ведется разработка программного обеспечения для трехмерного численного самосогласованного моделирования процессов формирования и ускорения сильноточных пучков электронов.

1. Функционал ПО и его архитектура

Программное обеспечение (ПО) предназначено для моделирования формирования и распространения электромагнитных волн, а также инжекции, ускорения, транспортировки и фокусировки сильноточного электронного пучка. На рис. 1 представлена принципиальная функциональная схема ПО (каждый блок является отдельным программным модулем).

*Работа выполнена в рамках научной программы национального центра физики и математики НЦФМ по направлению №6 «Ядерная и радиационная физика».

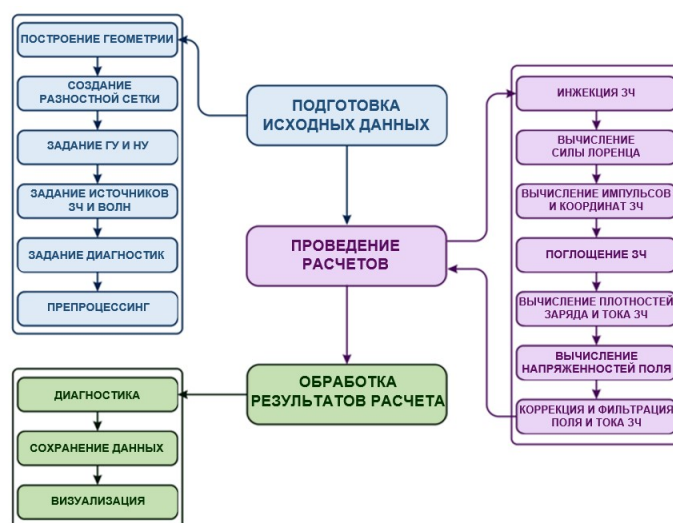


Рис. 1. Принципиальная функциональная схема ПО.

2. Подготовка исходных данных

Геометрия расчетной области задается в системе автоматизированного проектирования (САПР).

Заданная геометрия аппроксимируется структурированной конечно разностной сеткой, которая представляет собой объемные ячейки в форме параллелепипедов. Каждая ячейка описывается электрофизическими параметрами (ϵ , μ , σ) того объекта, к которому она относится. В разработанном модуле построения конечно-разностной сетки в качестве входных данных принимаются файлы с неструктурированной конечно-элементной сеткой. С помощью разработанного алгоритма геометрия расчетной области аппроксимируется конечно-разностной сеткой (рис. 2а). Формируется файл с расширением *.msh, который содержит информацию о количестве, порядковых номерах и координатах узлов сетки, о количестве элементов сетки, из каких узлов элементы состоят и к каким объектам данные элементы относятся. Пример неравномерной конечно разностной сетки для модели диода ускорителя представлен на рис. 2б.

Разработанный алгоритм деления расчетной области на ячейки и требования к нему подробно описаны в работе [1].

После построения геометрии модели и создания расчетной сетки, необходимо задать начальные и граничные условия (НУ и ГУ) распределения напряженностей электромагнитного поля. В ПО реализованы следующие типы ГУ: идеальный проводник (электрическая стенка); идеальный магнетик (условие полного отражения); абсорбционное граничное условие; условие излучения.

Затем необходимо определить источники электромагнитных волн и ЗЧ. Для реализации источника волн использована модель волнового порта. Возбуждение системы осуществляется электрическим полем, заданным в одной из граничных плоскостей расчетной области.

В качестве моделируемого источника ЗЧ использована модель инъекции с плоскости. Данная модель обеспечивает ввод в расчетную область пучков ЗЧ трех наиболее распространенных форм: цилиндрической, трубчатой, ленточной. Реализовано две модели временного распределения ЗЧ: модель импульсной инъекции и модель

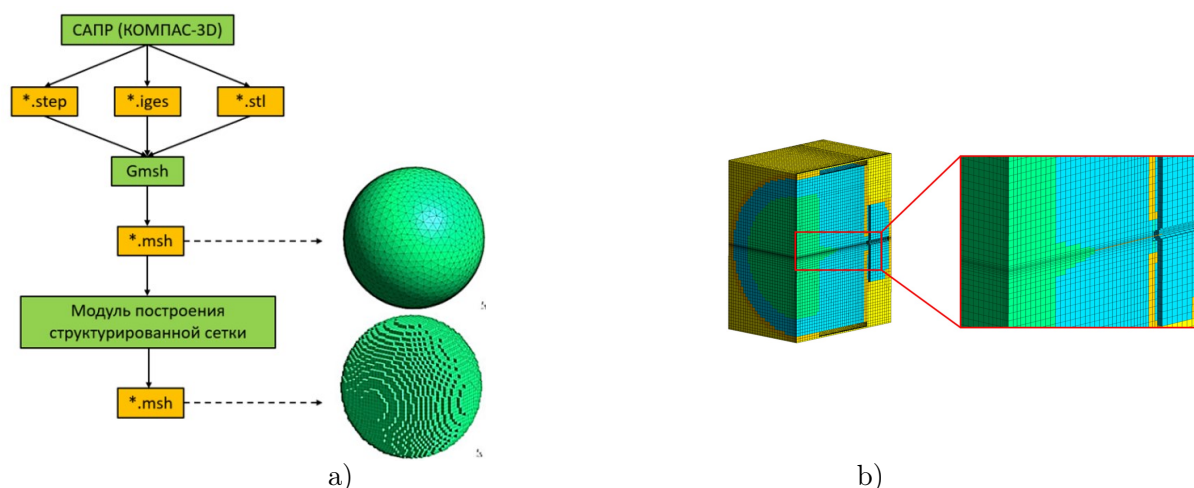


Рис. 2. Построение конечно-разностной сетки: а) блок-схема создания структурированной сетки; б) неравномерная сетка для модели диода ускорителя

заданного постоянного тока.

Для представления результатов расчета разработан модуль определения диагностик. К диагностикам, реализованным в ПО, относятся такие средства обработки данных, как монитор тока, объемный монитор поля, монитор мощности, баланс энергии и характеристики частиц.

В конце этапа подготовки данных пользователь получает полное описание условий задачи в цифровом представлении.

3. Проведение расчетов

Решение задачи динамики ЗЧ проводится в рамках метода «частиц в ячейках» и предполагает реализацию на каждом временном шаге следующего вычислительного цикла: инжекция ЗЧ → вычисление силы Лоренца → вычисление импульсов и координат ЗЧ → поглощение ЗЧ → вычисление плотностей заряда и тока ЗЧ → вычисление напряженностей поля → коррекция и фильтрация поля и тока ЗЧ.

Частицы вводятся в расчетную область с заданным пространственно временным распределением: на каждом временном шаге в расчетную область инжектируется сгусток новых частиц, каждая из которых обладает долей суммарного заряда, определяемой коэффициентом укрупнения.

Для вычисления напряженностей электромагнитного поля реализовано численное решение уравнений Максвелла с указанными НУ и ГУ методом КРВО [2].

Для вычисления силы Лоренца реализована численная схема интерполяции точных полей на положение частицы, для вычисления плотностей заряда и тока – интерполяции заряда в узлы сетки. В качестве схемы интерполяции выбрана схема первого порядка точности «облако в ячейке» [3].

Вычисление импульсов и координат частиц реализовано с помощью численного решения уравнения движения методом Бориса. Модуль реализован в многопоточном режиме вычислений с использованием стандарта OpenMP.

4. Обработка результатов расчета

На этапе обработки результатов расчета проводится диагностика расчетной области – полученные данные сохраняются в файлы стандартных форматов (*.txt, *.vtk, *.xlsx и т.д.), визуализация осуществляется с помощью сторонних приложений. Данный подход позволяет проводить мультифизическое моделирование сложных задач с использованием сторонних ПО.

5. Тестирование ПО

Тестирование выполнено на примере моделирования распространения сильно-точного пучка электронов (рис. 3а). Расчетная модель представляет собой цилиндрическую вакуумную область (1), окруженную идеальным проводником (2). Моделирование транспортировки пучка с амплитудой тока, превышающей предельную, показало, что в процессе транспортировки образуется виртуальный катод и часть пучка вылетает из расчетной области в обратном направлении. Амплитуда тока пучка, долетевшего до выходного сечения (данные с монитора тока CM1), соответствует аналитической оценке, приведенной в [4].

Проведен расчет выходного резонатора клистрона (рис. 3б), в котором появляется высокочастотное электрическое поле, взаимодействующее с потоком электронов. Расчетная область представляет собой резонатор (1) и ускорительный тракт (2), окруженные идеальным проводником.

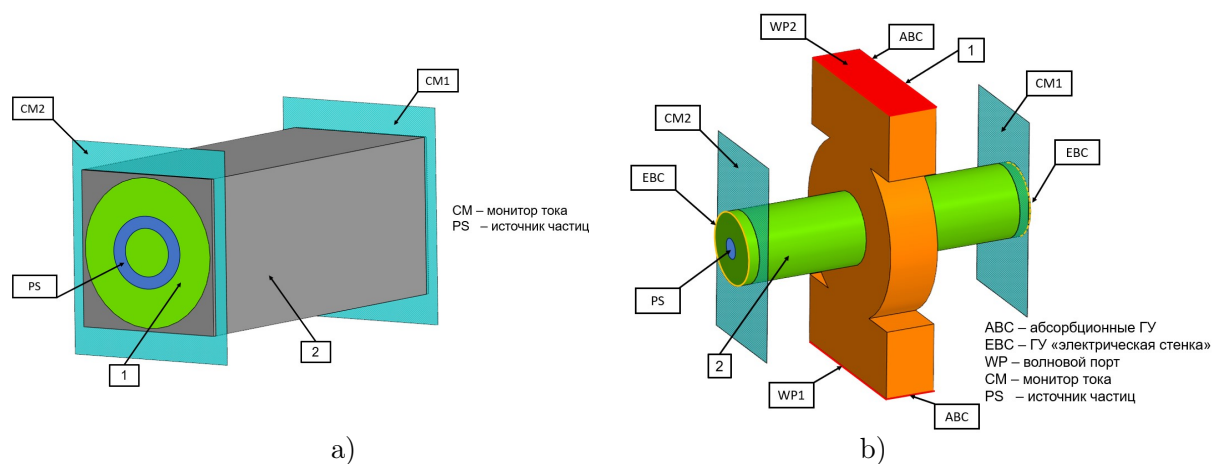


Рис. 3. Расчетная модель: а) цилиндрической вакуумной области, окруженной идеальным проводником; б) резонатора клистрона

На рис. 4а приведена визуализация движения сгустка ЗЧ, на рис. 4б – распределения z -компоненты электрического поля в ускорительном тракте.

В результате моделирования резонатора клистрона показано, что движение заряженных частиц индуцирует собственное электромагнитное поле, которое влияет на движение частиц, ускоряя или замедляя их.

Заключение

Разработано ПО для трехмерного численного моделирования формирования и распространения электромагнитных волн, а также инжекции, ускорения, транспортировки и фокусировки сильно-точного электронного пучка в самосогласованном при-

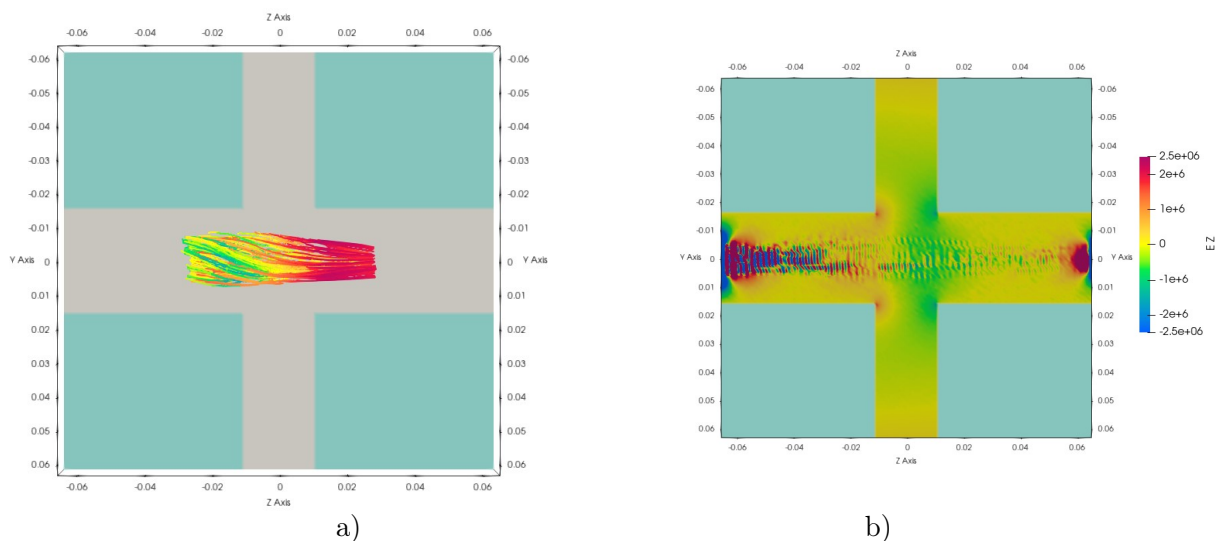


Рис. 4. Визуализация: а) движения сгустка ЗЧ; б) распределения z -компоненты напряженности электрического поля

ближении. ПО протестировано на основе задач, имеющих аналитическое решение. Получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Моделирование динамики заряженных частиц» № 2025688841 от 22.10.2025.

Литература

1. Гарипова А.В., Гарипов Д.Г., Гудаев Ш.Д., Наумова Д.Н., Плужан К.Г. Алгоритм построения неравномерной конечно-разностной сетки для трехмерного моделирования задач электродинамики // 23-я научно-техническая конференция «Молодежь в науке», 2025. Сборник тезисов докладов. Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2025. 184 с.
2. Григорьев А.Д. Методы вычислительной электродинамики. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2012. 432 с.
3. Хокни Р., Иствуд Дж. Численное моделирование методом частиц. Москва: Мир, 1987. 640 с.
4. Аржанников А.В., Сеницкий С.Л. Мощные импульсные пучки. Новосибирск, 2012.

MSC 78M99

Development of Software for simulation of charged particle dynamics

A.V. Garipova¹, D.G. Garipov¹, Sh.D. Gudaev¹, D.N. Naumova¹, K.G. Pluzyan¹
FSUE "RFNC-VNIIEF"¹

Abstract: FSUE "RFNC-VNIIEF" has developed software for three-dimensional numerical self-consistent modeling of dynamics of a high-current electron beam and propagation of electromagnetic waves. The created software is implemented for computational theoretical support of the development of new and modernization of existing units of high-current acceleration equipment. The software allows simulation of electron beams with a current density of the order of units MA/m², as well as extended structures of the order of ten meters in length. The software consists of functional modules for preparing initial data, performing calculations and processing calculation results. A function module is a subroutine that implements a physical model or data processor. The paper presents software architecture and describes sets of module functionalities. Test results of function modules are given on the example of klystron output resonator simulation and simulation of high-current electron beam transportation in vacuum area.

Keywords: software, three-dimensional numerical self-consistent modeling, dynamics of a high-current electron beam, finite-difference time-domain method, the "particles in cells" method.

УДК 539.3:533.6

О построении стабилизирующего управления для трубопроводной системы

Гладун А.В.¹, Вельмисов П.А.²

Ульяновский институт гражданской авиации имени Главного маршала авиации
Б.П. Бугаева¹, Ульяновский государственный технический университет²

Аннотация: Рассматривается задача построения стабилизирующего управления, обеспечивающего гашение продольно-поперечных колебаний упругого трубопровода, транспортирующего жидкость. Математическая модель представляет собой систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, учитывающую продольные и поперечные деформации трубопровода при взаимодействии трубопровода с движущейся жидкостью. С помощью метода Галеркина исходная система сводится к конечномерной системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Для случая двух базисных функций найдены условия управляемости по линейному приближению и с помощью функции Ляпунова построено управление с обратной связью, обеспечивающее асимптотическую устойчивость нулевого решения. Приведены результаты численного моделирования динамики трубопроводной системы под действием построенного управления.

Ключевые слова: упругий трубопровод, продольные и поперечные колебания, уравнения с частными производными, метод Галеркина, управляемость, управление с обратной связью, функция Ляпунова, асимптотическая устойчивость.

1. Введение

Задача построения стабилизирующего управления для трубопровода, транспортирующего жидкость, исследуется по многим причинам. Трубопроводы широко используются не только для транспортировки жидкостей, но и в инженерных приложениях, например в системах охлаждения, операциях дозаправки в воздухе, океанской добыче полезных ископаемых, поэтому результаты исследований могут найти практическое применение [3, 5, 6]. Обычно, если скорость потока достаточно велика, устойчивое положение равновесия становится неустойчивым и в системе появляются самовозбуждающиеся поперечные колебания, а в некоторых случаях и продольная деформация. Тогда возникает необходимость гасить колебания трубопровода путем подходящего управляющего воздействия [12–14]. Для стабилизации труб, транспортирующих жидкость, предложены многочисленные методы активного управления [1]. Они основаны на применении различных устройств, генерирующих поперечные силы или изгибающие моменты, которые активно воздействуют на систему. К таким примерам относятся сервомоторы, тем или иным образом соединенные с трубой [2, 7], пьезоэлектрические элементы, прикрепленные к трубе [4, 8].

2. Постановка задачи

Рассматривается задача построения стабилизирующего управления, обеспечивающего гашение продольно-поперечных колебаний трубопровода. Математическая модель трубопровода с учётом взаимодействия с жидкостью [9–11] описывается сле-

дующими нелинейными дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} \mu u_{tt} - \left[EF \left(u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) \right]_x - \gamma_2 u_{xxt} + \gamma_1 u_t + \gamma_0 u &= g(x, t), \\ \mu w_{tt} - \left[EF \left(u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) w_x \right]_x + EJ w_{xxxx} + \alpha_2 w_{xxxxt} + (P(t) w_x)_x & \\ + m_* U^2(t) w_{xx} + 2m_* U(t) w_{xt} + m_* U_t(t) w_x + \alpha_1 w_t + \alpha_0 w &= f(x, t). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $u(x, t)$, $w(x, t)$ — продольные и поперечные деформации в сечении x трубопровода в момент времени t ; $\mu = m_0 + m_*$, $m_0 = \rho F$ — погонная масса трубопровода, $m_* = \rho_* F_*$ — погонная масса жидкости; ρ — плотность материала трубопровода; F — площадь поперечного сечения трубопровода; ρ_* — плотность жидкости; F_* — площадь поперечного сечения, занимаемая жидкостью; α_2 , γ_2 — коэффициенты демпфирования в материале трубопровода; α_1 , γ_1 — коэффициенты демпфирования внешних вязкоупругих связей; α_0 , γ_0 — коэффициенты жёсткости внешних вязкоупругих связей; E — модуль упругости материала трубопровода; J — момент инерции поперечного сечения трубопровода относительно нейтральной оси, перпендикулярной плоскости колебаний; $P(t)$ — продольная сила; $g(x, t)$ — внешняя распределённая продольная нагрузка; $f(x, t)$ — внешняя распределённая поперечная нагрузка; $U(t)$ — скорость жидкости в трубопроводе.

Индексы x и t далее обозначают частные производные по координате x и времени t соответственно. Коэффициенты μ , EF , EJ , m_* , γ_0 , γ_1 , γ_2 , α_0 , α_1 , α_2 положительны.

Задача. Найти для системы (1) условия существования и вид таких управляющих воздействий $g(x, t)$ и $f(x, t)$, что соответствующее им нулевое решение системы уравнений $u(x, t) = 0$, $w(x, t) = 0$, $x \in [0, l]$ будет асимптотически устойчивым.

3. Построение решений

Для построения решения системы уравнений (1) используется метод Галеркина и функции $u(x, t)$, $w(x, t)$ записываются в виде

$$\sum_{k=1}^n v_k(t) g_k(x),$$

где $\{g_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}\}_{k=1}^\infty$ — полная на $[0, l]$ система базисных функций, соответствующих случаю шарнирного закрепления концов трубопровода

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad w(0, t) = w(l, t) = w''(0, t) = w''(l, t) = 0.$$

В случае $n = 2$ имеем

$$u(x, t) = v_1(t) \sin \frac{\pi x}{l} + v_2(t) \sin \frac{2\pi x}{l}, \quad w(x, t) = v_3(t) \sin \frac{\pi x}{l} + v_4(t) \sin \frac{2\pi x}{l}$$

и систему четырех обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка для функций $v_1(t)$, $v_2(t)$, $v_3(t)$, $v_4(t)$, содержащих управления $up_1(t, v_1, v_2)$, $up_2(t, v_1, v_2)$, $up_3(t, v_3, v_4)$, $up_4(t, v_3, v_4)$, полученные в результате применения процедуры метода Галеркина к функциям $g(x, t)$ и $f(x, t)$ соответственно. Для этой системы найдены условия управляемости по линейному приближению и при помощи функции Ляпунова построено стабилизирующее управление. Приведены результаты численного моделирования поведения трубопроводной системы при заданных параметрах под действием построенных управлений.

Литература

1. Ding H., Ji J.C. Vibration control of fluid-conveying pipes: a state-of-the-art review // Appl. Math. Mech. (Engl. Ed.). 2023. Vol. 44, No. 9. P. 1423-1456.
2. Doki H., Hiramoto K., Skelton R. Active control of cantilevered pipes conveying fluid with constraints on input energy // J. Fluids Struct. 1998. Vol. 12, No. 5. P. 615-628.
3. Li Q., Liu W., Zhang Z., Yue Z. Parametric resonance of pipes with soft and hard segments conveying pulsating fluids // Int. J. Struct. Stab. Dyn. 2018. Vol. 18, No. 10. 1850119.
4. Lin Y.H., Chu C.L. Active flutter control of a cantilever tube conveying fluid using piezoelectric actuators // J. Sound Vib. 1996. Vol. 196, No. 1. P. 97-105.
5. Gao P., Yu T., Zhang Y., Wang J., Zhai J. Vibration analysis and control technologies of hydraulic pipeline system in aircraft: A review // Chin. J. Aeronaut. 2021. Vol. 34, No. 4. P. 83-114.
6. Sun X., Yan H., Dai H. Stability and dynamic evolution of sliding fluid-transporting pipes in three-dimensional sense // Int. J. Struct. Stab. Dyn. 2020. Vol. 20, No. 3. 2050036.
7. Tani J., Sudani Y. Active flutter suppression of a vertical pipe conveying fluid // JSME Int. J. Ser. C Dyn. Control Robot Design Manuf. 1995. Vol. 38, No. 1. P. 55-58.
8. Tsai Y.K., Lin Y.H. Adaptive modal vibration control of a fluid-conveying cantilever pipe // J. Fluids Struct. 1997. Vol. 11, No. 5. P. 535-547.
9. Вельмисов П.А., Покладова Ю.В., Мизхер У.Д. Математическое моделирование нелинейной динамики трубопровода // Автоматизация процессов управления. 2019. № 3(57). С. 93-101.
10. Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А., Ликанин А.В. Исследование динамической устойчивости трубопровода с учётом предварительного изгиба // Вестник Ульяновского государственного технического университета. 2025. № 1(109). С. 13-20.
11. Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А., Абрашкин П.М., Ликанин А.В. Исследование динамической устойчивости трубопровода // Journal of Advanced Research in Technical Science. 2025. № 46. С. 34-41.
12. Вельмисов П.А., Гладун А.В. Об управлении динамикой трубопровода // Журнал Средневолжского математического общества. 2016. Т. 18, № 4. С. 89-97.
13. Гладун А.В., Вельмисов П.А. Об управлении динамикой деформируемого элемента конструкции при сверхзвуковом обтекании // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ имени Е.В. Воскресенского: VIII Международная научная молодежная школа-семинар. Саранск, 16-20 июля 2018 года. Саранск: Издательство СВМО, 2018. С. 142-149.

14. Гладун А.В., Вельмисов П.А. О построении управления колебаниями трубопровода // Вестник Ульяновского государственного технического университета. 2019. № 2(86). С. 29-37.

MSC 74F10

On the Construction of Stabilizing Control for a Pipeline System

A.V. Gladun¹, P.A. Velmisov²

Ulyanovsk Civil Aviation Institute named after Chief Marshal of Aviation B.P. Bugaev¹,
Ulyanovsk State Technical University²

Abstract: The paper considers the problem of constructing stabilizing control that suppresses the longitudinal-transverse vibrations of an elastic pipeline conveying fluid. The mathematical model is a system of nonlinear partial differential equations accounting for the longitudinal and transverse deformations of the pipeline interacting with the moving fluid. The Galerkin method is used to reduce the original system to a finite-dimensional system of nonlinear ordinary differential equations. For the case of two basis functions, controllability conditions for the linear approximation are obtained, and a Lyapunov-function-based feedback control is constructed that ensures asymptotic stability of the zero solution. Results of numerical simulation of the pipeline-system dynamics under the constructed control are presented.

Keywords: elastic pipeline, longitudinal and transverse vibrations, partial differential equations, Galerkin method, controllability, feedback control, Lyapunov function, asymptotic stability.

УДК 519.63

Об одном алгоритме разрешения пространственных структур с внутренними несогласованными границами*

Губайдуллин И.М.^{1,2}, Янгляев И.Р.^{1,3}, Повещенко Ю.А.⁴,
Подрыга В.О.^{4,5}, Язовцева О.С.^{1,3}

УГНТУ¹, ИНК УФИЦ РАН², Национальный исследовательский Мордовский
государственный университет³, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН⁴, МАДИ⁵

Аннотация: В работе представлен алгоритм прямого разрешения доменных структур с внутренними несогласованными границами. На всей области интегрирования организована сетка с большим пространственным разбиением (макросетка с макроячейками), внутри некоторых из ее ячеек с целью детализации расчетов построены сетки с более мелким пространственным шагом (микросетки с микроячейками). Границы макроячеек с примыкающими к ним микроячейками являются несогласованными по шагам пространственных сеток. На микросетках реализован алгоритм символьной прогонки – модификация алгоритма классической прогонки, основное отличие которого заключается в полиномиальном представлении сеточной функции, прогоночных коэффициентов и невязки. Полиномы зависят от значений функции в узлах декомпозированных макроячеек. Для согласования решений на несогласованных границах применены предобуславливатели, позволяющие сохранить свойства самосопряженности, знакоопределенности и монотонности полного оператора краевой задачи.

Ключевые слова: математическое моделирование, двухфазная фильтрация, метод прогонки, mortarные сетки, уравнение пьезопроводности, трещиновато-пористая среда, карбонатный коллектор.

Современная нефтепромышленность требует постоянного развития производства. Натурные испытания требуют значительных вложений и в большей части случаев оказываются невыгодными [1]. Математическое моделирование выступает эффективным инструментом решения современных промышленных задач [2]. В современной нефтегазовой инженерии остро стоит вопрос построения вычислительных алгоритмов для задач флюидодинамики. К подобным относятся задачи моделирования процессов двухфазной фильтрации в нефтесодержащих пористых структурах.

Построенный в работе на основе метода символьной прогонки вычислительный алгоритм применен к решению двумерного уравнения пьезопроводности. Он позволяет исследовать динамику пластового давления в трещиновато-пористых коллекторах, характерных для карбонатных нефтяных месторождений [3].

Пьезопроводное уравнение для задачи Дирихле в изотермическом приближении, учитывающее двухфазный характер течения несмешивающихся жидкостей в пористой среде, решается во внутренних микроузлах выбранной макроячейки при заранее неизвестных значениях давления в ее угловых вершинах. Данная математическая постановка позволяет эффективно моделировать процессы пьезопроводности при двухфазной флюидодинамике в трещиновато-пористом коллекторе. Для реше-

*Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда, проект № 25-71-20005, <https://rscf.ru/project/25-71-20005/>.

ния уравнения в области интегрирования построена равномерная прямоугольная сетка с большим пространственным шагом – макросетка с макроячейками. Внутри данной выбранной макроячейки реализовано более мелкое пространственное разбиение – микросетка с микроячейками. Граница декомпозированной макроячейки с прилегающими к ней микроячейками является несогласованной (мортарной) по шагам пространственных сеток.

На микросетке реализован алгоритм символьной прогонки. Его основное отличие от классического варианта заключается в представлении сеточной функции, свободного члена в балансных соотношениях (невязки) и прогоночных коэффициентов в полиномиальном виде. Коэффициенты и свободный член полиномов подлежат вычислению с помощью метода переменных направлений в процессе внутренних итераций.

Верификация разработанного алгоритма символьной прогонки проведена на задачах с известными аналитическими решениями. Анализ алгоритма для разностной схемы второго порядка показал сохранение второго порядка точности.

Вычислительный алгоритм для «сшивки» решений на мортарной границе построен с использованием предобуславливателей, обеспечивающих сохранение свойств самосопряженности, знакоопределенности и монотонности полного оператора краевой задачи. Практическая значимость исследования состоит в разработке вычислительного алгоритма, позволяющего проводить быстрые параметрические исследования трещиновато-пористых коллекторов без повторной сборки глобальной матрицы разрешения всего месторождения, а также в подтверждении потенциала символьных методов для задач локального уточнения в гидродинамическом моделировании пластов.

Литература

1. Bratton T., Canh D.V., Que N.V., Sonnerland L. The nature of naturally fractured reservoirs // Oilfield Rev. 2006. Vol. 18. P. 4–23.
2. Panaedova G., Frumina S., Mityushina I. Digital Technologies in the Oil and Gas Industry: Main Directions and Development Trends // Digital Transformation in Sustainable Value Chains and Innovative Infrastructures / Ed. by G. Mutanov, A. Serikbekuly. Cham: Springer, 2022. Vol. 443. P. 67–76. DOI: 10.1007/978-3-031-07067-9_6.
3. Uzyanbaev R.M., Bobreneva Yu.O., Poveshchenko Yu.A., Podryga V.O., Polyakov S.V., Rahimly P.I., Gubaydullin I.M. Numerical modeling of two-phase fluid filtration for carbonate reservoir in two-dimensional formulation // Mathematics. 2024. Vol. 12. P. 3412. DOI: 10.3390/math12213412.
4. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.

MSC 65N06

On an algorithm for resolving spatial structures with internal non-matching boundaries

I.M. Gubaydullin^{1,2}, I.R. Yanglyayev^{1,3}, Yu.A. Poveshchenko⁴, V.O. Podryga^{4,5},
O.S. Yazovtseva^{1,3}

USPTU¹, IPC UFRC RAS¹, National Research Mordovian State University³,
KIAM⁴, MADI⁵

Abstract: The work presents an algorithm for the direct resolution of domain structures with internal non-matching boundaries. A grid with a coarse spatial partition (a macrogrid with macrocells) is organized in the integration area, and grids with a finer spatial step (microgrids with microcells) are built inside some of its cells for detailed computations. The boundaries of macrocells with adjoining microcells are non-matching in the steps of spatial grids. The symbolic tridiagonal matrix algorithm (TDMA) is implemented on microgrids, a modification of the classical tridiagonal matrix algorithm, the main difference of which is in the polynomial representation of the grid function, the TDMA coefficients and the residual. The polynomials depend on the function values at the nodes of the decomposed macrocells. To coupling solutions on non-matching boundaries, preconditioners are used to preserve the properties of self-conjugacy, sign-definiteness, and monotonicity of the complete operator of the boundary value problem.

Keywords: mathematical modeling, two-phase filtration, tridiagonal matrix algorithm, mortar grids, piezoconductivity equation, fractured-porous medium, carbonate reservoir.

УДК 517.958

Сходящиеся разностные схемы в анализе сетеподобных гидродинамических процессов

Гусельникова И.В.¹

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого¹

Аннотация: Указаны принципы построения сходящихся разностных схем при анализе краевой и начально-краевой задач для системы Навье-Стокса-Осина, рассматриваемых в пространстве Соболева вектор-функций с носителями в трехмерной сетеподобной области.

Ключевые слова: сетеподобная область, краевая задача, устойчивость и сходимость разностной схемы.

1. Введение

Рассматриваются метод конечных разностей для доказательства существования слабого решения линеаризованной по Осину системы Навье-Стокса и принципы построения разностных схем, устойчивых в метриках, соответствующим энергетическим.

2. Используемые обозначения.

Связная сетеподобная область $\mathfrak{S} \subset \mathbb{R}^3$ ($\partial\mathfrak{S}$ — граница $\mathfrak{S}$) состоит из совокупности ограниченных подобластей $\mathfrak{S}_j$ ($\partial\mathfrak{S}_j$ — граница $\mathfrak{S}_j$), $j = 1, 2, \dots, N$, и совокупности двухсторонних поверхностей S_j ($S_j \subset \partial\mathfrak{S}_j$, а S_j^+ , S_j^- — стороны поверхности S_j), $j = 1, 2, \dots, N - 1$, которые являются частями границ смежных подобластей и определяют поверхности взаимного примыкания этих подобластей, при этом $\partial S_j \subset \partial\mathfrak{S}$ ($j = 1, 2, \dots, N - 1$) ([1, 2]).

Используются пространства Соболева действительных, измеримых по Лебегу скалярных функций $u(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathfrak{S}$, $\mathfrak{S} \subset \mathbb{R}^3$, имеющих обобщенные производные 1-го порядка $\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \in L_2(\mathfrak{S})$ ($i = 1, 2, 3$), скалярное произведение и норма определены соотношениями $(u, v)_{\mathfrak{S}}^1 = \int_{\mathfrak{S}} \left(u(x)v(x) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \right) dx$, $\|u\|_{\mathfrak{S}}^1 = \sqrt{(u, u)_{\mathfrak{S}}^1}$.

3. Стационарная система Навье-Стокса-Осина.

Для вектор-функций $u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))$ с переменной $x = (x_1, x_2, x_3) \in \bigcup_{j=1}^N \mathfrak{S}_j$, рассмотрим систему (здесь Δ — оператор Лапласа)

$$\nu \Delta u + \sum_{i=1}^3 a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} = \text{grad } p + f, \quad (1)$$

$$\text{div } u = 0 \quad \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \right), \quad (2)$$

$$u(x)|_{S_j^+} = u(x)|_{S_j^-}, \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n_j^+} + \frac{\partial u(x)}{\partial n_j^-} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (4)$$

где n_j^+ и n_j^- — внешние нормали к S_j^+ и S_j^- , соответственно;
 Добавляя к (1)–(4) граничное условие

$$u(x)|_{x \in \partial \mathfrak{S}} = 0, \quad (5)$$

получаем краевую задачу (1)–(5) для линеаризованной системы Навье-Стокса относительно функций $u(x)$, $p(x)$ в замкнутой области $\bar{\mathfrak{S}}$ ($\bar{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S} \cup \partial \mathfrak{S}$).

Пусть $\mathcal{X}(\mathfrak{S}) = \{u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x)) : u_k(x) \in C^1(\bar{\mathfrak{S}}), k = 1, 2, 3, \operatorname{div} u = 0\}$ (через $\tilde{C}^1(\bar{\mathfrak{S}})$ обозначено множество непрерывно дифференцируемых на $\bar{\mathfrak{S}}_j$ ($j = 1, 2, \dots, N$) функций, удовлетворяющих условиям (3), (4)), а $\mathcal{X}_0(\mathfrak{S}) = \{u(x) : u(x) \in \mathcal{X}(\mathfrak{S}), u(x)|_{\partial \mathfrak{S}} = 0\}$.

Определение 1. Пространства $(\tilde{W}^1(\mathfrak{S}))^3$, $(\tilde{W}_0^1(\mathfrak{S}))^3$ — замыкания множеств $\mathcal{X}(\mathfrak{S})$, $\mathcal{X}_0(\mathfrak{S})$ в норме $(W_2^1(\mathfrak{S}))^3$, соответственно; $(\tilde{W}_0^1(\mathfrak{S}))^3 \subset (\tilde{W}^1(\mathfrak{S}))^3$.

Используя формулу Грина, получим интегральные тождества

$$\nu \int_{\mathfrak{S}} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} dx - \int_{\mathfrak{S}} \sum_{i=1}^3 a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta dx = - \int_{\mathfrak{S}} f \eta dx \quad (6)$$

на $\mathfrak{S}$ и

$$\int_{S_j^-} \frac{\partial u(x)}{\partial n_j^-} \eta dS + \int_{S_j^+} \frac{\partial u(x)}{\partial n_j^+} \eta dS = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N-1. \quad (7)$$

на каждой поверхности S_j .

4. Сходящаяся разностная схема задачи (1)–(5).

Обратимся вначале к построению дискретного аналога пространства $(\tilde{W}_0^1(\mathfrak{S}))^3$.

Используются простейшая (кусочно-постоянная) интерполяции

$$\hat{u}_h(x) = u_h|_{x=(mh)}$$

при $x \in \omega_{(mh)}$, где $(mh) = (m_1 h_1, m_2 h_2, m_3 h_3)$ — фиксированная вершина ячейки $\omega_{(mh)}$, используется также полилинейная интерполяция

$$\begin{aligned} \acute{u}_h(x) = & u_h + u_{x_1}(x_1 - m_1 h_1) + u_{x_2}(x_2 - m_2 h_2) + u_{x_3}(x_3 - m_3 h_3) + \\ & + u_{x_2 x_3}(x_2 - m_2 h_2)(x_3 - m_3 h_3) + u_{x_1 x_3}(x_1 - m_1 h_1)(x_3 - m_3 h_3) + \\ & + u_{x_1 x_2}(x_1 - m_1 h_1)(x_2 - m_2 h_2) + u_{x_1 x_2 x_3}(x_1 - m_1 h_1)(x_2 - m_2 h_2)(x_3 - m_3 h_3) \end{aligned}$$

при $x = (x_1, x_2, x_3) \in \bar{\omega}_{(mh)}$, $\bar{\omega}_{(mh)} = \{x : m_i h_i \leq x_i \leq (m_i + 1)h_i, i = 1, 2, 3\}$ [4, с. 284].
 Дискретный аналог условий (4) принимает вид

$$\hat{u}_h|_{S_j^-(mh)} = \hat{u}_h|_{S_j^+(mh)}, \quad (\hat{u}_{h,n_j^-} + \hat{u}_{h,n_j^+})|_{S_j(mh)} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (8)$$

Дискретный аналог соотношения (2) для интерполяции $\hat{u}_h$ слабого решения $u(x) \in (\tilde{W}_0^1(\mathfrak{F}))^3$ определяется соотношением

$$\hat{u}_{1hx_1}(mh) + \hat{u}_{2hx_2}(mh) + \hat{u}_{3hx_3}(mh) = 0 \quad (9)$$

в вершинах (mh) сетки $(\mathfrak{F})_h$, равенство (5) для сеточных функций $\hat{u}_h$ заведомо выполнены.

В соответствии со сказанным, тождество (6) для $\hat{u}_h(x), \hat{\eta}_h(x) \in (\Sigma_{0h}(\mathfrak{F}_h))^3$ заменяется соотношением

$$\nu \Delta_h \sum_{\mathfrak{F}_h^+} \sum_{i=1}^3 u_{x_i} \eta_{x_i} - \Delta_h \sum_{\mathfrak{F}_h^+} \sum_{i=1}^3 a_{ih} u_{x_i} \eta_h = -\Delta_h \sum_{\mathfrak{F}_h^+} f_h \eta_h, \quad (10)$$

Можно преобразовать соотношение (10) в систему разностных уравнений

$$\nu \sum_{i=1}^3 u_{x_i \bar{x}_i} + \sum_{i=1}^3 a_{ih} u_{x_i} = f_h \quad (11)$$

$$\begin{aligned} u_h|_{S_j^+(mh)} &= u_h|_{S_j^-(mh)}, \quad (u_{h,n_j^-} + u_{h,n_j^+})|_{S_j(mh)} = 0, \quad j = \overline{1, N-1}, \\ (u_{1x_1} + u_{2x_2} + u_{3x_3})|_{(\mathfrak{F})_h} &= 0, \quad u_h|_{\partial \mathfrak{F}_h} = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

Теорема 1. Пусть $a(x)$ — ограниченная функция из $(\tilde{W}_0^1(\mathfrak{F}))^3$, $f(x) \in (L_2(\mathfrak{F}))^3$ и пусть $\delta > 0$. Тогда алгебраическая система (11), (12) однозначно разрешима и ей соответствующая разностная схема устойчива в сеточной норме дискретного аналога $(\Sigma_{0h}(\mathfrak{F}_h))^3$ пространства $(\tilde{W}_0^1(\mathfrak{F}))^3$.

Теорема 2. При выполнении условий теоремы 1 разностная схема (12), (13) устойчива в энергетической норме, причем интерполяции $\{\hat{u}_h(x)\}$ для решений $\{u_h\}$ системы разностных уравнений (11), (12) сходятся сильно в $(L_2(\mathfrak{F}))^3$ к слабому решению $u(x) \in \tilde{W}_0^1(\mathfrak{F})$ задачи (1)–(5), производные $\frac{\partial \hat{u}_h(x)}{\partial x_i}$ сходятся слабо в $(L_2(\mathfrak{F}))^3$ к $\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, 3$.

Теорема 3. Если выполнены условия теоремы 1, тогда интерполяции $\hat{u}_h(x)$ сильно сходятся к $u(x)$ в $(\tilde{W}_0^1(\mathfrak{F}))^3$.

Литература

1. Guselnikova I.V., Provotorov V.V. A Difference Scheme for the Stationary Navier–Stokes–Oseen System in the Class of Summable Functions Supported on a Network-like Domain // Proceedings of the IXth International School-Seminar on Nonlinear Analysis and Extremal Problems (NLA-2026). Irkutsk, Russia, June 22-26. Irkutsk: ISDCT SB RAS, 2026. P. 67-68.
2. Жабко А.П., Провоторов В.В., Тран З., Еремин А.С. Сходящиеся разностные схемы эллиптического уравнения в классе суммируемых функций с сетеподобным носителем // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2025. Т. 21, Вып. 2. С. 197-216.

3. Гусельникова И.В. Слабая разрешимость задачи о напряженно-деформированном состоянии слоистой композиционной среды // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Сборник материалов Международной научной конференции (г. Воронеж, 1-3 декабря 2025 г.). Воронеж: Издательство «Прометей», 2026. С. 532-535.
4. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. Москва: Наука, 1973. 407 с.

MSC 74G55

Convergent difference schemes in the analysis of network-like hydrodynamic processes

I.V. Guselnikova¹

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University¹

Abstract: The principles of constructing convergent difference schemes in the analysis of boundary and initial boundary value problems for the Navier-Stokes-Osin system considered in the Sobolev space of vector functions with carriers in a three-dimensional network-like domain are indicated.

Keywords: Network-like domain, boundary value problem, stability and convergence of the difference scheme

УДК 517.929.4

Устойчивость однородных дифференциально-разностных систем нейтрального типа

Евтина Д.С.¹, Жабко А.П.¹

Санкт-Петербургский государственный университет¹

Аннотация: Работа посвящена исследованию устойчивости однородных дифференциально-разностных систем нейтрального типа методом Разумихина. Показано, что за счёт выбора определённой окрестности теорема Разумихина обеспечивает асимптотическую устойчивость нулевого решения рассматриваемых систем. В дальнейшем планируется получить оценку такой окрестности методом функционалов Ляпунова–Красовского и сравнить эти два результата.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, системы с запаздыванием, запаздывание нейтрального типа, однородные системы, устойчивость.

1. Введение

Однородные системы уравнений с отклоняющимся аргументом [1, 2] описывают многие механические, биологические и экономические процессы. Для исследования устойчивости таких систем существует два наиболее распространённых метода: метод функций Разумихина [3] и метод функционалов Ляпунова–Красовского [1]. Целью данной работы является исследование возможности применения теоремы Разумихина к анализу асимптотической устойчивости нулевого решения однородной системы с запаздыванием нейтрального типа.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений:

$$\dot{x}(t) = D\dot{x}(t-h) + F(x(t)) + G(x(t-\tau)), \quad (1)$$

где $h > 0$, $\tau > 0$ – запаздывания, а F и G – непрерывные однородные порядка $\mu > 1$ функции.

Предположим, что вспомогательная система без запаздывания

$$(E - D)\dot{x}(t) = F(x(t)) + G(x(t)) \quad (2)$$

асимптотически устойчива по Ляпунову.

Нашей задачей является исследование устойчивости системы (1) методом Разумихина.

3. Основной результат

Известно [4], что, если система без запаздывания (2) асимптотически устойчива, то существует положительно определённая и однородная порядка $k > 2$ функция

Ляпунова $V(z)$, удовлетворяющая в некоторой окрестности $\|z\| < H$, $H > 0$ следующему уравнению:

$$\left(\frac{\partial V(z)}{\partial z}\right)^T \left(\tilde{F}(z) + \tilde{G}(z)\right) = -W(z),$$

где $W(z)$ – заданная положительно определённая однородная функция порядка $k + \mu - 1$, а

$$\tilde{F}(z) = F((E - D)^{-1}z), \quad \tilde{G}(z) = G((E - D)^{-1}z).$$

Пусть $y(t) = x(t) - Dx(t - h)$. Перепишем систему (1) в виде

$$\dot{y}(t) = \tilde{F}(y(t)) + \tilde{G}(y(t - \tau)). \quad (1')$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left.\frac{dV(y(t))}{dt}\right|_{(1')} &= \left(\frac{\partial V(y(t))}{\partial y}\right)^T \left[\tilde{F}((E - D)x(t)) + \tilde{G}((E - D)x(t - \tau))\right] = -W(y(t)) + \\ &+ \left(\frac{\partial V(y(t))}{\partial y}\right)^T \left[\left(\tilde{F}((E - D)x(t)) - \tilde{F}(y(t))\right) + \left(\tilde{G}((E - D)x(t - \tau)) - \tilde{G}(y(t))\right)\right]. \end{aligned}$$

Далее применим следующие равенства:

$$\begin{aligned} \tilde{F}((E - D)x(t)) - \tilde{F}(x(t) - Dx(t - h)) &= \\ &= \int_0^1 \left(\tilde{F}'((E - D)x(t) + (\nu - 1)D(x(t - h) - x(t)))\right)'_{\nu} d\nu = \\ &= \int_0^1 \frac{\partial \tilde{F}(z_1)}{\partial z_1} d\nu D(x(t - h) - x(t)), \quad z_1 = (E - D)x(t) + (\nu - 1)D(x(t - h) - x(t)), \\ \tilde{G}((E - D)x(t - \tau)) - \tilde{G}(x(t) - Dx(t - h)) &= \\ &= \int_0^1 \tilde{G}'_{\nu}(\nu(E - D)x(t - \tau) + (1 - \nu)(x(t) - Dx(t - h))) d\nu = \\ &= \int_0^1 \frac{\partial \tilde{G}(z_2)}{\partial z_2} d\nu \left[(E - D)x(t - \tau) + Dx(t - h) - x(t)\right], \\ &\quad z_2 = \nu((E - D)x(t - \tau)) + (1 - \nu)(x(t) - Dx(t - h)) \end{aligned}$$

и получим представление производной от функции $V(z)$ в силу системы (1'):

$$\begin{aligned} \left.\frac{dV(y(t))}{dt}\right|_{(1')} &= \underbrace{-W(y(t))}_{I_1} + \underbrace{\left(\frac{\partial V(y(t))}{\partial y}\right)^T \int_0^1 \frac{\partial \tilde{F}(z_1)}{\partial z_1} d\nu D(x(t - h) - x(t))}_{I_2} + \\ &+ \underbrace{\left(\frac{\partial V(y(t))}{\partial y}\right)^T \int_0^1 \frac{\partial \tilde{G}(z_2)}{\partial z_2} d\nu \left[(E - D)x(t - \tau) + Dx(t - h) - x(t)\right]}_{I_3}. \end{aligned} \quad (3)$$

Чтобы провести анализ поведения решений исходной системы (1), покажем, что существует $H > 0$ такое, что в окрестности $U_H(\mathbb{O})$ функция $\left. \frac{dV(y(t))}{dt} \right|_{(1')}$ является отрицательно определённой функцией на множестве кривых Разумихина

$$R_t(c) = \left\{ y(\sigma) \in C^1([t-2h, t] \times R^n) \left| V(y(\sigma)) \leq V(y(t)) = c, \quad \sigma \in [t-2h, t] \right. \right\}.$$

Поскольку слагаемое I_1 в формуле (3) является отрицательно определённой и однородной порядка $k + \mu - 1$ функцией, а слагаемые I_2 и I_3 являются однородными по y функциями порядка $k + \mu - 2$, то далее покажем, что $[x(t) - x(t-h)]$, $[x(t) - x(t-\tau)]$, $[x(t-\tau) - x(t-h)]$ – суть однородные функции порядка μ .

Рассмотрим положительно определённую функцию $v(x) = x^T Q x$, в которой матрица Q выбрана таким образом, что $v(x) > v(Dx)$ для всех $x \in R^n$.

Пусть $d = \min_{\|x\|=1} (v(x) - v(Dx))$.

Лемма 1. Если $x(t) = Dx(t-h) + y(t)$, то при $v(x(t-h)) \leq v(x(t))$ имеют место оценки:

$$\begin{cases} v(y(t)) \leq (2 - d + 2\sqrt{1-d})v(x(t)) \\ v(y(t)) \geq (2 - d - 2\sqrt{1-d})v(x(t)). \end{cases} \quad (4)$$

Доказательство.

$$v(y(t)) = v(x(t) - Dx(t-h)) = v(x(t)) + v(Dx(t-h)) - 2x^T(t)QDx(t-h).$$

Поскольку $v(Dx(t-h)) \leq (1-d)v(x(t))$ и $|x^T(t)QDx(t-h)| = \sqrt{v(x(t))v(x(t-h))} \leq \sqrt{1-d}v(x(t))$, получаем неравенства (4).

Доказательство завершено.

Следствие 1. Аналогичные оценки для производных можно получить, исходя из равенства $\dot{x}(t) = D\dot{x}(t-h) + \dot{y}(t)$.

Теперь, опираясь на следствие к лемме, оценим норму функций

$$\begin{aligned} \|x(t) - x(t-h)\| &= \|\dot{x}(\theta_1)\|h \leq A\|x_t\|_h^\mu \leq \tilde{A}\|x_t\|_h^{\mu-1}\|x_t\|, \\ \|x(t) - x(t-\tau)\| &= \|\dot{x}(\theta_2)\|\tau \leq B\|x_t\|_\tau^\mu \leq \tilde{B}\|x_t\|_\tau^{\mu-1}\|x_t\|_\tau, \\ \|x(t) - x(t-h)\| &= \|\dot{x}(\theta_3)\|(h-\tau) \leq \tilde{C}\|x_t\|_h^{\mu-1}\|x_t\|_h. \end{aligned}$$

Следовательно

$$\left. \frac{dV(y(t))}{dt} \right|_{(1')} = -W(y(t)) + K\|y_t\|^{\mu-1}\|y_t\|^{k+\mu-1}$$

на множестве Разумихина $R_t(c)$.

4. Выводы

В ходе работы получены следующие выводы:

1. Окрестность $U_H(\mathbb{O})$, в которой теорема Разумихина обеспечивает асимптотическую устойчивость нулевого решения, определяется неравенством

$$0 < KH^{\mu-1} < \min_{\|\varphi\|_{h+\theta}=1} W(\varphi).$$

2. Верхняя оценка решения $y(t)$ может быть получена в виде $V(y(t)) = z(t)$, где $z(t)$ является решением обыкновенной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{z}(t) = \Phi(z(t)), \quad \Phi(z) = \max_{\varphi \in R(z)} (-W(z) + K \|\varphi\|_{h+\tau}^{k+2\mu-2}).$$

Литература

1. Kharitonov V.L. Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices. Basel: Birkhäuser, 2013. 311 p.
2. Эльсгольц Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Москва: Наука, 1964. 128 с.
3. Разумихин Б.С. Метод исследования устойчивости систем с последействием // Доклады Академии наук. 1966. Т. 167, № 6. С. 1234-1237.
4. Зубов В.И. Устойчивость движения (методы Ляпунова и их применение). 2-е изд. Москва: Высшая школа, 1984. 232 с.

MSC 34K40

Stability of homogeneous differential-difference systems of neutral type

D.S. Evtina¹, A.P. Zhabko¹

Saint Petersburg State University¹

Abstract: This work is devoted to the analysis of the stability of homogeneous differential-difference systems of neutral type using the Razumikhin method. It is demonstrated that choosing a specific neighborhood, Razumikhin's theorem ensures asymptotic stability of the zero solution of such type of systems. In the future the estimation of this neighborhood using the Lyapunov-Krasovskii functional method and the comparison of these two results is planned.

Keywords: differential equations, time-delay systems, neutral type delay, homogeneous systems, stability.

УДК 519.63

Применение схемы КАБАРЕ для численного моделирования двумерной тепловой конвекции

Ерошкина М.С.¹, Головизнин В.М.¹, Дерюгин Ю.Н.¹

Филиал Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова в
городе Сарове¹

Аннотация: Тепловая конвекция играет важную роль во многих областях, от строительства и электроники до ядерной энергетики и космических технологий. В связи с этим актуальной задачей вычислительной гидродинамики является разработка методов, повышающих точность моделирования тепловой конвекции при сохранении стабильности и умеренных вычислительных затратах. Несмотря на разнообразие существующих численных методов, включая схемы высокого порядка, методы второго порядка точности остаются наиболее востребованными: они обеспечивают баланс точности, стабильности и простоты реализации. В связи с этим схема КАБАРЕ представляет особый интерес благодаря своей простой реализации, аппроксимации второго порядка на компактном вычислительном шаблоне и хорошим диссипативно-дисперсионным характеристикам. В этой статье предлагается новый явно-неявный метод, основанный на схеме КАБАРЕ, для численного моделирования конвективного теплообмена в двумерных областях, использующий приближение слабой сжимаемости и применяемый как к плоской, так и к осесимметричной постановке задачи.

Ключевые слова: математическое моделирование, численные методы, схема КАБАРЕ.

Тепловая конвекция играет важную роль во многих сферах – от строительства и электроники до ядерной энергетики и космической техники. В связи с этим актуальной задачей вычислительной гидродинамики является разработка методов, обеспечивающих повышение точности моделирования тепловой конвекции при сохранении устойчивости и умеренных вычислительных затратах. Несмотря на многообразие существующих численных методов, в том числе схем высокого порядка, наиболее востребованными остаются методы второго порядка точности: они обеспечивают баланс точности, устойчивости и простоты реализации. В связи с этим схема «КАБАРЕ» [1] представляет особый интерес благодаря простой реализации, второму порядку аппроксимации на компактном вычислительном шаблоне и хорошими диссипативно-дисперсионными характеристиками. В данной работе для численного моделирования конвективного теплообмена в двумерных областях предложена новая явно-неявная методика, основанная на схеме «КАБАРЕ», использующая приближение слабой сжимаемости и применяемая как к плоским, так и к осесимметричным постановкам задач.

Система уравнений Навье–Стокса в приближении слабой сжимаемости [2] представляет собой смешанную гиперболически-параболическую систему законов сохранения массы, импульса и полной энергии:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial a^2 p u}{\partial x} + \frac{\partial y^v a^2 p v}{\partial y} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial p u}{\partial t} + \frac{\partial p u^2 + p}{\partial x} + \frac{\partial y^v p u v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(y^v \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \rho \beta g_x (T - T^0); \quad (2)$$

$$\frac{\partial p v}{\partial t} + \frac{\partial p u v}{\partial x} + \frac{\partial y^v p v^2}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(y^v \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \beta \rho g_y (T - T^0); \quad (3)$$

$$\frac{\partial C_p T}{\partial t} + \frac{\partial p u C_p T}{\partial x} + \frac{\partial y^v p v C_p T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\chi \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{1}{y^v} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^v \chi \frac{\partial T}{\partial y} \right). \quad (4)$$

Для построения численной методики в расчетной области строится декартова сетка и, в соответствии со схемой КАБАРЕ, вводятся два типа переменных: консервативные переменные, определенные в центрах ячеек, и потоковые переменные, определенные на гранях ячеек.

Алгоритм расчета шага состоит из трех фаз. На первой фазе определяются консервативные переменные на промежуточном временном слое. На этой фазе система уравнений законов сохранения аппроксимируется явно-неявной схемой, в которой конвективные потоки аппроксимируются явно и определяются по потоковым переменным. Диффузионные потоки аппроксимируются неявно по консервативным переменным, а получающаяся система разностных уравнений решается с использованием скалярной прогонки и метода расщепления по направлениям. На второй фазе определяются потоковые переменные на новом временном слое. Здесь используется характеристическая форма уравнений записанная относительно переноса инвариантов. Новые значения инвариантов на гранях ячеек определяются методом экстраполяции в пределах одой ячейки с последующей нелинейной коррекцией на основе принципа максимума. Затем, по инвариантам определенных на гранях ячеек, определяются значения примитивных переменных. На заключительной третьей фазе определяются значения консервативных переменных на новом временном слое. Здесь, как и на первой фазе, система уравнений законов сохранения аппроксимируется явно-неявной схемой, в которой конвективные потоки аппроксимируются явно и определяются по новым потоковым переменным, а диффузионные потоки аппроксимируются неявно по консервативным переменным. Получающаяся система разностных уравнений решается также с использованием метода расщепления по направлениям и скалярной прогонки.

Вычислительный алгоритм реализован на языке C++ и был проверен на ряде задач, имеющих точное решение и задачах, решенных другими методами. В частности, была решена задача о развитии неустойчивости Релея–Тейлора между холодной и горячей жидкостью и задача Девиса [3] о тепловой конвекции в квадратной области для различных чисел Релея. С использованием построенного алгоритма были проведены численные исследования тепловой конвекции в осесимметричных областях.

Литература

1. Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А., Короткин И.А. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. Москва: Издательство МГУ, 2013. 406 с.
2. Chorin A.J. A numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems // Journal of Computational Physics. 1967. Vol. 2, No. 1. P. 12-26.
3. De Vahl Davis G. Natural Convection of Air in a Square Cavity: A Bench Mark Numerical Solution // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 1983. Vol. 3. P. 249-264.

MSC 80A20

Application of the CABARE scheme for numerical simulation of two-dimensional thermal convection

M.S. Eroshkina¹, V.M. Goloviznin¹, Yu.N. Deryugin¹

Branch of Lomonosov Moscow State University in Sarov¹

Abstract: Thermal convection plays an important role in many fields, from construction and electronics to nuclear power and space technology. In this regard, an urgent task of computational fluid dynamics is the development of methods that improve the accuracy of modeling thermal convection while maintaining stability and moderate computational costs. Despite the variety of existing numerical methods, including high-order schemes, the methods of the second order of accuracy remain the most in demand: they provide a balance of accuracy, stability and ease of implementation. In this regard, the CABARE scheme is of particular interest due to its simple implementation, second-order approximation on a compact computational template, and good dissipative-dispersion characteristics. In this paper, a new explicit-implicit technique based on the "CABARE" scheme is proposed for numerical modeling of convective heat transfer in two-dimensional regions, using the weak compressibility approximation and applied to both planar and axisymmetric problem statements.

Keywords: mathematical modeling, numerical methods, CABARET scheme.

УДК 519.63

Сравнительный анализ линейных решателей для безматричного метода Ньютона-Крылова при решении задач газовой динамики неявной схемой для разрывного метода Галёркина*

Жалнин Р.В.¹, Мулюгин А.Д.¹, Вдовин В.В.¹

ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва»¹

Аннотация: Проведено сравнительное исследование эффективности методов решения линейных систем в составе безматричного метода Ньютона-Крылова (JFNK) для численного моделирования двумерных уравнений газовой динамики на основе разрывного метода Галёркина. Рассматривались классический метод минимальных невязок (MINRES) и современный метод индуцированной размерности IDR(s) с различными значениями параметра s . Исследование выполнено на примере задачи о развитии неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. Проанализировано качество получаемых численных решений, спектральные характеристики течения, а также вычислительная производительность алгоритмов. Показано, что все варианты метода IDR(s) обеспечивают сопоставимое с MINRES качество воспроизведения вихревых структур и энергетических спектров. При этом все методы семейства IDR(s) демонстрируют существенно меньшее время выполнения одного шага по времени по сравнению с MINRES, обеспечивая ускорение от 1.5 до 2.5 раз в зависимости от размерности вспомогательного подпространства. Наилучший баланс между скоростью сходимости и вычислительными затратами показал метод IDR(4), что позволяет рекомендовать его в качестве эффективного линейного решателя в составе JFNK для нестационарных задач вычислительной гидродинамики.

Ключевые слова: разрывный метод Галёркина, неявная схема, безматричный метод Ньютона-Крылова, метод MINRES, метод IDR(s).

1. Введение

Разрывный метод Галёркина (Discontinuous Galerkin, DG) – эффективный инструмент численного решения уравнений гиперболического и параболического типов, обеспечивающий высокий порядок точности на неструктурированных сетках [1]. При малых числах Маха явные схемы дискретизации по времени становятся неэффективными из-за жёстких ограничений на шаг по времени (условие Куранта). Переход к неявным схемам снимает это ограничение, но требует решения на каждом временном шаге больших, часто плохо обусловленных систем нелинейных уравнений. Для этого эффективен безматричный метод Ньютона-Крылова (Jacobian-free Newton-Krylov, JFNK) [2], выполняющий ньютоновские итерации без явного построения матрицы Якоби; ключевым элементом JFNK является выбор итерационного метода для решения линейной системы на каждой итерации. В работе сравниваются классический метод минимальных невязок (MINRES) [3] и семейство методов индуцированной раз-

*Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 25-21-00308, <https://rscf.ru/project/25-21-00308/>.

мерности $IDR(s)$ [4, 5] в этом качестве.

2. Математическая модель и численный метод

Рассматривается двумерная система уравнений газовой динамики в консервативной форме

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(U) = 0, \quad (1)$$

где $U = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E, \rho c)^T$ — вектор консервативных переменных, $\mathbf{F}(U)$ — вектор конвективных потоков, ρ — плотность, u, v — компоненты скорости, p — давление ($p = \rho \varepsilon(\gamma - 1)$), E — полная энергия, c — массовая концентрация примеси.

Пространственная дискретизация (1) выполняется методом Галёркина с разрывными кусочно-полиномиальными базисными функциями на ячейках расчётной сетки. Подстановка приближённого решения в слабую форму уравнений и интегрирование по частям приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, интегрирование которой по времени неявной схемой даёт нелинейную систему $\mathcal{Q}_h(U_h) = F_h$, решаемую методом JFNK: на внешних ньютоновских итерациях поправка Δ_h находится из линейной системы $J \Delta_h = F_h - \mathcal{Q}_h(U_h^{(\alpha)})$, где действие якобиана J на вектор аппроксимируется конечно-разностной формулой без явного построения матрицы. Для решения этой линейной системы применяются метод MINRES, обладающий гарантированной сходимостью для симметричных невырожденных систем, но медленно сходящийся на плохо обусловленных системах, характерных для DG-дискретизаций высокого порядка, и метод $IDR(s)$, основанный на построении вложенных подпространств убывающей размерности; параметр s задаёт размерность вспомогательного подпространства и управляет балансом между затратами на итерацию и скоростью сходимости.

3. Тестовая задача

В качестве тестовой рассматривается задача о развитии неустойчивости Кельвина–Гельмгольца [6] в области $\Omega = [0, 1] \times [0, 2]$ с периодическими граничными условиями: начальные условия задают два противоположно направленных сдвиговых слоя (профили плотности, скорости и концентрации в виде $\tanh$) с малым синусоидальным возмущением поперечной скорости. Расчёты выполнены на сетке 256×512 на гибридной системе CPU+GPU (Intel Xeon, NVIDIA T4) при $\varepsilon_J = 10^{-5}$ — оптимальном, по данным предварительных расчётов, компромиссе между точностью и временем счёта.

4. Результаты

Сопоставление графиков (рис. 1) полей завихренности на момент времени $t = 3$ с показывает, что основные вихревые структуры воспроизводятся единообразно для всех решателей: их положение и размеры совпадают независимо от выбора метода. Для MINRES и $IDR(4)$, $IDR(8)$, $IDR(16)$ картины более гладкие, тогда как для $IDR(1)$ и $IDR(2)$ вблизи нижней границы области наблюдаются слабые периодические возмущения — увеличение s подавляет численные артефакты. Энергетические спектры E_k и спектры энтропии Z_k (рис. 2) также практически совпадают для всех методов; наклон спектра в инерционном интервале (E_k между k^{-3} и k^{-4} , $Z_k \sim k^{-1}$) соответствует классической картине двумерной турбулентности. Таким образом, за-

мена MINRES на $IDR(s)$ не искажает физическую картину течения.

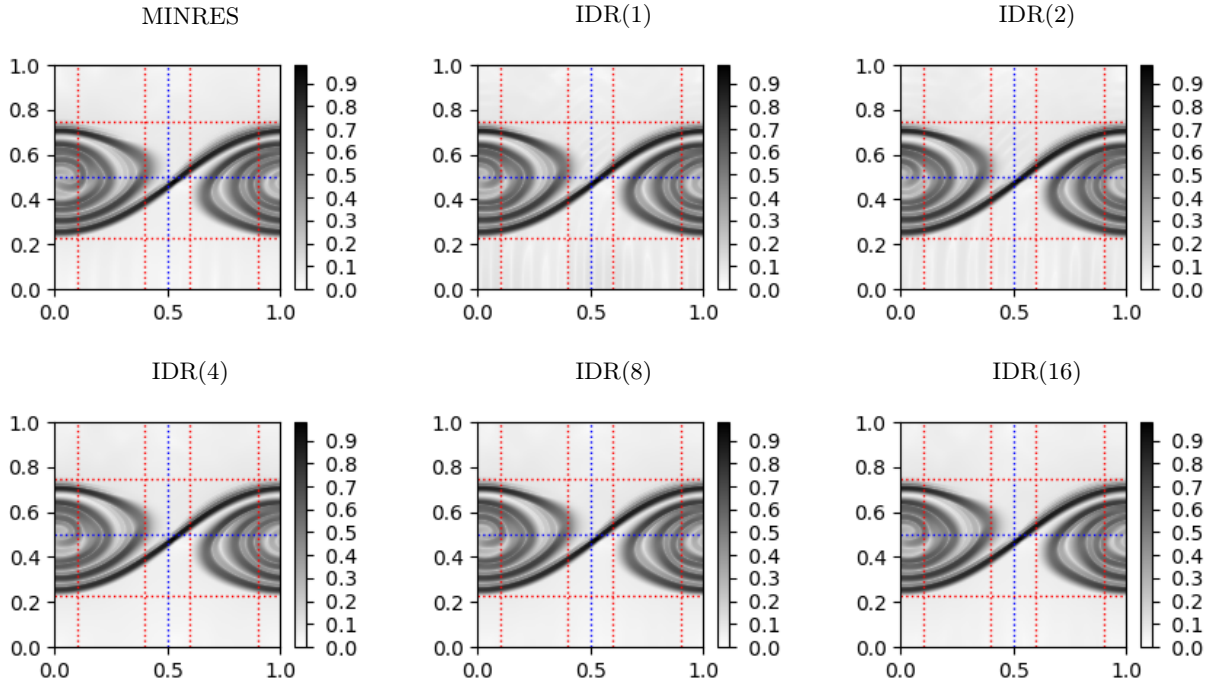


Рис. 1. Шлирен картина течения в области $[0, 1] \times [0, 1]$ на момент времени $t = 3$ с. Синие линии: $x = 0.5$ и $y = 0.5$. Красные линии: $x = 0.1, x = 0.4, x = 0.6, x = 0.9, y = 0.23, y = 0.75$.

По быстродействию (рис. 3) все варианты $IDR(s)$ в среднем превосходят MINRES: наименьшее нормированное время — у $IDR(1)$, $IDR(2)$ и $IDR(4)$ (0.4–0.45 от времени MINRES, ускорение в 2–2.5 раза); $IDR(8)$ — около 0.48–0.5; наиболее затратный $IDR(16)$ — 0.58–0.6, но всё же быстрее MINRES. Метод $IDR(4)$ в среднем требует около трёх внутренних итераций; среднее время шага сокращается с ≈ 0.438 с (MINRES) до ≈ 0.396 с ($IDR(4)$) — общее ускорение ≈ 1.5 раза при устойчивой сходимости итераций Ньютона.

5. Заключение

В работе проведено сравнительное исследование эффективности классического метода минимальных невязок (MINRES) и семейства методов индуцированной размерности $IDR(s)$ в составе безматричного метода Ньютона–Крылова. Рассмотрение выполнено в контексте численного решения двумерных уравнений газовой динамики с помощью неявной схемы для разрывного метода Галёркина на примере задачи о развитии неустойчивости Кельвина–Гельмгольца.

Анализ полученных численных решений, включающий сопоставление шлирен-картин течения и распределений завихренности, показал, что все рассмотренные методы воспроизводят идентичную крупномасштабную вихревую структуру. Сравнение энергетических спектров и спектров энтропии не выявило между методами значимых различий. Это свидетельствует о том, что замена MINRES на $IDR(s)$ не вносит искажений в физическую картину течения и не ухудшает спектральные свойства численного решения.

Методы семейства $IDR(s)$ обеспечивают устойчивое ускорение расчётов по сравнению с MINRES в 1.5–2.5 раза, причём наиболее экономичные варианты $IDR(1)$,

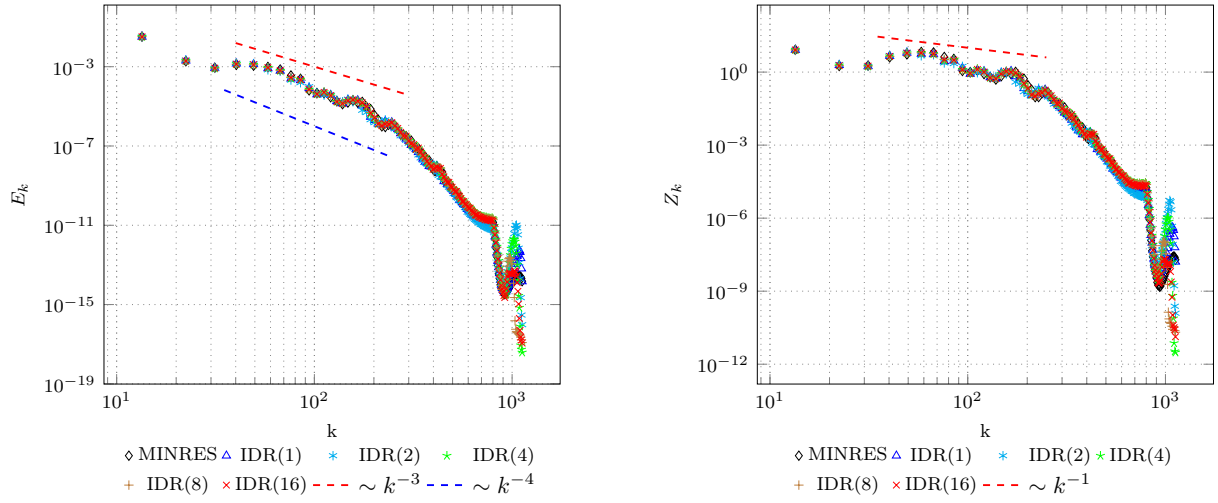


Рис. 2. Энергетические спектры E_k (слева) и спектры энтропии Z_k (справа) на момент времени $t = 3$ с.

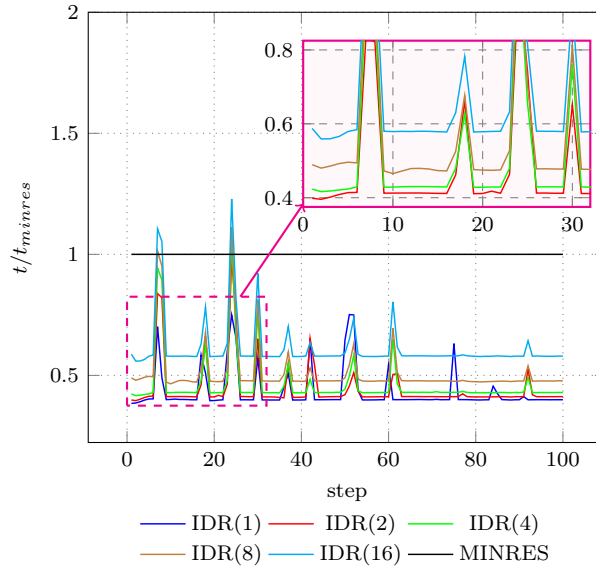


Рис. 3. Время вычислений (нормированное) для методов IDR(s) относительно MINRES.

IDR(2) и IDR(4) затрачивают лишь 40-45% времени MINRES. Хотя при больших s наблюдается возрастание времени счёта на некоторых шагах по времени, производительность IDR(8) и IDR(16) даже в эти моменты не опускается ниже уровня MINRES. Оптимальным выбором по совокупности критериев – быстродействию, стабильности сходимости и качеству решения – является метод IDR(4).

Таким образом, метод IDR(s) является эффективной и целесообразной альтернативой традиционному MINRES в качестве линейного решателя в составе JFNK-алгоритмов для нестационарных задач газовой динамики, решаемых с помощью DG-дискретизаций высокого порядка. Полученные результаты особенно актуальны для крупномасштабных расчетов, где сокращение времени выполнения является критически важным. В качестве рекомендованного значения параметра метода обоснован выбор $s = 4$, обеспечивающий оптимальное сочетание быстродействия и надежности

на гибридных вычислительных системах с GPU.

Благодарности. Авторы выражают благодарность Зининой С.Х. и Нефедову М.С. за интерес к работе и ценные замечания.

Литература

1. Cockburn B. An introduction to the Discontinuous Galerkin method for convection-dominated problems // *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 1998. Vol. 1697. P. 151-268.
2. Knoll D.A., Keyes D.E. Jacobian-free Newton-Krylov methods: a survey of approaches and applications // *Journal of Computational Physics*. 2004. Vol. 193, No. 2. P. 357-397.
3. Paige C.C., Saunders M.A. Solution of sparse indefinite systems of linear equations // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1975. Vol. 12, No. 4. P. 617-629.
4. Sonneveld P., van Gijzen M.B. IDR(s): a family of simple and fast algorithms for solving large nonsymmetric linear systems // *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2008. Vol. 31, No. 2. P. 1035-1062.
5. van Gijzen M.B., Sonneveld P. Algorithm 913: An elegant IDR(s) variant that efficiently exploits biorthogonality properties // *ACM Transactions on Mathematical Software*. 2009. Vol. 38, No. 1. P. 1-19.
6. Lecoanet D., McCourt M., Quataert E., Burns K. J., Vasil G. M., Oishi J. S., Brown B. P., Stone J. M., O’Leary R. M. A validated non-linear Kelvin–Helmholtz benchmark for numerical hydrodynamics // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2016. Vol. 455, No. 4. P. 4274–4288.

MSC 65F10

Comparative analysis of linear solvers for the Jacobian-free Newton–Krylov method for solving gas dynamics problems using an implicit scheme for the Discontinuous Galerkin Method

R.V. Zhalnin¹, A.D. Mulyugin¹, V.V. Vdovin¹

National Research Mordovia State University¹

Abstract: A comparative study of the efficiency of linear solvers within the Jacobian-free Newton–Krylov (JFNK) framework for the numerical simulation of two-dimensional gas dynamics equations using the discontinuous Galerkin method is presented. The classical MINRES method and the modern induced dimension reduction method IDR(s) with various values of parameter s are considered. The study is performed on the example of the Kelvin–Helmholtz instability problem. The accuracy of the obtained numerical solutions, spectral characteristics of the flow, and computational performance of the algorithms are analyzed. All IDR(s) variants are shown to provide a quality of vortex structure resolution and energy spectra comparable to that of MINRES. Meanwhile, all methods from the IDR(s) family require significantly less wall-clock time per time step compared to MINRES, achieving a speedup factor from 1.5 to 2.5, depending on the dimension of the auxiliary subspace. The IDR(4) method demonstrates the best balance between convergence rate and computational cost, which allows us to recommend it as an efficient linear solver within the JFNK approach for unsteady computational fluid dynamics problems.

Keywords: Discontinuous Galerkin Method, Implicit Scheme, Jacobian-free Newton–Krylov Method, MINRES method, IDR(s) method

УДК 519.853.4

Исследование схем редукции размерности для алгоритма поиска нуля неотрицательной функции*

Зайцев А.С.¹, Баркалов К.А.¹

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского¹

Аннотация: В работе рассматривается задача поиска глобального минимума многомерной многоэкстремальной функции, принимающей неотрицательные значения и достигающей в области определения нулевого значения. Такую задачу можно интерпретировать как задачу минимизации невязки между теоретическими и экспериментальными данными. Для ускорения сходимости алгоритма поиска нуля неотрицательной многомерной функции предлагается редуцировать размерность задачи с помощью аппроксимации кривой Пеано – неинъективной развертки. Проведены вычислительные эксперименты, подтверждающие эффективность предложенного подхода к редукции размерности в данной задаче.

Ключевые слова: глобальная оптимизация, редукция размерности, кривые Пеано, поиск нуля функции.

1. Введение

Данная работа является продолжением исследования Алгоритма Поиска Нуля (АПН) неотрицательной функции [1, 2]. Для редукции размерности АПН использует кривые Пеано [3, 4], которые отображают N -мерную область D на единичный отрезок вещественной оси. Новым элементом исследования является использование аппроксимации кривой Пеано [5], которая для любой точки из N -мерной области D ставит в соответствие множество точек на единичном отрезке вещественной оси. Это позволяет ускорить сходимость алгоритма к глобальному минимуму.

В проведенных вычислительных экспериментах АПН, использующий разные аппроксимации кривых Пеано, сравнивается с широко известным методом глобальной оптимизации DIRECT [6].

2. Постановка задачи

Классическая задача поиска минимума многомерной многоэкстремальной функции $\phi(y)$, где $y \in R^n (n > 1)$ в N -мерном гиперкубе D записывается в следующем виде:

$$\phi(y^*) = \min\{\phi(y), y \in D\}, D = \{y \in R^n, a_i \leq y_i \leq b_i, i = \overline{1, n}\} \quad (1)$$

Дополнительно потребуем, чтобы функция $\phi(y)$ удовлетворяла следующим условиям:

1. $\phi(y) \geq 0, y \in D$ (неотрицательность функции);
2. Существует вектор $y^* \in D$ такой, что $\phi(y^*) = 0$ (существование нуля функции);

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, проект FSWR-2026-0007.

3. Функция удовлетворяет условию:

$$|\phi(y') - \phi(y'')| \leq L |y' - y''|, y', y'' \in D, 0 < L < \infty,$$

где значение L не задано (липшицевость функции).

Функцию $\phi(y)$, удовлетворяющую описанным выше условиям, будем обозначать $\psi(y)$, где $y \in R^n$ ($n > 1$). Очевидно, что для рассматриваемой функции $\psi(y)$ ($y \in D$) задача поиска глобального минимума эквивалентна задачи поиска нуля функции (поиска корня функции).

Чтобы избежать экспоненциального роста вычислений при росте размерности задачи N поставленная многомерная задача редуцируется до одномерной. Для редукции размерности можно использовать кривые Пеано [3,4]. Аппроксимации таких кривых (развертки) обычно обладают свойством однозначности (инъективности): любой точке (прообразу) отрезка $[0, 1]$ вещественной оси соответствует единственная точка (образ) в N -мерной области D . В результате точкам, близким в области D , могут соответствовать расположенные далеко друг от друга прообразы на отрезке $[0, 1]$ вещественной оси. Данный эффект в некоторых случаях может негативно сказаться на скорости сходимости метода оптимизации. Чтобы избежать подобного эффекта, предлагается использовать так называемую неинъективную развертку. В работе [5] предложены развертки, обладающие следующим свойством: любой точке в N -мерной области D соответствует множество (но не более чем 2^N) прообразов на отрезке $[0, 1]$ вещественной оси. Таким образом исходная многомерная задача (1) сводится к одномерной задаче следующего вида:

$$\psi(y^*(x)) = \min\{\psi(y(x)), x \in [0, 1]\} \quad (2)$$

Функция $\psi(y(x))$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $\psi(y(x)) \geq 0, x \in [0, 1]$ (неотрицательность функции);
2. Существует точка $x^* \in [0, 1]$ такая, что $\psi(y^*(x)) = 0$ (существование нуля функции);
3. Функция удовлетворяет условию:

$$|\psi(y(x')) - \psi(y(x''))| \leq H \sqrt[N]{|x' - x''|}, x', x'' \in [0, 1], 0 < H < \infty,$$

где значение H не задано. Из [4] известно, что константа Гёльдера H связана с константой Липшица L соотношением $H = 4L\sqrt[N]{N}$ (гёльдеровость функции).

Для решения редуцированной задачи применим Алгоритм Поиска Нуля (АПН) [1,2]. Данный алгоритм специально разрабатывается для такого класса задач.

3. Описание алгоритма

Алгоритм поиска нуля функции $\psi(y(x))$ порождает последовательность точек x^k . В этих точках вычисляется значение функции $z^k = \psi(y(x^k)), k = 0, 1, 2, \dots$. Предполагается, что погрешность пренебрежимо мала. Первые два испытания осуществляются в граничных точках, то есть $x^0 = 0$ и $x^1 = 1$ соответственно. А выбор точек $x^{k+1}, k \geq 1$, очередного $(k + 1)$ -го испытания осуществляются по следующим правилам:

1. Перенумеруем (нижнем индексом) точки $x_i, 0 \leq i \leq k$, в порядке возрастания значения координаты:

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_k = 1. \quad (3)$$

2. Для каждого интервала $(x_i - x_{i-1}), 1 \leq i \leq k$, вычислим величину:

$$K(i) = \frac{z_i + z_{i-1}}{\Delta_i} \quad (4)$$

где $\Delta_i = \sqrt[n]{x_i - x_{i-1}}, z_i = \psi(y(x_i))$, называемую характеристикой этого интервала.

3. Определим интервал $(x_t - x_{t-1})$, которому соответствует минимальная характеристика K :

$$K(t) = \min\{K(i), 1 \leq i \leq k\}. \quad (5)$$

Если минимальное значение соответствует нескольким интервалам, то в качестве значения t выбирается наименьшее число, удовлетворяющее условию (3).

4. Определим точку x^{k+1} очередного испытания следующим образом:

$$x^{k+1} = \frac{x_t + x_{t-1}}{2}. \quad (6)$$

5. Проведем очередное испытание в точке x^{k+1} :

$$z^{k+1} = \psi(y(x^{k+1})). \quad (7)$$

и примем $k = k + 1$.

6. Проверим условие остановки алгоритма:

- а. Число итераций k достигло значения k_{max} (исчерпание вычислительного ресурса).
- б. Было достигнуто значение:

$$\psi_k^* = \min\{\psi(y(x_i)) : 0 \leq i \leq k\} \leq \sigma, \quad (8)$$

где $\sigma > 0$ (предустановленная допустимая погрешность в оценке нулевого значения функции $\psi(y(x))$).

4. Результаты экспериментов

В вычислительных экспериментах было проведено сравнение трех алгоритмов: АПН с кусочно-линейной разверткой, АПН с неинъективной разверткой, и метода DIRECT [6]. Во всех методах в критерии остановки использовалось значение $\sigma = 10^{-2}$; в АПН использовалась развертка с параметром построения $m = 10$, а в методе DIRECT – параметр $\epsilon = 10^{-4}$. Сравнение проводилось путем решения 100 задач, сформированных на основе функций вида:

$$f(y) = \sum_{i=1}^{14} (A_i(2i\pi y_1) + B_i(2i\pi y_2)), \quad y \in [0, 1]^2, \quad (9)$$

где значения $A_i, B_i, 1 \leq i \leq 14$, независимо и равномерно распределены на отрезке $[-1, 1]$. Указанные функции преобразовывались к неотрицательным следующим образом:

$$\phi(y) = f(y) - f^*, \quad (10)$$

где f^* являлось известным значением в точке глобального минимума. Линии уровня одной из функций $\phi(y)$ представлены на рис. 1; на нем же отмечены точки 55 поисковых испытаний, выполненных АПН с неинъективной разверткой (левый рисунок), и точки 232 поисковых испытаний, выполненных при решении той же задачи методом DIRECT (правый рисунок).

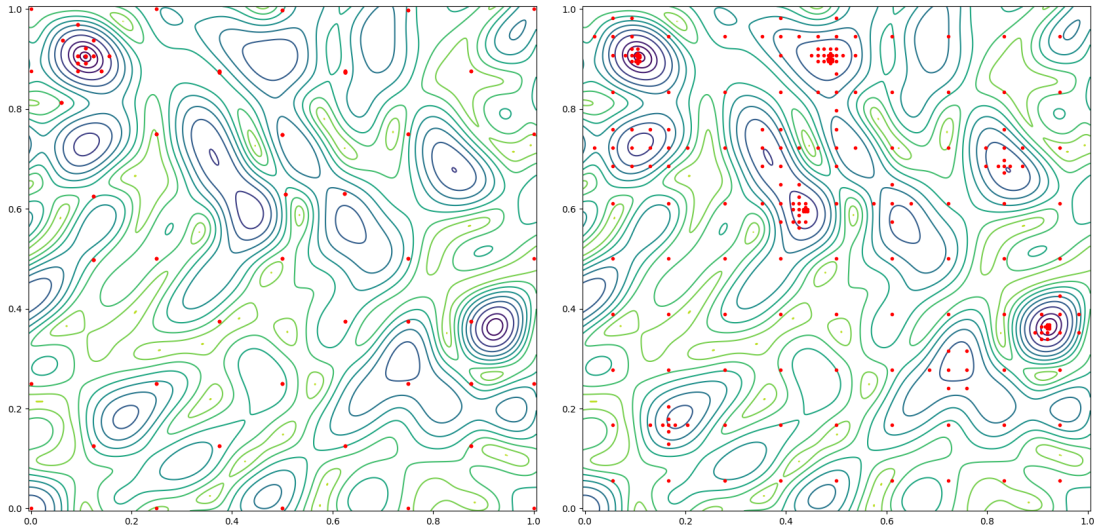


Рис. 1. График целевой функции и точек испытаний, выполненных АПН с неинъективной разверткой (слева) и DIRECT (справа)

В результате решения всей серии из 100 задач было установлено, что среднее число поисковых испытаний, необходимое для решения задачи, составляет 140 для метода DIRECT, 147 для исходного варианта АПН с кусочно-линейной разверткой, и 100 для АПН с неинъективной разверткой. Медианное число испытаний для перечисленных методов составило 101, 111, и 84 соответственно. Результаты показывают, что АПН с неинъективной разверткой требует значительно меньшего числа поисковых испытаний как по сравнению со своим прототипом, так и по сравнению с методом DIRECT.

5. Заключение

По результатам проведенного вычислительного эксперимента можно отметить, что тип развертки оказывает влияние на работу АПН. В большей степени это влияние сказывается на локальной фазе поиска, т.е. когда алгоритм попал в область притяжения глобального минимума. Это связано с тем, что кусочно-линейная развертка, обеспечивающая однозначное отображение единичного отрезка вещественной оси на N -мерную область D , приводит к порождению локальных минимумов, которые существуют только в редуцированной одномерной задаче. Неинъективная развертка лишена подобного эффекта, что позволяет АПН за значительно меньшее число итераций по сравнению с методом DIRECT и по сравнению со своим прототипом решать задачи минимизации многоэкстремальных функций.

Литература

1. Зайцев А.С., Баркалов К.А. Об алгоритме поиска глобального минимума для одного класса многоэкстремальных задач // Сборник трудов IV Молодёжной школы. Н.Новгород: Издательство ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2025. С. 39-42.
2. Баркалов К.А., Зайцев А.С., Стронгин Р.Г. Алгоритм поиска нуля неотрицательной многоэкстремальной функции // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2026. Т. 66, № 3. С. 348-360.
3. Стронгин Р.Г. Численные методы в многоэкстремальных задачах (информационно-статистический подход). Москва: Наука, 1978. 240 с.
4. Стронгин Р.Г. Поиск глобального оптимума. Москва: Знание, 1990.
5. Sergeyev D.Y., Strongin R.G., Lera D. Introduction to Global Optimization Exploiting Space-Filling Curves // Springer Briefs in Optimization. 2013.
6. Jones D.R., Perttunen C.D., Stuckman B.E. Lipschitzian optimization without the Lipschitz constant // Journal of Optimization Theory and Applications. 1993. Vol. 79, No. 1. P. 157-181.

MSC 90C26

Investigation of dimensionality reduction schemes for an algorithm for finding the zero value of a non-negative function

A.S. Zaitsev¹, K.A. Barkalov¹

Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod¹

Abstract: The paper addresses the problem of finding the global minimum of a multi-dimensional multiextremal function that takes non-negative values and attains zero within its domain. Such a problem can be interpreted as minimizing the residual between theoretical and experimental data. To accelerate the convergence of an algorithm for locating the zero of a non-negative multidimensional function, it is proposed to reduce the dimensionality of the problem using an approximation of the Peano curve – a non-injective evolut. Computational experiments have been carried out confirming the effectiveness of the proposed approach to dimensionality reduction in this problem.

Keywords: global optimization, dimensionality reduction, Peano curves, zero value of a function.

УДК 519.171

Алгоритмическая сложность проверки изоморфизма графов, являющихся топологическими инвариантами градиентно-подобных диффеоморфизмов на поверхностях

Зинина С.Х.¹, Красулин Н.И.¹

ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва»

Аннотация: Топологическая классификация структурно-устойчивых потоков, а также топологическая классификация некоторых многомерных каскадов сводится к комбинаторной задаче различения графов с точностью до изоморфизма. В работе оценивается алгоритмическая сложность проверки изоморфизма трехцветных и двухцветных графов, которые являются топологическими инвариантами для градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей.

Ключевые слова: топологическая классификация, градиентно-подобные диффеоморфизмы, топологическая сопряженность, трехцветный граф, двухцветный граф, алгоритмическая сложность.

Одной из важнейших задач динамических систем является их топологическая классификация [1], зачастую топологическим инвариантом является тот или иной граф, тем самым исходная задача топологической классификации сводится к задаче проверки изоморфизма графов.

В работе [2] доказано, что трехцветный граф T_f , оснащенный автоморфизмом P_f , является полным топологическим инвариантом градиентно-подобных диффеоморфизмов, для более узкого класса градиентно-подобных диффеоморфизмов, являющихся прямыми произведениями двух грубых преобразований окружности, в работе [3] вводится двухцветный граф D_f , оснащенный автоморфизмом P_f , который также является полным топологическим инвариантом.

Два двухцветных или трехцветных графа называются изоморфными, если существует биекция между множествами их вершин, сохраняющая отношения инцидентности и цветности, а также сопрягающая их автоморфизмы.

В работах [2, 3] доказано, что два диффеоморфизма являются топологически сопряженными тогда и только тогда, когда соответствующие им двухцветные или трехцветные графы являются изоморфными.

Любой трехцветный граф T_f можно однозначно представить в виде набора перестановок трех цветностей $T_f = (\sigma_s, \sigma_t, \sigma_u)$. Задача проверки изоморфизма трехцветных графов и сводится к задаче поиска перестановки, сопрягающей перестановки для четырех пар перестановок $(\sigma_s, \sigma_t, \sigma_u, P_f)$. Алгоритмическая сложность данной задачи равна $O\left(\frac{n^2}{\log n}\right)$, что является более эффективным с точки зрения алгоритмической сложности, чем существовавшие ранее алгоритмы со сложностью $O(n^3 \log n)$ и $O(n^3)$ [4].

Изоморфизм и автоморфизм двухцветного графа D_f также являются перестановками. Любой двухцветный граф D_f можно представить в виде набора перестановок двух цветностей $D_f = (\sigma_s, \sigma_u)$, который, в отличие от аналогичного представления

трехцветного графа, не будет являться однозначным. В общем случае алгоритмическая сложность решения проверки изоморфизма двучетных графов будет эквивалентна задаче для трехцветного графа и равна $O\left(\frac{n^2}{\log n}\right)$ или $O(n)$.

Литература

1. Гринес В.З., Починка О.В. Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три. Серия. Математика и механика. Москва-Ижевск: Издательство «РХД», 2011. 424 с.
2. Гринес В.З., Капкаева С.Х., Починка О.В. Трехцветный граф как полный топологический инвариант для градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей // Математический сборник. 2014. Т. 205, № 10. С. 19-46. DOI: 10.4213/sm8328.
3. Зинина С.Х., Медведева М.А. Двучетный граф как средство классификации декартовых произведений грубых преобразований окружности // Огарёв-online. 2022. Т. 10, № 14. С. 91-96.
4. Grines V.Z., Malyshev D.S., Pochinka O.V., Zinina S.Kh. Efficient Algorithms for the Recognition of Topologically Conjugate Gradient-like Diffeomorphisms // Regular and Chaotic Dynamics. 2016. Vol. 21, No. 2. P. 189-203. DOI: 10.1134/S1560354716020040.

MSC 05C80, 37D15

Algorithmic complexity of checking isomorphism of graphs that are topological invariants of gradient-like diffeomorphisms on surfaces

S.K. Zinina¹, N.I. Krasulin¹

National Research Mordovia State University¹

Abstract: The topological classification of structurally stable flows, as well as the topological classification of some multidimensional cascades, is reduced to the combinatorial problem of distinguishing graphs up to isomorphism. This paper evaluates the algorithmic complexity of isomorphism testing for three-color and two-color graphs, which are topological invariants for gradient-like surface diffeomorphisms.

Keywords: topological classification, gradient-like diffeomorphisms, topological conjugacy, three-color graph, two-color graph, algorithmic complexity.

УДК 004.042

О пределе обнаружения ботов по временным меткам

Калабкин Е.С.¹, Мамедова Т.Ф.¹

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет¹

Аннотация: В статье методами имитационного моделирования исследуется устойчивость алгоритмов обнаружения ботов в системах обмена сообщениями к усложнению их поведения. Пользователь описывается самовозбуждающимся точечным процессом Хоукса. На его основе построена иерархия из шести уровней маскировки бота. Численный эксперимент даёт кривую деградации детектора, выявляет парадоксальный рост обнаружимости при более полной имитации и устанавливает принципиальный предел качества индивидуальной классификации по временным меткам.

Ключевые слова: имитационное моделирование, точечный процесс Хоукса, обнаружение ботов, метод максимального правдоподобия, адверсарная адаптация.

В мессенджерах обнаружение ботов затруднено: содержание переписок и графы связей недоступны по соображениям приватности, поэтому единственным источником данных остаётся последовательность временных меток событий пользователя. Цель работы – методами имитационного моделирования оценить, как качество детектора зависит от сложности маскировки бота и где лежит предел обнаружимости [1, 2].

Определены шесть уровней маскировки по возрастанию сложности:

L_0 – детерминированный интервал;

L_1^{CTOX} – равномерный случайный интервал;

L_1 – пуассоновский процесс ($\alpha = 0$) с человеческой частотой;

L_2 – с циркадной модуляцией;

L_3 – полная имитация (Хоукс и циркадный ритм).

Параметры L_3 -бота берутся из распределений, характерных для людей, поэтому он статистически не отличим по одиночным признакам.

Траектории генерируются методом обратного преобразования. Параметры по временным меткам оцениваются методом максимального правдоподобия (рекурсия Озаки) и формируют вектор из 18 признаков: оценки μ , α , β статистики межсобытийных интервалов и характеристики циркадного ритма. Классификация осуществлена ансамблем решающих деревьев (Random Forest), качество F_1 – мерой при разбиении 70/30 (5 прогонов). Генератор и детектор реализованы на Go; эксперименты воспроизводимы.

Численно построена кривая деградации детектора (рис. 1): $F_1 = 1.00 (L_0, L_1^{CTOX}) \rightarrow 0.88(L_1) \rightarrow 0.74(L_2) \rightarrow 0.78(L_3)$. Самое резкое падение наблюдается при включении ботом циркадного ритма ($L_1 \rightarrow L_2$).

Обнаружен парадокс: более совершенная имитация (L_3) не снижает, а слегка повышает обнаружимость (0.78 против 0.74)

Парадокс объясняется не свойствами бота, а асимметрией распределения признака между классами: у L_3 -ботов самовозбуждение включено всегда, у людей – лишь у половины, и эта разница сама становится различимым признаком.

Таким образом, для индивидуального детектора по временным меткам существует потолок разделимости: F_1 выходит на плато 0.74–0.78 уже на L_2 и не растёт при

дальнейшей имитации.

Потолок принципиален – бот с человеческими параметрами неотличим в индивидуальном пространстве признаков, и его расширение (новые статистики, нейросети) потолок не поднимает.

Преодоление возможно лишь через признаки, зависящие от других пользователей, что обосновывает переход к каскадной архитектуре обнаружения.

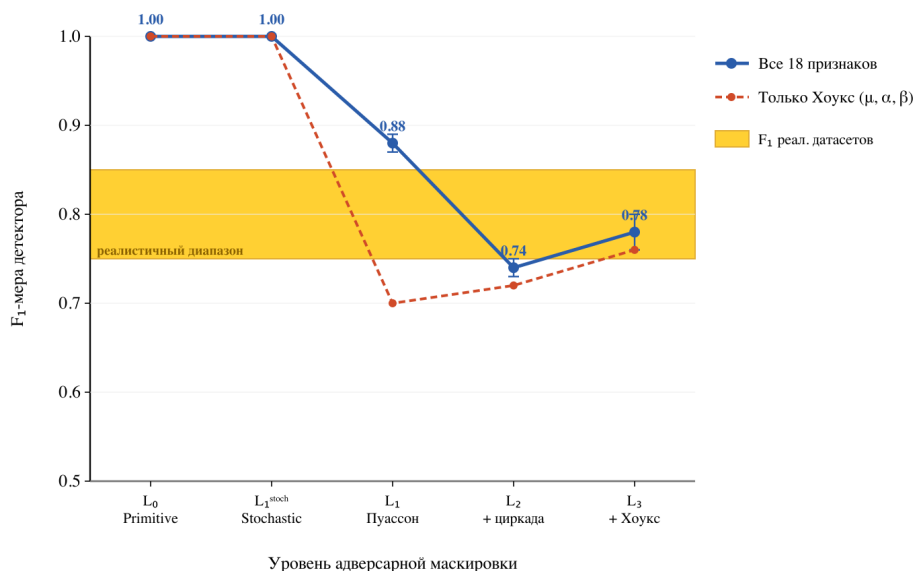


Рис. 1. Кривая деградации детектора по уровням адверсарной маскировки.

Полученная зависимость сведена воедино на рис. 1. График наглядно показывает, что качество детектора падает при усложнении маскировки и уже на уровне L_2 выходит на плато 0.74–0.78, не восстанавливаясь при дальнейшей имитации.

Литература

1. Cresci S. A decade of social bot detection // Communications of the ACM. 2020. Vol. 63, No. 10. P. 72-83. URL: <https://www.sci-hub.ru/10.1145/3409116>.
2. Cresci S., Di Pietro R., Petrocchi M. et al. The paradigm-shift of social spambots // Proc. 26th Int. Conf. on World Wide Web Companion. 2017. P. 963-972.

MSC C94A99

On the Detection Limit of Bots Based on Timestamps

E.S. Kalabkin¹, T.F. Mamedova¹

National Research Mordovia State University¹

Abstract: Simulation modeling is used to study the robustness of bot-detection algorithms in messaging systems against increasing behavioral sophistication of bots. A user is modeled as a self-exciting Hawkes point process, on top of which a hierarchy of six adversarial masking levels is constructed. A numerical experiment yields the detector degradation curve, reveals a paradoxical increase in detectability under more complete imitation, and establishes a fundamental ceiling on the quality of individual classification based on event timestamps alone.

Keywords: simulation modeling, Hawkes point process, bot detection, maximum likelihood estimation, adversarial adaptation.

УДК 519.63:544.47

Многокритериальная оптимизация технологических параметров гидроизомеризации *n*-гексадекана с учетом диффузионных ограничений в грануле цеолитного катализатора

Конченко П.А.¹, Губайдуллин И.М.^{1,2}

УГНТУ¹, Институт нефтехимии и катализа УФИЦ РАН²

Аннотация: Рассматривается математическая модель процесса гидроизомеризации *n*-гексадекана на бифункциональном цеолитном катализаторе. Модель включает укрупненную кинетическую схему превращений, стационарное описание внутригранульного массопереноса в цилиндрической грануле катализатора и расчет коэффициентов эффективности реакций. Предложен вычислительный алгоритм перехода от экспериментально определяемых кажущихся констант скорости к истинным кинетическим параметрам с последующим расчетом выходных характеристик процесса при изменении структурно-диффузионных свойств катализатора. На основе модели формулируется задача многокритериальной оптимизации технологических параметров по температуре и времени контакта.

Ключевые слова: гидроизомеризация, *n*-гексадекан, математическое моделирование, внутригранульная диффузия, коэффициент эффективности, многокритериальная оптимизация.

1. Постановка задачи

Гидроизомеризация длинноцепочечных нормальных парафинов является одним из способов получения низкозастывающих дизельных топлив. Целевым направлением процесса является превращение линейных углеводородов в разветвленные изомеры, тогда как побочные реакции гидрокрекинга приводят к образованию более легких продуктов и снижению выхода жидкой фракции. В качестве модельного соединения рассматривается *n*-гексадекан, характеризующий поведение тяжелых нормальных парафинов дизельной фракции [1].

Укрупненная реакционная схема процесса записывается в виде



Здесь *A* – *n*-гексадекан, *B* – изогексадекан, *C* – водород, *D* – газообразные продукты гидрокрекинга, *E* – жидкие продукты гидрокрекинга. Целевым продуктом является *B*, поэтому требуется обеспечить увеличение выхода изомерного продукта при одновременном ограничении образования продуктов *D* и *E*.

В кинетическом подходе параметры модели определяются по экспериментальным данным как кажущиеся константы скорости. Температурная зависимость каждой

константы задается уравнением Аррениуса:

$$k_j(T) = k_{0,j} \exp \left(-\frac{E_{a,j}}{RT} \right), \quad (4)$$

где $k_{0,j}$ — предэкспоненциальный множитель, $E_{a,j}$ — энергия активации, R — универсальная газовая постоянная, T — температура. Однако кажущиеся константы отражают не только собственную химическую кинетику, но и влияние внутригранульного массопереноса. Поэтому такая модель не позволяет напрямую оценить, как изменение структуры пористой гранулы катализатора влияет на скорости реакций и выходные характеристики процесса.

2. Модель массопереноса в грануле катализатора

Для учета диффузионных ограничений рассматривается цилиндрическая гранула катализатора радиуса R_g . В стационарном режиме распределение мольной доли компонента i внутри гранулы описывается уравнением диффузии–реакции [2–4]:

$$0 = D_{\text{eff},i} \left(\frac{d^2 y_i}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dy_i}{dr} \right) + R_i(\mathbf{y}, T), \quad 0 < r < R_g, \quad (5)$$

где y_i — мольная доля компонента, $D_{\text{eff},i}$ — эффективный коэффициент диффузии, R_i — источниковый член, определяемый стехиометрией реакций и локальными скоростями. Граничные условия имеют вид

$$\left. \frac{dy_i}{dr} \right|_{r=0} = 0, \quad (6)$$

$$y_i(R_g) = y_{i,s}. \quad (7)$$

Первое условие соответствует симметрии в центре гранулы, второе задает мольную долю компонента на внешней поверхности гранулы.

Локальные скорости реакций зависят от радиальной координаты:

$$r_j(r) = r_j(y_A(r), y_B(r), y_C(r), T, k_j^{\text{true}}). \quad (8)$$

Средняя скорость реакции по объему цилиндрической гранулы определяется выражением

$$\bar{r}_j = \frac{2}{R_g^2} \int_0^{R_g} r_j(r) r dr. \quad (9)$$

Коэффициент эффективности реакции j вводится как отношение средней скорости реакции в грануле к скорости на поверхности:

$$\eta_j = \frac{\bar{r}_j}{r_{j,s}}, \quad r_{j,s} = r_j(y_A(R_g), y_B(R_g), y_C(R_g), T, k_j^{\text{true}}). \quad (10)$$

При $\eta_j \approx 1$ диффузионные ограничения малы, а при $\eta_j < 1$ внутренняя поверхность гранулы используется не полностью.

Связь между кажущейся и истинной константами скорости задается соотношением

$$k_j^{\text{app}} = \eta_j k_j^{\text{true}}. \quad (11)$$

Эффективный коэффициент диффузии определяется через структурные характеристики катализатора:

$$r_p = \frac{2V_{\text{pore}}}{S_{\text{BET}}}, \quad D_{K,i} = \frac{2}{3}r_p \sqrt{\frac{8RT}{\pi M_i}}, \quad D_{\text{eff},i} = D_{K,i} \frac{\varepsilon}{\tau_{\text{tort}}}. \quad (12)$$

где r_p — эффективный радиус пор, V_{pore} — объем пор, S_{BET} — удельная поверхность, M_i — молярная масса компонента, ε — пористость, τ_{tort} — извилистость порового пространства.

3. Общая математическая модель процесса

Для описания изменения состава реакционной смеси по времени контакта τ используется система обыкновенных дифференциальных уравнений [5]:

$$\frac{dy_i}{d\tau} = \sum_{j=1}^{N_r} \nu_{ij} \eta_j r_j(y_i, T, k_j^{\text{true}}), \quad i = \overline{1, N_c}. \quad (13)$$

где y_i — мольная доля компонента i , ν_{ij} — стехиометрический коэффициент, N_r и N_c — число реакций и компонентов соответственно. В отличие от модели, основанной только на k_j^{app} , система (13) содержит коэффициенты эффективности η_j , получаемые из решения диффузионно-кинетической задачи в грануле катализатора.

Выходные характеристики процесса рассчитываются по мольным долям компонентов на выходе:

$$X_A = \frac{y_A^0 - y_A}{y_A^0}, \quad Y_{\text{iso}} = \frac{y_B - y_B^0}{y_A^0}, \quad (14)$$

$$S_{\text{iso}} = \frac{y_B - y_B^0}{y_A^0 - y_A}, \quad Y_{\text{crk}} = \frac{y_D + y_E - y_D^0 - y_E^0}{y_A^0}. \quad (15)$$

Здесь X_A — конверсия н-гексадекана, Y_{iso} — выход изомерного продукта, S_{iso} — селективность по изомерному продукту, Y_{crk} — выход продуктов гидрокрекинга.

Вычислительный алгоритм включает определение кажущихся констант скорости k_j^{app} по экспериментальным данным, расчет структурно-диффузионных параметров гранулы, решение краевой задачи (5)–(7), вычисление средних скоростей реакций и коэффициентов эффективности η_j , а также переход к истинным константам по соотношению $k_j^{\text{true}} = k_j^{\text{app}} / \eta_j$. После этого для новой структуры катализатора пере-считываются $D_{\text{eff},i}$, η_j , эффективные скорости реакций и выходные характеристики процесса без проведения дополнительного натурного эксперимента.

4. Многокритериальная оптимизация

В качестве управляемых технологических параметров рассматриваются температура T и время контакта τ :

$$x = (T, \tau), \quad x \in \Omega = [T_{\min}, T_{\max}] \times [\tau_{\min}, \tau_{\max}]. \quad (16)$$

Задача однокритериальной оптимизации может быть записана как

$$x^* = \arg \max_{x \in \Omega} F(x), \quad (17)$$

где $F(x)$ — выбранный технологический критерий, например выход изомерного продукта или взвешенная функция нескольких показателей.

Для более полного описания процесса используется многокритериальная постановка [6]:

$$\Phi(x) = (X_A(x), Y_{\text{iso}}(x), S_{\text{iso}}(x), -Y_{\text{crk}}(x)) \rightarrow \max. \quad (18)$$

Знак «минус» перед Y_{crk} используется для приведения задачи минимизации выхода побочных продуктов к общей форме максимизации. В этом случае результатом оптимизации является не одна точка, а множество недоминируемых решений — фронт Парето:

$$\mathcal{P} = \{x \in \Omega : \nexists x' \in \Omega : \Phi_l(x') \geq \Phi_l(x) \forall l, \\ \Phi_l(x') > \Phi_l(x) \text{ хотя бы для одного } l\}. \quad (19)$$

Фронт Парето позволяет определить компромиссные режимы, при которых невозможно увеличить конверсию, выход или селективность без ухудшения хотя бы одного другого показателя. Такой подход особенно важен для гидроизомеризации н-гексадекана, поскольку повышение температуры и времени контакта может увеличивать глубину превращения, но одновременно усиливать побочные реакции гидрокрекинга.

5. Заключение

Разработанная математическая модель связывает кинетику гидроизомеризации н-гексадекана, внутригранульную диффузию и выходные характеристики процесса. Введение коэффициента эффективности позволяет перейти от кажущихся констант скорости к истинным кинетическим параметрам и оценить влияние структуры гранулы катализатора на скорости реакций. Предложенная постановка оптимизации дает возможность выбирать рациональные технологические режимы с учетом нескольких критериев: повышения конверсии, выхода и селективности по изомерному продукту при снижении выхода продуктов гидрокрекинга.

Модель может применяться для предварительного анализа каталитических систем, прогнозирования состава реакционной смеси при изменении структуры катализатора и сокращения объема экспериментальных исследований.

Исследование выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания Института нефтехимии и катализа УФИЦ РАН FMRS-2025-0031 «Компьютерное моделирование химических и химико-технологических процессов: разработка и тестирование новых алгоритмов и программ».

Верификация модели выполнена на базе экспериментальных данных, предоставленных Лабораторией молекулярно-ситовых бифункциональных каталитических систем для получения низкозастывающих дизельных топлив ИНК УФИЦ РАН (зав. лаб. Аглиуллин М.Р.).

Литература

1. Weitkamp J. Isomerization of long-chain n-alkanes on a Pt/CaY zeolite catalyst // Industrial and Engineering Chemistry Product Research and Development. 1982. Vol. 21, No. 4. P. 550-558.

2. Франк-Каменецкий Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. Долгопрудный: Интеллект, 2008. 408 с.
3. Froment G.F., Bischoff K.B., De Wilde J. Chemical Reactor Analysis and Design. 3rd ed. Hoboken: Wiley, 2010.
4. Weisz P.B., Prater C.D. Interpretation of measurements in experimental catalysis // Advances in Catalysis. 1954. Vol. 6. P. 143-196.
5. Слинко М.Г. Моделирование химических реакторов. Новосибирск: Наука, 1968. 95 с.
6. Deb K. Multi-Objective Optimization using Evolutionary Algorithms. Chichester: Wiley, 2001. 497 p.

MSC 65K10, 65L05, 80A30

Multiobjective Optimization of Technological Parameters of n-Hexadecane Hydroisomerization with Allowance for Diffusion Limitations in a Zeolite Catalyst Pellet

P.A. Konchenko¹, I.M. Gubaydullin^{1,2}

Ufa State Petroleum Technological University¹, Institute of Petrochemistry and Catalysis, Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences²

Abstract: A mathematical model of n-hexadecane hydroisomerization over a bifunctional zeolite catalyst is considered. The model includes a lumped kinetic scheme, a stationary diffusion–reaction problem in a cylindrical catalyst pellet, and calculation of reaction effectiveness factors. The proposed approach makes it possible to relate experimentally determined apparent rate constants to intrinsic kinetic parameters and to evaluate the influence of structural and diffusion characteristics of the catalyst pellet on process performance. Based on the developed model, a multiobjective optimization problem is formulated with respect to temperature and contact time.

Keywords: hydroisomerization, n-hexadecane, mathematical modeling, intraparticle diffusion, effectiveness factor, multiobjective optimization, Pareto front.

УДК 519.711.3:621.315.1

Математическое моделирование процесса взаимодействия автономного роботизированного комплекса с изморозевыми отложениями на ЛЭП

Кордияк Г.В.¹, Садыков М.Ф.¹

ФГБОУ ВО «Казанский Государственный Энергетический университет»¹

Аннотация: В статье рассматриваются подходы к математическому моделированию локальной автономной системы, предназначенной для удаления гололедно-изморозевых отложений (ГИО) на высоковольтных линиях электропередачи без снятия напряжения. Обосновывается необходимость применения численных методов для расчета механических напряжений в системе «провод – лед – роботизированный комплекс». Предложена общая концепция программно-вычислительного комплекса для симуляции рабочих режимов автономного устройства.

Ключевые слова: математическое моделирование, численные методы, метод конечных элементов, автономные системы, линии электропередачи, программный комплекс, алгоритмы управления.

1. Введение

Разработка и внедрение локальных автономных систем для очистки высоковольтных линий электропередачи (ВЛ) от гололедно-изморозевых отложений (ГИО) является сложной междисциплинарной задачей. Натурные испытания подобных роботизированных комплексов непосредственно на действующих ЛЭП под напряжением сопряжены с высокими финансовыми затратами и рисками возникновения аварийных ситуаций. В связи с этим первостепенную роль на этапе проектирования играет математическое моделирование физических процессов взаимодействия устройства с обледенелым проводом, а также разработка адекватных численных моделей для программной симуляции.

2. Постановка математической задачи

Процесс удаления изморози автономным устройством представляет собой сложную динамическую задачу механики контактного взаимодействия. Математическая модель системы должна учитывать три основных компонента:

1. Гибкую нить (фазный провод), обладающую собственной массой, натяжением и упруго-деформационными характеристиками.
2. Слой гололедно-изморозевых отложений, характеризующийся переменной плотностью, толщиной и адгезией к поверхности провода.
3. Роботизированный комплекс, представляющий собой сосредоточенную движущуюся массу, оказывающую механическое (вибрационное или фрезерующее) воздействие на лед.

Для описания динамики провода с движущейся по нему массой целесообразно использовать систему дифференциальных уравнений в частных производных (уравнения колебаний струны с учетом изгибной жесткости). Сила сопротивления, возника-

ющая при разрушении льда, вводится в модель как нелинейная функция, зависящая от скорости движения комплекса и физико-механических свойств отложений.

3. Применение численных методов и комплексов программ

Поскольку аналитическое решение составленной системы дифференциальных уравнений затруднено из-за высокой степени нелинейности граничных условий, для нахождения решения применяются численные методы. Основным инструментом для решения поставленной задачи является метод конечных элементов (МКЭ). Использование современных программных комплексов инженерного анализа (например, ANSYS или COMSOL Multiphysics) позволяет разбить контактную зону «рабочий орган комплекса – лед – провод» на сетку конечных элементов. В рамках программной симуляции решаются следующие задачи:

- определение критических усилий, необходимых для нарушения адгезионной связи изморози с алюминиевой или сталеалюминиевой поверхностью провода;
- расчет напряженно-деформированного состояния (НДС) самого провода во избежание повреждения его внешних повивов рабочими органами робота;
- оценка влияния ветровой нагрузки на устойчивость комплекса при движении по пролету.

4. Алгоритмическое моделирование системы управления

Помимо механического взаимодействия, критически важным аспектом является моделирование логики автономного управления комплексом. Так как система должна функционировать без участия оператора, разрабатывается алгоритмическая модель принятия решений.

В среде MATLAB/Simulink формируется виртуальная модель подсистемы мониторинга, включающая входные данные с датчиков температуры, влажности и тензодатчиков. Алгоритм, реализующий элементы нечеткой логики (Fuzzy Logic), обрабатывает эти сигналы и выдает управляющие воздействия на тяговые электродвигатели.

Численное моделирование в Simulink позволяет настроить ПИД-регуляторы системы так, чтобы обеспечить плавный пуск и торможение комплекса, исключая раскачивание провода (эффект маятника).

5. Заключение

Таким образом, применение методов математического моделирования и современных программных вычислительных комплексов является обязательным этапом создания локальной автономной системы очистки ЛЭП. Совмещение конечно-элементного анализа (для расчета механической прочности) и алгоритмического моделирования (для настройки системы управления) позволяет виртуально оптимизировать массогабаритные и мощностные характеристики устройства. Разработанные численные модели значительно сокращают сроки проектирования и позволяют создать безопасное устройство для эксплуатации на линиях без снятия рабочего напряжения.

Литература

1. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. Москва: Физматлит, 2001. 320 с.

2. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в технике. Москва: Мир, 1975. 541 с.
3. Дьяконов В.П. MATLAB и Simulink для радиоинженеров. Москва: ДМК Пресс, 2011. 976 с.
4. Басов К.А. ANSYS: справочник пользователя. Москва: ДМК Пресс, 2005. 640 с.
5. Смирнов В.А. Моделирование динамики роботизированных систем на гибких направляющих // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2021. № 8. С. 22-29.

MSC 00A71, 74S05, 93A30

Mathematical Modeling of the Interaction Process Between an Autonomous Robotic Complex and Frost Deposits on Power Transmission Lines

G.V. Kordiyak¹, M.F. Sadykov¹

Kazan State Power Engineering University¹

Abstract: The article considers approaches to the mathematical modeling of a local autonomous system designed to remove ice and frost deposits from high-voltage power transmission lines without de-energizing. The necessity of using numerical methods to calculate mechanical stresses in the "wire – ice – robotic complex" system is substantiated. A general concept of a software and computing complex for simulating the operating modes of the autonomous device is proposed.

Keywords: mathematical modeling, numerical methods, finite element method, autonomous systems, power transmission lines, software complex, control algorithms.

УДК 539.376

Проникновение агрессивной среды в трубчатый стержень кольцевого поперечного сечения

Кузнецов Е.Б.¹, Леонов С.С.^{1,2}

¹ФГАОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный
исследовательский университет)»

²ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов
имени Патриса Лумумбы»

Аннотация: При решении проблемы проникновения агрессивной среды в материал конструкции необходимо знать движение фронта агрессии, но классическое уравнение диффузии, описывающее этот процесс, является уравнением параболического типа и не задает движение этого фронта. В работе впервые этот процесс описывается уравнением гиперболического типа, задающим движение фронта агрессии: диффузия агрессивной среды в материал стержня моделируется уравнением тепловой волны, что позволяет выделить движение диффузионного фронта.

Ключевые слова: фронт диффузии, фронт агрессии, тепловая волна, метод Фурье, ряды Фурье-Бесселя.

1. Введение

Обычно проникновение некоторой среды в другую среду моделируется уравнением диффузии, которое является уравнением в частных производных параболического типа. Недостаток такого подхода заключается в том, что это уравнение не описывает движение фронта проникающей среды, внедрение которой происходит не с конечной скоростью, а мгновенно. Поэтому исследователи движение этого фронта задают искусственно [1].

Чтобы избежать искусственных конструкций воспользуемся следующим уравнением [2, 3]

$$\tau \frac{\partial^2 u(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial u(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \operatorname{div}(a^2 \operatorname{grad} u(\mathbf{r}, t)), \quad (1)$$

где $a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}$ – коэффициент температуропроводности.

Уравнение (1) описывает движение тепловой волны. Оно является уравнением гиперболического типа, задающим движение фронта тепловой волны и носит волновой характер с затуханием.

Используя такой подход в [4] процесс диффузии в тонком стержне прямоугольного поперечного сечения моделировался волновым уравнением гиперболического типа.

2. Диффузия агрессивной среды в материал стержня

В данной статье рассматривается осесимметричное проникновение в материал стержня агрессивной среды интенсивностью c_1 , находящейся внутри длинного металлического стержня кольцевого поперечного сечения и интенсивностью c_2 , находящейся снаружи стержня. Внутренний радиус стержня равен r_1 , а внешний r_2 .

Уравнение диффузии для функции $c(r, t)$ в полярной системе координат примет вид

$$\tau c_{tt} + c_t = D \left(c_{rr} + \frac{c_r}{r} \right), \quad (2)$$

где r – полярный радиус, $r \in (r_1, r_2)$.

Перепишем уравнение (2) в безразмерной форме:

$$U_{TT} + 2bU_T = U_{RR} + \frac{U_R}{R},$$

где $U = \frac{c}{c_0}$; $R = \frac{r}{r_0}$; $T = \frac{t}{r_0} \sqrt{\frac{D}{\tau}}$; $b = \frac{r_0}{2\sqrt{D\tau}}$; c_0, r_0 – некоторые константы обезразмеривания.

Вернувшись к старым обозначениям уравнения (2), получим безразмерный вид уравнения

$$c_{tt} + 2bc_t = c_{rr} + \frac{c_r}{r}. \quad (3)$$

Полагаем, что в начальный момент времени внутри образца агрессивная среда присутствует, тогда начальные условия будут следующими:

$$c(r, 0) = \phi(r), \quad c_t(r, 0) = \psi(r). \quad (4)$$

На внутренней и на внешней поверхностях стержня концентрации сред остаются постоянными, поэтому безразмерные краевые условия примут вид

$$c(\alpha_1, t) = \beta_1, \quad c(\alpha_2, t) = \beta_2, \quad (5)$$

где $\alpha_1 = \frac{r_1}{r_0}$, $\alpha_2 = \frac{r_2}{r_0}$, $\beta_1 = \frac{c_1}{c_0}$, $\beta_2 = \frac{c_2}{c_0}$.

Решение задачи (3-5) можно представить в виде

$$\begin{aligned} c(r, t) = & \sum_{n=1}^N \frac{R_n(r)}{k_{2n} - k_{1n}} ((\Omega_{n1}k_{2n} - \Omega_{n2})e^{k_{1n}t} + (\Omega_{n2} - \Omega_{n1}k_{1n})e^{k_{2n}t} + \\ & + \Omega_{n3}(\frac{1 - e^{k_{1n}t}}{k_{1n}} - \frac{1 - e^{k_{2n}t}}{k_{2n}})) + \sum_{n=N+1}^{\infty} R_n(r)(e^{-bt}(\Omega_{n1} \cos \omega_n t + \\ & + \frac{b\Omega_{n1} + \Omega_{n2}}{\omega_n} \sin \omega_n t) + \frac{\Omega_{n3}}{\omega_n(b^2 + \omega_n^2)}(\omega_n - \\ & - (b \sin \omega_n t + \omega_n \cos \omega_n t)e^{-bt})) + \beta_1 - \frac{r - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}(\beta_1 - \beta_2). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь N – наибольшее целое число, при котором ещё выполняется неравенство $b > \lambda_n$, где λ_n – собственное значение задачи Штурма-Лиувилля, b – коэффициент

обезразмеривания, $k_{1n} = -b + \sqrt{b^2 - \lambda_n^2}$, $k_{2n} = -b - \sqrt{b^2 - \lambda_n^2}$, $\omega_n = \sqrt{\lambda_n^2 - b^2}$, собственные функции задачи Штурма-Лиувилля $R_n(r)$ можно представить в форме

$$R_n(r) = J_0(\lambda_n r) N_0(\lambda_n \alpha_2) - N_0(\lambda_n r) J_0(\lambda_n \alpha_2).$$

Константы $\Omega_{n1}, \Omega_{n2}, \Omega_{n3}$, входящие в решение (6), вычисляются следующим образом

$$\Omega_{n1} = \frac{\pi^2 \lambda_n^2 J_0^2(\lambda_n \alpha_1)}{2(J_0^2(\lambda_n \alpha_1) - J_0^2(\lambda_n \alpha_2))} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} R_n(r) \left(\phi(r) - \beta_1 + \frac{r - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} (\beta_1 - \beta_2) \right) r dr,$$

$$\Omega_{n2} = \frac{\pi^2 \lambda_n^2 J_0^2(\lambda_n \alpha_1)}{2(J_0^2(\lambda_n \alpha_1) - J_0^2(\lambda_n \alpha_2))} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} R_n(r) \psi(r) r dr,$$

$$\Omega_{n3} = \frac{(\beta_2 - \beta_1) \pi^2 \lambda_n^2 J_0^2(\lambda_n \alpha_1)}{2(\alpha_2 - \alpha_1)(J_0^2(\lambda_n \alpha_1) - J_0^2(\lambda_n \alpha_2))} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} R_n(r) dr,$$

где $J_0(\lambda r)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Литература

1. Локощенко А.М. Ползучесть и длительная прочность металлов. Москва: Физматлит, 2016. 504 с.
2. Лыков А.В. Теория теплопроводности. Москва: Высшая школа, 1967. 600 с.
3. Формалев В.Ф. Теплоперенос в анизотропных твердых телах. Численные методы, тепловые волны, обратные задачи. Москва: Физматлит, 2015. 280 с.
4. Kuznetsov E.B., Leonov S.S. Applying of the heat wave equation in the study of the movement of an aggressive environment front // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2020. Vol. 927, No. 012078.

MSC 65L11

Penetration of an aggressive medium into a tubular rod with an ring cross-section

E.B. Kuznetsov¹, S.S. Leonov^{1,2}

¹Moscow Aviation Institute (National Research University)

²Peoples' Friendship University of Russia
named after Patrice Lumumba (RUDN University)

Abstract: When solving the problem of aggressive media penetration into the construction material, it is necessary to know the movement of the aggression front, but the classical diffusion equation describing this process is a parabolic equation and does not specify the movement of this front. In this paper, for the first time, this process is described by a hyperbolic equation that defines the movement of the aggression front: the diffusion of an aggressive medium into the rod material is modeled by the heat wave equation, which makes it possible to isolate the movement of the diffusion front.

Keywords: diffusion front, aggression front, heat wave, Fourier method, Fourier-Bessel series.

УДК 004.032.26

Физически-информированные нейронные сети при решении коэффициентных обратных задач

Кузнецов Е.Б.¹, Леонов С.С.^{1,2}

ФГАОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»¹,

ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»²

Аннотация: В работе рассмотрен процесс создания полуэмпирических рекуррентных нейронных сетей, относящихся к классу физически-информированных нейронных сетей. Предложен подход к построению архитектуры полуэмпирической сети, использующий неявные схемы семейства Рунге-Кутты, который позволяет получить аналитическое функциональное выражение эквивалентное предобученной рекуррентной нейронной сети. Апробация предложенного подхода проведена на тестовой линейной слабо жесткой начальной задаче с одним скалярным параметром.

Ключевые слова: полуэмпирические нейронные сети, физически-информированные нейронные сети, идентификация, коэффициентная обратная задача.

1. Введение

При моделировании физических и технологических процессов значимую роль играют методы определения параметров модели. Подобные задачи относятся к коэффициентным обратным задачам и активно исследуются с 50-х годов прошлого века. По своей природе обратные задачи существенно отличаются от задач анализа и имеют как свою внутреннюю специфику, например, неединственность решения, так и разнообразие методов исследования, что обуславливает сложность решения этих задач в общем виде. В данной работе для решения коэффициентных обратных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих поведение динамических систем, предложено использовать один из вариантов физически-информированных нейронных сетей, называемых полуэмпирическими рекуррентными нейронными сетями. Подобные нейросетевые архитектуры тесно связаны с традиционными конечно-разностными схемами дискретизации систем дифференциальных уравнений и с начала 90-х годов прошлого века активно исследуются в работах G. Dreyfus'a [1], Д. А. Тархова и А. Н. Васильева [2], Ю. В. Тюменцева [3]. Предложен новый подход к построению полуэмпирических рекуррентных нейронных сетей на основе неявных методов семейства Рунге-Кутты.

2. Полуэмпирические рекуррентные нейронные сетей и диагонально-неявные методы семейства Рунге-Кутты

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, записанных относительно неизвестной вектор-функции $\mathbf{y}(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))^T$ на отрезке $x \in [x_0, X]$:

$$\frac{d\mathbf{y}(x)}{dx} = \mathbf{F}(x, \mathbf{y}(x), \bar{\alpha}) \quad (1)$$

с начальными условиями

$$\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0. \quad (2)$$

Здесь $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)^\top$ – вектор параметров задачи, $\mathbf{F}(x, \mathbf{y}(x), \bar{\alpha})$ – заданная вектор-функция, зависящая от $n + p + 1$ аргумента, $\mathbf{y}_0$ – вектор значений функции $\mathbf{y}(x)$ в начальной точке $x = x_0$.

При заданном векторе параметров $\bar{\alpha}$ для численного решения задачи (1)-(2) проведем разбиение отрезка $[x_0, X]$ узловыми точками x_i , $i = \overline{1, N-1}$:

$$x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = X. \quad (3)$$

Приближенное значение вектор функции $\mathbf{y}(x)$ в узловой точке x_k может быть найдено по следующей схеме [4]:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_k &= \mathbf{y}_{k-1} + h \sum_{i=1}^s b_i \mathbf{k}_i, \quad k = \overline{1, N}, \\ \mathbf{k}_i &= \mathbf{F} \left(x_{k-1} + c_i h, \mathbf{y}_{k-1} + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \mathbf{k}_j \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Класс методов вида (4) называются s -стадийными методами Рунге-Кутты. Векторы $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и матрица коэффициентов A задаются матрицей Бутчера

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \dots & b_s \end{array} \quad (5)$$

В случае $a_{ij} = 0$ при $i \leq j$ методы (4) являются явными. Если $a_{ij} = 0$ при $i > j$ и хотя бы один диагональный элемент $a_{ii} \neq 0$, имеем диагонально неявный метод Рунге-Кутты. Во всех остальных случаях методы Рунге-Кутты являются неявными.

Остановимся подробнее на скалярном варианте задачи (1)-(2), записанной относительно скалярной функции $y(x)$ на отрезке $x \in [x_0, X]$:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \bar{\alpha}), \quad y(x_0) = y_0. \quad (6)$$

Рассмотрим более общую постановку для задачи (6). Будем полагать, что вектор параметров $\bar{\alpha}$ либо не задан, либо определен со значительной погрешностью. Поэтому для задачи (6) требуется найти не только решение, но и вектор $\bar{\alpha}$ (определить модель рассматриваемого процесса) таким образом, чтобы в точках $x = \xi_i$, $i = \overline{1, M}$, искомая функция принимала значения $y(\xi_i) = y_i^e$.

Для решения этой задачи воспользуемся вариантом полуэмпирической рекуррентной архитектуры, предложенной А. Н. Васильевым и Д. А. Тарховым [2]. Согласно ему заменим конечный рассматриваемый интервал $x \in [x_0, X]$ на интервал

переменной длины $[x_0, x]$ с переменной правой границей. Тогда при использовании какой-либо численной схемы

$$y_k = \mathcal{A}(y_k, y_{k-1}, f, h, N) \quad (7)$$

с выбранной функцией $\mathcal{A}(\cdot)$, каждое узловое значение y_k будет являться функцией аргумента x , т.е. $y_k = y_k(x)$, $k = \overline{1, N}$. Приближенное решение задачи (6) будет равно значению в последнем узле:

$$\hat{y}(x) = y_N(x). \quad (8)$$

Стоит отметить, что $y_N(x)$ является выходом рекуррентной нейронной сети эквивалентной используемой численной схеме (7). Само решение $\hat{y}(x)$ содержит в себе не только информацию о всех пройденных состояниях, но и информацию о заданной функции $f(x, y, \bar{\alpha})$, начальных условиях и значениях параметров $\bar{\alpha}$.

Первым шагом к построению приближенного решения является создание нейросетевой архитектуры, которая отражала бы специфику текущей задачи. Для примера воспользуемся одностадийными методами семейства Рунге-Кутты, объединенными названием θ -метод [4]:

$$y_k = y_{k-1} + hf(x_{k-1} + \theta h, y_{k-1} + \theta(y_k - y_{k-1}), \bar{\alpha}), \quad k = \overline{1, N}. \quad (9)$$

При фиксированном значении θ рекуррентная формула (9) задает один из численных методов решения задачи Коши, например, явный ($\theta = 0$) и неявный ($\theta = 1$) методы Эйлера, неявный метод трапеций ($\theta = 1/2$).

При $k = N$ (с учетом равенства (8)) можно отметить, что выражение

$$\hat{y} = y_{N-1} + hf(x_{N-1} + \theta h, y_{N-1} + \theta(\hat{y} - y_{N-1}), \bar{\alpha})$$

невозможно в произвольном случае задания функции f разрешить относительно $\hat{y}$ при $\theta \neq 1$. При $\theta = 1$ имеем

$$\begin{aligned} \hat{y} - hf(x, \hat{y}, \bar{\alpha}) &= L_1(x, \hat{y}), \quad y_0 - L_{N-1}(x, \hat{y}) + hf(x - (N-1)h, L_{N-1}(x, \hat{y}), \bar{\alpha}) = 0, \\ L_{N-k}(x, \hat{y}) - hf(x - (N-k)h, L_{N-k}(x, \hat{y}), \bar{\alpha}) &= L_{N-k+1}(x, \hat{y}). \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя y_0 из начального условия и задавая нейросетевое разложение функции $\hat{y}(x)$:

$$\hat{y}(x, W_1, \dots, W_Q) = \varphi_Q(\varphi_{Q-1}(\dots \varphi_1(x, W_1), W_{Q-1}), W_Q), \quad (11)$$

поставим задачу минимизации функционала ошибки вида

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(W_1, \dots, W_Q, \bar{\alpha}) &= \delta_1 \left(\hat{y} \Big|_{x=x_0} - y_0 \right)^2 + \delta_2 \sum_{i=1}^M \left(\hat{y} \Big|_{x=\xi_i} - y_i^e \right)^2 + \\ &+ \delta_3 \sum_{j=1}^P \left(y_0 - L_{N-1}(x, \hat{y}) + hf(x - (N-1)h, L_{N-1}(x, \hat{y}), \bar{\alpha}) \right)^2 \Big|_{x=\eta_j} \rightarrow \min_{W_1, \dots, W_Q, \bar{\alpha}} \end{aligned} \quad (12)$$

для поиска нейросетевых коэффициентов $W_1, \dots, W_Q$ и вектора параметров $\bar{\alpha}$. Здесь η_j – пробные точки, случайным образом распределенные на отрезке $[x_0, X]$, Q – количество слоев в нейросетевом разложении (11), $W_1, \dots, W_Q$ – матрицы нейросетевых коэффициентов каждого слоя разложения (11).

3. Численный пример

В качестве примера рассмотрим задачу идентификации параметра α для линейной начальной задачи

$$\frac{dy}{dx} = -\alpha (y - \cos x), \quad y(0) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad (13)$$

которая при $\alpha = 50$ дается в качестве тестовой в монографии [5].

Используя формулы (10), получим предобученную полуэмпирическую рекуррентную сеть

$$\begin{aligned} \hat{y} + \alpha h (\hat{y} - \cos x) &= L_1(x, \hat{y}), \quad L_{N-1}(x, \hat{y}) + \alpha h [L_{N-1}(x, \hat{y}) - \cos(x - (N-1)h)] = 0, \\ L_{N-k}(x, \hat{y}) + \alpha h [L_{N-k}(x, \hat{y}) - \cos(x - (N-k)h)] &= L_{N-k+1}(x, \hat{y}). \end{aligned} \quad (14)$$

Нейросетевое разложение (11) выберем двухслойным ($Q = 2$) с 9 нейронами на каждом слое, задаваемыми матрицами $W^{(1)}$ и $W^{(2)}$ размерности 9×3 :

$$\begin{aligned} \hat{y}(x, W^{(1)}, W^{(2)}) &= \sum_{i=1}^9 W_{i1}^{(1)} \tanh(W_{i2}^{(1)} \cdot u(x, W^{(2)}) + W_{i3}^{(1)}), \\ u(x, W^{(2)}) &= \sum_{i=1}^9 W_{i1}^{(2)} \tanh(W_{i2}^{(2)} \cdot x + W_{i3}^{(2)}). \end{aligned} \quad (15)$$

Минимизируем функционал вида (12) при $N = 7$, $M = P = 200$, $\delta_1 = 5025$, $\delta_2 = 100500$ и $\delta_3 = 100000$ с η_j , $j = \overline{1, P}$ – величинами равномерно распределенными на отрезке $[0, 1]$, и ξ_i , $i = \overline{1, M}$ – значениями аналитического решения задачи (13) при $\alpha = 30$ и наложенным стандартным гауссовским шумом со среднеквадратичным отклонением $\sigma = 0.01$. В результате определили константу $\alpha_* = 30.51628$ и весовые матрицы нейросетевого разложения $W_*^{(1)}$ и $W_*^{(2)}$. Графики аналитического решения при $\alpha = 30$, α_* и нейросетевого решения даны на рис. 1.

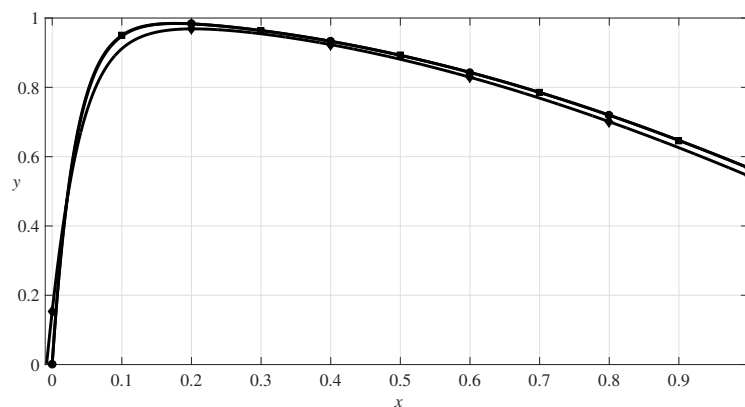


Рис. 1. Решение задачи (13): кружки – аналитическое решение при $\alpha = 30$, квадраты – аналитическое решение при $\alpha_* = 30.51628$, ромбы – нейросетевое решение (15)

Литература

1. Dreyfus G. Neural Networks: Methodology and Applications. Berlin: Springer, 2005. 515 p.

2. Vasilyev A.N., Tarkhov D.A. Semi-Empirical Neural Network Modeling and Digital Twins Development. US: Elsevier, Academic Press, 2019. 288 p.
3. Tiumentsev Yu.V., Egorchev M.V. Neural Network Modeling and Identification of Dynamical Systems. US: Elsevier, Academic Press, 2019. 319 p.
4. Хайпер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. Москва: Мир, 1990. 512 с.
5. Хайпер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. Москва: Мир, 1999. 685 с.

MSC 68T07

Physics Informed Neural Networks in Solving Coefficient Inverse Problems

E.B. Kuznetsov,¹ S.S. Leonov^{1,2}

Moscow Aviation Institute (National Research University)¹
Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba (RUDN
University)²

Abstract: The paper considers the process of constructing a semi-empirical recurrent neural network belonging to the class of physics informed neural networks. The authors propose an approach to building a semi-empirical network architecture using implicit Runge-Kutta family schemes, which allows to obtain an analytical functional expression equivalent to a pre-trained recurrent neural network. The proposed approach was tested on a linear, weakly rigid initial problem with one scalar parameter.

Keywords: semi-empirical recurrent neural networks, physics informed neural networks, identification, coefficient inverse problem, ordinary differential equations, initial problem.

УДК 519.65; 519.62; 517.521

Аппроксимация производных второго и третьего порядка коэффициентами Фурье

Кузьмичев Н.Д.¹

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет¹

Аннотация: Приведено доказательство теорем, согласно которым вторую и третью производные функции, принадлежащие классу Гёльдера-Липшица $C^\alpha(G)$ можно с любой наперед заданной точностью аппроксимировать конечной суммой коэффициентов Фурье функции для гармонически модулированного аргумента.

Ключевые слова: класс Гёльдера-Липшица, функция, вторая и третья производные функции, зависимости коэффициентов Фурье, аппроксимация, гармонически модулированный аргумент.

1. Введение

В экспериментальной физике и технике широко применяется модуляционный метод измерения. Он позволяет на несколько порядков увеличить точность измерений по сравнению с обычными методами. В традиционном методе не учитываются высшие гармоники сигнала отклика. Как было показано в работах [1, 2], при изучении зависимостей с резкими особенностями необходимо их учитывать. Ранее в работе [3] показано, что любые функцию $f(y)$ и ее производную $f'(y)$, принадлежащие классу Гёльдера-Липшица C^α ($0 < \alpha \leq 1$) на некотором множестве, можно аппроксимировать с любой наперед заданной точностью конечной суммой коэффициентов (гармоник) её ряда Фурье. В настоящей работе мы приводим математическое обоснование формул, выраженные через коэффициенты Фурье функции, которые аппроксимируют её вторую и третью производные.

2. Теорема о приближении второй производной функции коэффициентами Фурье

Теорема 1. Вторую производную $f''(y)$ функции $f(y)$, принадлежащую классу Гёльдера-Липшица $f''(y) \in C^\alpha$ на множестве $G = [a-h, b+h]$, можно аппроксимировать с любой наперед заданной точностью ε следующей суммой коэффициентов ряда Фурье функции $f(y)$ для гармонически модулированного аргумента $y = x + h \cos t$:

$$\left| \frac{1}{h^2} \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} (2n)^2 A_{2n}(x, h) - f''(x) \right| < \varepsilon.$$

Здесь h – амплитуда модуляции, $A_m(x, h) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x + h \cos t) \cos(mt) dt$, $t \in [-\pi, \pi]$, $x \in [a, b]$ и $y \in G$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем считать, что функция $f(y)$ имеет производную $f''(y)$ принадлежащую классу Гёльдера-Липшица [4, 5] на множестве G : $f''(y) \in$

C^α ($0 < \alpha \leq 1$). Аргумент y заставим изменяться по гармоническому закону: $y(t) = x + h \cos t$, $t \in [-\pi, \pi]$. Тогда, если $x \in [a, b]$, то $y \in G = [a - h, b + h]$. Здесь h – амплитуда модуляции. Суперпозиция функций $f(y(t))$ удовлетворяет условию: $f(-\pi) = f(\pi), \dots, f''(-\pi) = f''(\pi)$ для любых $x \in [a, b]$. Из выше отмеченных условий следует, что ряд Фурье функции $f(x + h \cos t)$ сходится равномерно для любых $x \in [a, b]$ [4]:

$$f(x + h \cos t) = \frac{A_0(x, h)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x, h) \cos(nt). \quad (1)$$

Левую и правую часть (1) дважды продифференцируем по t и положим $t = \pi/2$:

$$h^2 f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (2n)^2 A_{2n}(x, h). \quad (2)$$

Докажем справедливость выражения (2).

Рассмотрим сумму составленную из $A_n(x, h) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x + h \cos t) \cos(nt) dt$:

$$h^2 f''_N(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x + h \cos t) \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} (2n)^2 \cos(2nt) dt. \quad (3)$$

Подынтегральную сумму (3) просуммируем. Получим следующий интеграл:

$$h^2 f''_N(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x + h \cos t) K_{2N}(t) dt. \quad (4)$$

В выражении (4) интегральное ядро $K_{2N}(t)$ имеет вид: $K_{2N}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{\sin[(2N+1)(t + \frac{\pi}{2})]}{2\sin(t + \frac{\pi}{2})} \right]$. Интеграл (4) дважды вычислим по частям. В итоге имеем три интеграла:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x + h \cos t) K_{2N}(t) dt &= \frac{2h^2}{\pi} \int_0^\pi f''(x + h \cos t) \frac{\sin[(2N+1)(t + \frac{\pi}{2})]}{2\sin(t + \frac{\pi}{2})} dt - \\ &- \frac{h^2}{\pi} \int_0^\pi f''(x + h \cos t) \cos t \sin[(2N+1)(t + \frac{\pi}{2})] dt - \\ &- \frac{h}{\pi} \int_0^\pi f'(x + h \cos(t)) \sin[(2N+1)(t + \frac{\pi}{2})] dt. \quad (5) \end{aligned}$$

Первый интеграл согласно теореме об аппроксимации функции, принадлежащей C^α ее коэффициентами Фурье [3] равен $h^2 f''_N(x)$, т. к. $f''(y) \in C^\alpha G$. Разность первого интеграла и правой части (5) по модулю равна:

$$\left| h^2 f''_N(x) - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x + h \cos(t)) K_{2N}(t) dt \right|.$$

Второй и третий интегралы стремятся к 0 при $N \rightarrow \infty$ на основании леммы [4, с. 316]. Поэтому для каждого интеграла найдутся такие номера N_2 и N_3 соответственно, что для всех $N > N_2$ и N_3 , каждый из интегралов будет меньше $\varepsilon/2$. В итоге мы имеем:

$$\left| \frac{1}{h^2} \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} (2n)^2 A_{2n}(x, h) - f''(x) \right| < \varepsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

3. Теорема о приближении третьей производной функции коэффициентами Фурье

Теорема 2. Третью производную $f'''(y)$ функции $f(y)$, принадлежащую классу Гёльдера-Липшица $f'''(y) \in C^\alpha$ на множестве $G = [a-h, b+h]$, можно аппроксимировать с любой наперёд заданной точностью ε следующей суммой коэффициентов ряда Фурье функции $f(y)$ для гармонически модулированного аргумента $y = x + h \cos t$:

$$\left| \frac{1}{h^3} \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} [(2n+1)^3 - (2n+1)] A_{2n+1}(x, h) - f'''(x) \right| < \varepsilon.$$

Здесь h – амплитуда модуляции, $t \in [-\pi, \pi]$, $x \in [a, b]$, $y \in G$ и

$$A_m(x, h) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x + h \cos t) \cos(mt) dt.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f'''(y)$ принадлежит классу Гёльдера-Липшица [4, 5] на множестве $G = [a-h, b+h]$: $f'''(y) \in C^\alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$) G . Аргумент y равен: $y = x + h \cos t$, $t \in [-\pi, \pi]$. Если $x \in [a, b]$, то $y \in G$. Суперпозиция функций $f(y(t))$ удовлетворяет условию: $f(x + h \cos(-\pi)) = f(x + h \cos \pi)$ и $f'''(x + h \cos(-\pi)) = f'''(x + h \cos \pi)$ для любых $x \in [a, b]$. Ряд Фурье (1) для функции $f(y(t))$ сходится равномерно для любых $x \in [a, b]$ [4, 5]. Выражение (1) трижды продифференцируем по t и положим $t = \pi/2$:

$$h^3 f'''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n [(2n-1)^3 - (2n-1)] A_{2n-1}(x, h). \quad (6)$$

Докажем справедливость формулы (6) для функций, у которых третья производная $f'''(y) \in C^\alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$) G . Опираясь на работы [3, 4] и теорему 1, составим следующую конечную сумму из коэффициентов $A_n(x, h)$ ряда (6):

$$\begin{aligned} h^3 f_N'''(x) &= \sum_{n=1}^N (-1)^n [(2n-1)^3 - (2n-1)] A_{2n-1}(x, h) = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x + h \cos t) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n [(2n-1)^3 - (2n-1)] \cos((2n-1)t) dt. \end{aligned} \quad (7)$$

Докажем, что (7) сходится к $h^3 f'''(x)$ при $N \rightarrow \infty$. Подынтегральную сумму (7) просуммируем:

$$K_{3N}(t) = \sum_{n=1}^N (-1)^n [(2n-1)^3 - (2n-1)] \cos((2n-1)t) =$$

$$= \frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{\sin[(2N+1)(t + \frac{\pi}{2})]}{2(\cos(t))^2} + (-1)^{N+1}(2N+1) \frac{\cos(2Nt)}{2\cos(t)} \right] + \\ + \left[\frac{\sin[(2N+1)(t + \frac{\pi}{2})]}{2(\cos(t))^2} + (-1)^{N+1}(2N+1) \frac{\cos(2Nt)}{2\cos(t)} \right] = K''_{1N} + K_{1N}. \quad (8)$$

Запишем (7) через $K_{1N}(t)$, где $K_{1N}(t)$ – ядро для первой производной [3]:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x + h \cos(t)) K_{3N}(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x + h \cos(t)) [K''_{1N}(t) + K_{1N}(t)] dt. \quad (9)$$

Интегрируя (9) последовательно по частям, получим следующие интегралы:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x + h \cos(t)) K_{3N}(t) dt = \frac{2h^2}{\pi} \int_0^\pi f''(x + h \cos(t)) K_{1N}(t) dt + \\ + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x + h \cos(t)) K_{1N}(t) dt - \frac{2h}{\pi} \int_0^\pi f'(x + h \cos(t)) \frac{\sin[(2N+1)(t + \frac{\pi}{2})]}{2\sin(t + \frac{\pi}{2})} dt + \\ + \frac{h^2}{\pi} \int_0^\pi f''(x + h \cos t) \sin[(2N+1)(t + \frac{\pi}{2})] dt + \\ + \frac{(-1)^N(2N+1)h^2}{\pi} \int_0^\pi f''(x + h \cos t) \cos t \cos(2Nt) dt + \\ + \frac{(-1)^N(2N+1)h}{\pi} \int_0^\pi f'(x + h \cos t) \cos(2Nt) dt. \quad (10)$$

В правой части выражения (10) первый интеграл равен $h^3 f'''_N(x)$ [3], второй и третий интегралы равны $h f'_N(x)$ с разными знаками в сумме дают 0, а четвертый, пятый и шестой интегралы стремятся к нулю при $N \rightarrow \infty$ на основании леммы [4, с. 316] и теоремы Лоренца [5, с. 678]. При интегрировании по частям 5-го и 6-го интегралов правой части (10) множители $(2N+1)$ перед ними исчезают и эти интегралы стремятся к 0 [4, с. 316]. Таким образом, мы получили, что третью производную функции $f'''(x)$, принадлежащую классу Гёльдера-Липшица C^α на множестве G , можно аппроксимировать с любой наперёд заданной точностью ε следующей конечной суммой коэффициентов её ряда Фурье для гармонически модулированного аргумента $y = x + h \cos t$:

$$\left| \frac{1}{h^3} \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} [(2n+1)^3 - (2n+1)] A_{2n+1}(x, h) - f'''(x) \right| < \varepsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Литература

1. Кузьмичев Н.Д. Оценки ошибок модуляционного восстановления функции отклика и ее производных // ЖТФ. 1997. Т. 67, № 8. С. 124-127.
2. Кузьмичев Н.Д. Применение рядов Тейлора-Фурье для численного и экспериментального определения производных изучаемой зависимости // Журнал Средневолжского математического общества. 2011. Т. 13, № 1. С. 70-80.

3. Кузьмичев Н.Д. Аппроксимация функции и ее производной, принадлежащих классу Гёльдера-Липшица, их коэффициентами Фурье для гармонически модулированного аргумента // ЖВМ и МФ. 2025. Т. 65, № 4. С. 417-425.
4. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ. Продолжение курса. Москва: Изд-во МГУ, 1987. 358 с.
5. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. Москва: Государственное изд-во физико-математической литературы, 1961. 936 с.

MSC 41A05; 42A10; 42B05

Approximation of second and third order derivatives by Fourier coefficients

N.D. Kuzmichev¹

National Research Mordovian State University¹

Abstract: The proof of the theorems is given, according to which the second and other higher derivatives of a function belonging to the Helder-Lipschitz class $C^\alpha(G)$ can be approximated with any predetermined accuracy by a finite sum of the Fourier coefficients of the function for a harmonically modulated argument.

Keywords: Gelder-Lipschitz lass, function, second, third and higher derivatives of a function, Fourier coefficient dependencies, approximation, harmonically modulated argument.

УДК 519.63

Математическая модель реакторного блока каталитического риформинга с учетом гидродинамики неподвижного слоя катализатора и кинетики химических превращений

Кутьенкова М.А.¹, Поздникова А.Д.¹, Губайдуллин И.М.^{1,2}

УГНТУ¹, ИНК УФИЦ РАН²

Аннотация: В работе рассматривается разработка составной математической модели реакторного блока каталитического риформинга с учетом особенностей движения реакционной смеси в неподвижном слое катализатора и кинетики химических превращений углеводородных компонентов. Модель включает гидродинамический и кинетический модули. В качестве расчетной схемы реактора используется модель реактора идеального вытеснения. Кинетическая часть основана на детализированном описании состава сырья и основных реакций каталитического риформинга.

Ключевые слова: каталитический риформинг, математическое моделирование, реактор идеального вытеснения, неподвижный слой катализатора, кинетика, гидродинамика.

1. Введение

Каталитический риформинг является одним из ключевых процессов нефтепереработки, предназначенным для получения высокооктановых компонентов бензинов и ароматических углеводородов.

Промышленный процесс осуществляется в блоке последовательно соединенных реакторов с неподвижным слоем катализатора. Газосырьевая смесь после смешения с водородсодержащим газом проходит через реакторы, где протекают реакции ароматизации, дегидроциклизации, изомеризации и гидрокрекинга.

Процесс характеризуется высокой чувствительностью к температуре, давлению, составу сырья и активности катализатора. Температура в зоне реакции составляет порядка 470–530 °С, что требует учета тепловых эффектов протекающих превращений.

Целью работы является разработка математической модели реакторного блока каталитического риформинга, включающей гидродинамическое описание слоя катализатора и кинетическое описание химических превращений.

2. Гидродинамический модуль модели

Гидродинамический модуль предназначен для формирования структуры неподвижного слоя катализатора и расчета движения реакционной смеси через межзерновое пространство.

В модели выполняется построение расчетной области, содержащей гранулы катализатора заданного размера. Размещение частиц осуществляется с учетом геометрических ограничений, что позволяет получить структуру слоя, приближенную к

реальному каталитическому блоку.

В отличие от методов дискретных элементов, требующих расчета большого количества контактных взаимодействий, используется геометрический подход формирования упаковки частиц. Это позволяет уменьшить вычислительные затраты при сохранении физической корректности представления каталитического слоя.

Расчет движения потока выполняется на основе модели реактора идеального вытеснения (РИВ), предполагающей поршневое движение газосырьевой смеси вдоль длины реактора без учета продольного перемешивания.

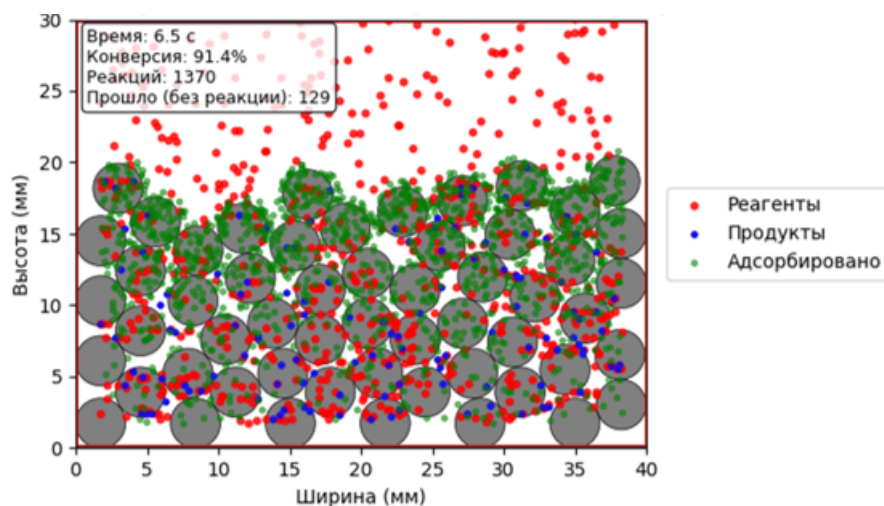


Рис. 1. Моделирование движения реакционной смеси через слой катализатора

Полученная структура слоя используется для анализа взаимодействия компонентов потока с активной поверхностью катализатора.

3. Кинетический модуль

Кинетический модуль предназначен для расчета изменения компонентного состава реакционной смеси в процессе каталитического риформинга.

В модели используется укрупненное представление состава сырья с выделением 19 групп компонентов: нормальных и изопарафинов, пяти- и шестичленных нафтеннов, ароматических соединений, олефинов, легких углеводородных газов, водорода, серо- и азотсодержащих соединений, а также кокса.

Кинетическая схема включает 21 реакцию, объединяющую основные направления превращений:

- изомеризация парафинов;
- ароматизация и дегидроциклизация нафтеннов;
- гидрокрекинг углеводородов;
- гидрирование примесей;
- реакции уплотнения с образованием кокса.

Изменение расходов компонентов описывается системой материальных балансов:

$$\frac{dF_i}{dl} = \sum_j \nu_{ij} r_j$$

где F_i – молярный расход компонента, l – координата реактора, ν_{ij} – стехиометриче-

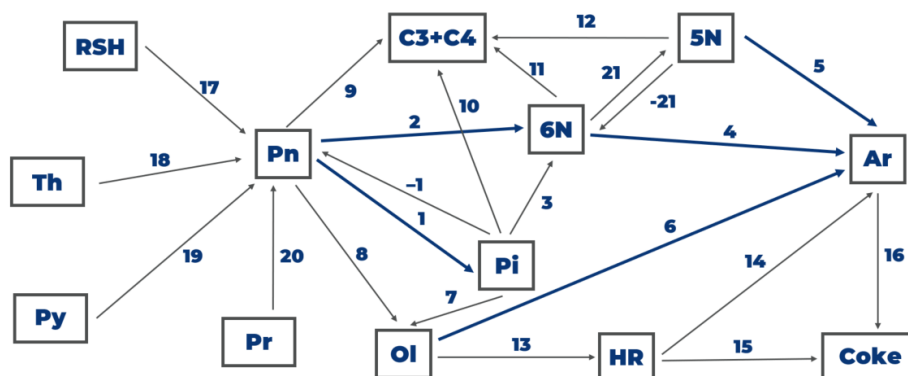


Рис. 2. Схема основных направлений химических превращений в модели каталитического риформинга

ский коэффициент, r_j – скорость реакции.

Скорость реакции определяется кинетическим выражением с учетом адсорбции компонентов:

$$r_j = a \frac{k_j \prod_i P_i^{n_{ij}}}{1 + \sum_i K_{ad,i} P_i}$$

Температурная зависимость константы скорости учитывается уравнением Аррениуса:

$$k_j = k_{0j} \exp\left(-\frac{E_A}{RT}\right)$$

Для учета тепловых эффектов реакций используется энергетический баланс:

$$\frac{dT}{dl} = -\frac{\sum_j r_j \Delta H_j}{F_t c_p}$$

Снижение активности катализатора вследствие образования кокса учитывается коэффициентом активности:

$$a = \exp(-k_d C_{coke})$$

4. Численная реализация модели

Расчетная модель представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно координаты реактора.

В качестве ядра модели используется реактор идеального вытеснения. Для решения жесткой системы уравнений применяется неявный метод обратного дифференцирования BDF.

Входными параметрами модели являются температура, давление, расход сырья, расход водородсодержащего газа и компонентный состав исходной смеси.

В результате расчета определяются температурный профиль, распределение компонентов, выход водорода и показатели качества продукта.

5. Расчетная схема реакторного блока

В текущей версии модели реактор рассматривается как РИВ без учета продольного перемешивания.

Межреакторный подогрев реакционной смеси на данном этапе не учитывается и является направлением дальнейшего развития модели.

6. Заключение

Разработана составная математическая модель реакторного блока каталитического риформинга, включающая гидродинамический и кинетический расчетные модули.

Использование гидродинамического блока позволяет учитывать особенности структуры неподвижного слоя катализатора, а кинетический модуль обеспечивает расчет превращений основных групп углеводородных компонентов.

Предлагаемая модель может использоваться для анализа технологических режимов и дальнейшей оптимизации работы реакторного блока каталитического риформинга.

Исследование выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания Института нефтехимии и катализа УФИЦ РАН FMRS-2025-0031 «Компьютерное моделирование химических и химико-технологических процессов: разработка и тестирование новых алгоритмов и программ».

Список литературы

1. Коледина К.Ф. Многокритериальная оптимизация и оптимальное управление химическими процессами на основе детализированной кинетической модели. Диссертация. Уфа, 2020.
2. Прокофьева Т.В., Круглов С.С. Технологический расчет реакторного блока установки каталитического риформинга с платиновым катализатором. Москва: РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2019.
3. Петьков В.И., Корытцева А.К. Химические реакторы: электронное учебно-методическое пособие. Нижний Новгород, 2012.
4. Ахметов С.А., Гайсина А.Р. Моделирование и инженерные расчеты физико-химических свойств углеводородных систем. Санкт-Петербург: Недра, 2010.

MSC 65L05

Mathematical model of the catalytic reforming reactor unit taking into account the hydrodynamics of the stationary catalyst layer and the kinetics of chemical transformations

M.A. Kutiyenkova¹, A.D. Pozdnikova¹, I.M. Gubaydullin^{1,2}

UPSTU¹, Institute of Petrochemistry and Catalysis UFIC RAS²

Abstract: The paper considers the development of a complex mathematical model of a catalytic reforming reactor unit, taking into account the characteristics of the movement of the reaction mixture in a stationary catalyst layer and the kinetics of chemical transformations of hydrocarbon components. The model includes hydrodynamic and kinetic modules. An ideal displacement reactor model is used as the design scheme of the reactor. The kinetic part is based on a detailed description of the composition of the raw materials and the main reactions of catalytic reforming.

Keywords: catalytic reforming, mathematical modeling, ideal displacement reactor, stationary catalyst layer, kinetics, hydrodynamics.

УДК 534.11

Нейросетевое моделирование продольных колебаний каната с подвижной границей

Литвинов В.Л.¹, Литвинова К.В.²

Самарский государственный технический университет¹, Московский
государственный университет имени М.В. Ломоносова²

Аннотация: Предложен подход к расчёту свободных продольных колебаний каната переменной длины, основанный на применении физически-информированных нейронных сетей. В отличие от классических аналитических методов, сеть обучается непосредственно в области с движущейся границей, без перехода к неподвижным координатам. Полученное решение хорошо согласуется с известными результатами. Метод может быть распространён на более сложные законы движения границ с учётом диссипативных факторов.

Ключевые слова: волновое уравнение, канат переменной длины, подвижная граница, машинное обучение, физически-информированные нейронные сети.

Динамика одномерных объектов с перемещающимися границами – канатов грузоподъёмных машин, гибких передач, бурильных колонн – традиционно описывается дифференциальными уравнением в частных производных в области, размер которой зависит от времени. Присутствие подвижной границы делает классические аналитические приёмы, такие как метод разделения переменных или метод характеристик, пригодными лишь для простейших линейных законов движения и при отсутствии диссипации. Приближенные методы, в частности метод Канторовича–Галеркина, расширяют круг решаемых задач, однако требуют перехода к неподвижной области и априорного выбора системы базисных функций. В настоящей работе демонстрируется альтернативная стратегия, опирающаяся на аппарат физически-информированных нейронных сетей, которая свободна от указанных ограничений.

Рассматривается канат, один конец которого жёстко закреплён, а второй перемещается с постоянной скоростью, что приводит к линейному изменению длины во времени. Искомая функция смещения аппроксимируется полносвязной нейронной сетью, на вход которой подаются безразмерные координата и время. Обучение сети сводится к минимизации составного функционала невязок. В него включаются среднеквадратичное отклонение от выполнения волнового уравнения во внутренних точках области, невязки граничных условий на левом и правом концах, а также, при необходимости, штраф за нарушение начальных условий.

Для контроля граничных условий дополнительные точки размещаются на кривых, отвечающих неподвижному левому торцу и перемещающемуся правому. Такой подход позволяет обучать сеть непосредственно в физическом пространстве без каких-либо замен переменных, преобразующих подвижную область в стационарную. После завершения обучения сеть способна почти мгновенно предсказывать продольное смещение для любой пары координата–время из рассматриваемого диапазона.

Для извлечения динамических характеристик решение, генерируемое сетью, раскладывается по синусоидальным базисным функциям, аргумент которых явно зависит от текущей длины каната. Коэффициенты разложения, имеющие смысл амплитуд отдельных мод, находятся методом наименьших квадратов. Процедура позволя-

ет проследить эволюцию амплитуд во времени без аналитического интегрирования. Численная иллюстрация выполнена для значения безразмерной скорости границы, равного пяти сотым. Использовалась сеть с четырьмя скрытыми слоями по пятьдесят нейронов и функцией активации гиперболический тангенс. Оптимизация проводилась методом Adam при начальной скорости обучения одна тысячная; обучающая выборка содержала несколько тысяч внутренних и несколько сотен граничных точек. Сопоставление амплитуды первой динамической моды, полученной нейросетевым способом, с известным аналитическим решением, построенным ранее для аналогичной задачи [1-10], показало, что максимальная относительная погрешность не превышает пяти процентов.

Анализ результатов позволяет исследовать влияние скорости движения границы на собственные частоты системы. В частности, с ростом скорости наблюдается смещение частот, качественно согласующееся с данными, полученными традиционными методами. Важно, что методика легко обобщается на случай нелинейного закона изменения длины: для этого достаточно лишь изменить способ генерации граничных точек, не модифицируя ни архитектуру сети, ни процедуру обучения.

Таким образом, физически-информированные нейронные сети продемонстрировали способность эффективно решать задачу о свободных продольных колебаниях каната с подвижной границей. Предложенный подход не требует громоздких аналитических преобразований, не чувствителен к виду закона движения границы и естественным образом масштабируется на более сложные постановки, включающие диссипацию, геометрическую нелинейность или быстро движущиеся границы. Развитие метода может идти по пути применения глубоких архитектур с остаточными связями, что сделает его применимым к ещё более широкому кругу технических систем с переменной длиной.

Литература

1. Савин Г.Н., Горошко О.А. Динамика нити переменной длины. Киев: Наук. думка, 1962. 332 с.
2. Самарин Ю.П. Об одной нелинейной задаче для волнового уравнения в одномерном пространстве // Прикладная математика и механика. 1964. Т. 26, вып. 3. С. 77-80.
3. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. Исследование резонансных свойств механических объектов с движущимися границами при помощи метода Канторовича-Галеркина // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико-математические науки». 2009. № 1 (18). С. 149-158.
4. Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. Москва: Физматлит, 2001. 320 с.
5. Литвинов В.Л., Литвинова К.В. Применение метода Канторовича-Галеркина для анализа резонансных характеристик систем с затуханием // Теоретическая и математическая физика. 2025. Т. 224, № 1. С. 95-104.
6. Литвинов В.Л., Литвинова К.В. Приближенный метод решения краевых задач с подвижными границами путем сведения к интегродифференциальным уравнениям // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2022. Т. 62, № 6. С. 977-986.

7. Литвинов В.Л., Шамолин М.В. Об одном асимптотическом методе решений однородных интегро-дифференциальных уравнений, описывающих колебания объектов с движущимися границами // Сибирский журнал индустриальной математики. 2025. Т. 28, № 2. С. 39-54.
8. Литвинов В.Л., Литвинова К.В. Об одном обратном методе решения задач о колебаниях механических систем с движущимися границами // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2024. № 3. С. 53-59.
9. Ерофеев В.И., Леонтьева А.В. Квазигармоническая продольная волна, распространяющаяся в стержне Миндлина-Германа, погруженном в нелинейно-упругую среду // Теоретическая и математическая физика. 2022. Т. 211, № 2. С. 216-235.
10. Литвинов В.Л., Шамолин М.В. Математическое моделирование и методы анализа колебаний механических систем с движущимися границами // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2025. Т. 249. С. 79-93.

MSC 74H45, 74K05

Neural network modeling of longitudinal oscillations of a rope with a moving boundary

V.L. Litvinov¹, K.V. Litvinova²

Samara State Technical University¹, Lomonosov Moscow State University²

Abstract: An approach to calculating free longitudinal oscillations of a variable-length rope is proposed, based on the use of physically-informed neural networks. Unlike classical analytical methods, the network is trained directly in the domain with a moving boundary, without transitioning to fixed coordinates. The resulting solution is in good agreement with existing results. The method can be extended to more complex laws of boundary motion, taking into account dissipative factors.

Keywords: wave equation, variable-length rope, moving boundary, machine learning, physically-informed neural networkss.

УДК 519.63

Гибридный GPU-алгоритм для моделирования осесимметричных реагирующих течений с жесткой химической кинетикой*

Логинов В.В.¹, Пескова Е.Е.¹

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет¹

Аннотация: Представлен гибридный вычислительный алгоритм для моделирования осесимметричных течений многокомпонентного реагирующего газа с учётом детальной химической кинетики. Газодинамическая часть решается на GPU с использованием PyCUDA, а интегрирование жёсткой системы обыкновенных дифференциальных уравнений химической кинетики выполняется с помощью библиотеки JAX (решатель Kvaerno5) на том же GPU. Для передачи данных между PyCUDA и JAX применён механизм zero-copy через DLPack, что позволяет избежать лишнего копирования через оперативную память. Проведено сравнение производительности предложенного подхода с реализацией на C++ с использованием решателя Radau5, а также оценено влияние zero-copy на скорость обмена данными. Результаты демонстрируют, что гибридный GPU-алгоритм обеспечивает высокую эффективность для задач с большим числом ячеек и сложной химией.

Ключевые слова: осесимметричные течения, реагирующие газы, химическая кинетика, GPU, PyCUDA, JAX, DLPack.

1. Введение

Численное моделирование реагирующих газодинамических течений находит широкое применение в аэротермохимии, энергетике и химической технологии. Особую сложность представляют задачи с детальной кинетикой, включающей десятки компонентов и сотни реакций, что приводит к необходимости интегрирования жёстких систем ОДУ в каждой ячейке расчётной сетки. Традиционные подходы, основанные на CPU, часто становятся узким местом по производительности. В последние годы активно развиваются гибридные алгоритмы, использующие графические процессоры для ускорения как газодинамических, так и химических вычислений [1], в том числе с применением подходов к JIT-компиляции, аналогичных используемым [2].

В данной работе предлагается гибридный GPU-алгоритм, в котором газодинамическая часть реализована на PyCUDA [3], а интегрирование химической кинетики — на JAX [4] с применением JIT-компиляции и векторизации. Такой подход позволяет эффективно использовать вычислительные ресурсы GPU для обоих этапов, а механизм DLPack обеспечивает обмен данными без копирования между библиотеками. В статье описываются математическая модель, численный метод, особенности реализации и результаты тестирования производительности.

*Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 26-11-00095.

2. Математическая модель

Рассматривается осесимметричное течение в цилиндрических координатах (z, r) с компонентами скорости u_z и u_r . Система уравнений сохранения массы компонентов, импульса и энергии в консервативной форме имеет вид:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial(F^{(1)}(U) - H^{(1)}(U))}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r(F^{(2)}(U) - H^{(2)}(U)))}{\partial r} = W, \quad (1)$$

где U — вектор консервативных переменных:

$$U = \begin{pmatrix} \rho Y_m \\ \rho u_z \\ \rho u_r \\ \rho h \end{pmatrix},$$

ρ — плотность смеси, Y_m — массовая доля m -го компонента ($m = \overline{1, N_s}$, $N_s = 15$), h — удельная энтальпия смеси. Векторы конвективных потоков:

$$F^{(1)}(U) = \begin{pmatrix} \rho u_z Y_m \\ \rho u_z^2 + \pi \\ \rho u_z u_r \\ \rho h u_z \end{pmatrix}, \quad F^{(2)}(U) = \begin{pmatrix} \rho u_r Y_m \\ \rho u_z u_r \\ \rho u_r^2 + \pi \\ \rho h u_r \end{pmatrix},$$

где π — динамическое давление. Диффузионные потоки $H^{(1)}$ и $H^{(2)}$ в настоящей работе не учитываются (вместо них используется схема с искусственной вязкостью Лакса–Фридрихса). Источниковый член:

$$W = \begin{pmatrix} R_m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где R_m — скорость образования/расхода m -го компонента.

Используется детальный механизм, включающий 15 компонентов и 40 элементарных реакций. Список компонентов: 1. C_2H_4 , 2. H_2 , 3. CH_4 , 4. CH_3 , 5. C_2H_5 , 6. H , 7. C_3H_7 , 8. C_3H_6 , 9. C_2H_3 , 10. C_2H_2 , 11. C_3H_4 , 12. C_3H_3 , 13. C_6H_6 , 14. C_6H_5 , 15. C_2H_6 .

Скорости реакций задаются законом Аррениуса:

$$k_i = A_i \exp\left(-\frac{E_{a,i}}{RT}\right),$$

где A_i и $E_{a,i}$ – предэкспоненциальный множитель и энергия активации соответственно, R – универсальная газовая постоянная. Для каждой ячейки решается система ОДУ относительно концентраций x_m (моль/м³):

$$\frac{dx_m}{dt} = f_m(x_1, \dots, x_{N_s}, T),$$

где f_m – сумма скоростей образования/расхода по всем реакциям. Система является жёсткой, что требует использования неявных методов.

3. Численный метод и особенности реализации

Для решения системы (1) применяется метод расщепления по физическим процессам: на каждом временном шаге τ последовательно выполняются газодинамический и химический этапы.

Расчётная область покрывается структурированной сеткой размером N_x ячеек по z и N_y по r . Добавляются фиктивные слои ($K = 1$) для граничных условий. Конвективные потоки вычисляются по схеме Лакса–Фридрихса:

$$F_{i-1/2} = \frac{1}{2} (F(U_{i-1}) + F(U_i) - \alpha(U_i - U_{i-1})),$$

где α – максимальная скорость распространения возмущений. Для учёта давления используется проекционный метод: после вычисления промежуточных полей скорости формулируется уравнение Пуассона для поправки давления π' :

$$\nabla^2 \pi' = \frac{\rho_0}{\tau} \left(\frac{\partial u^*}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv^*)}{\partial r} \right),$$

которое решается итерационным методом Якоби до сходимости 10^{-5} [5]. Все газодинамические операции (расчёт потоков, обновление полей, итерации давления, коррекция скорости, граничные условия) реализованы в виде CUDA-ядер и вызываются через PyCUDA.

Интегрирование ОДУ выполняется с помощью библиотеки JAX и её расширения Diffax [6]. Используется адаптивный решатель Kvaerno5 (неявный метод Рунге–Кутты) с контролем шага (PIDController, $\text{rtol}=\text{atol}=10^{-10}$). Для ускорения применяется векторизация по всем ячейкам, что позволяет одновременно интегрировать систему для всей сетки.

PyCUDA и JAX работают с разными абстракциями памяти GPU. Для обмена данными без лишнего копирования через CPU используется протокол DLPack, который позволяет передавать указатели на массивы в памяти GPU между различными фреймворками. В данном подходе массивы плотности, температуры и концентраций, хранящиеся в PyCUDA, преобразуются в объекты CuPy (которые поддерживают DLPack), затем передаются в JAX как дескрипторы DLPack, и наоборот. Это исключает этап копирования на CPU и значительно сокращает накладные расходы.

4. Результаты вычислительных экспериментов

Эффективность разработанного JAX-алгоритма оценивалась в сравнении с классическим решателем Radau5 на C++. Как видно из рис. 1, применение JAX на GPU позволяет сократить время вычислений примерно в 9 раз по сравнению с CPU-реализацией.

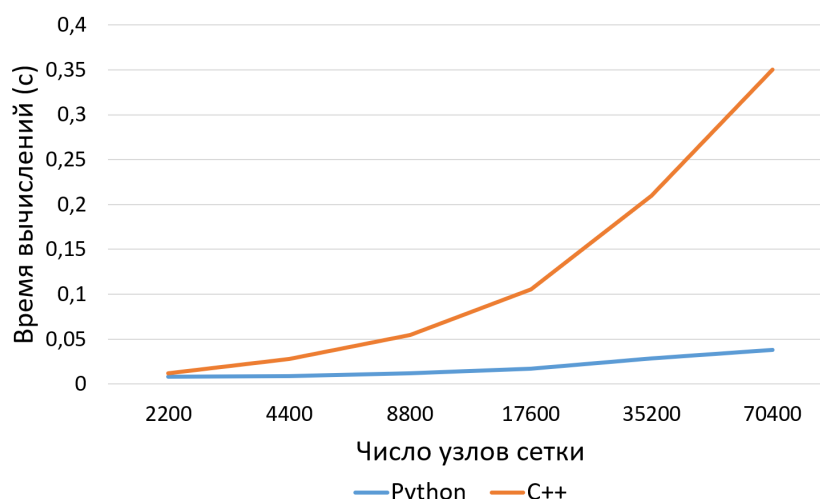


Рис. 1. Зависимость времени одного химического шага от числа ячеек.

Для передачи данных между PyCUDA и JAX сравнивались два подхода:

1. Zero-сору через DLPack.
2. Обычное копирование через промежуточные массивы NumPy (с чтением/записью через CPU).

Как показывают замеры времени (рис. 2), обмен данными через DLPack выигрывает в скорости на любых расчетных сетках. Уже на самых мелких сетках (2 200 узлов) стандартное копирование через процессор отстает примерно на 30%. По мере увеличения числа узлов этот разрыв только растет: на сетке размерностью 70 400 элементов DLPack сокращает время вычислений почти вдвое по сравнению с передачей через CPU.

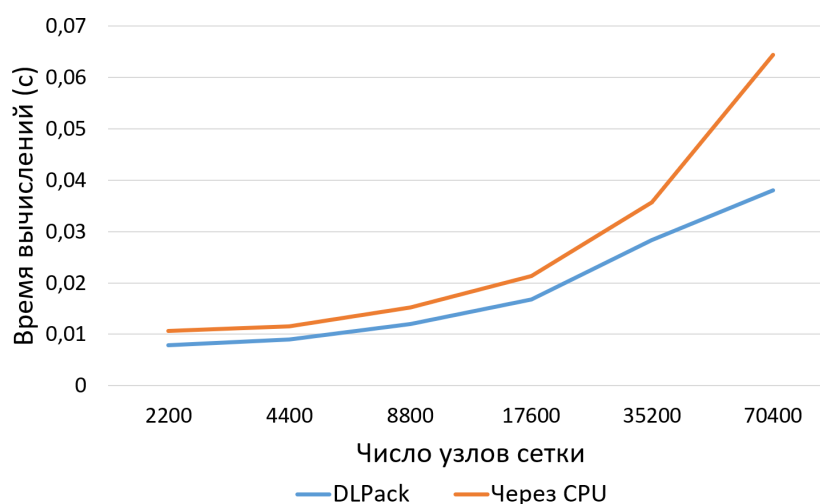


Рис. 2. Сравнение времени передачи данных.

5. Заключение

Разработан гибридный GPU-алгоритм для моделирования осесимметричных реагирующих течений, сочетающий эффективную газодинамическую часть на PyCUDA и высокопроизводительное интегрирование химической кинетики на JAX. Использование метода расщепления по физическим процессам, схемы Лакса–Фридрихса, проекционного метода для давления и адаптивного решателя Kvaerno5 позволило достичь хорошей точности и устойчивости счёта. Применение DLPack для zero-copy обмена данными между библиотеками практически устраняет накладные расходы на передачу. Сравнение с C++ реализацией показало, что JAX обеспечивает лучшую производительность.

Литература

1. Peskova E.E., Snytnikov V.N. The Influence of Laser Radiation on the Laminar Flow of a Chemically Active Gas-Dust Medium in a Narrow Circular Tube // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. 2024. Vol. 58, No. 3. P. 517-525.
2. Numba. URL: <https://numba.pydata.org/>. Дата обращения: 10.07.2026.
3. PyCUDA. URL: <https://documen.tician.de/pycuda/>. Дата обращения: 10.07.2026.
4. Bradbury J. et al. JAX: composable transformations of Python+NumPy programs. 2018. URL: <http://github.com/google/jax>. Дата обращения: 10.07.2026.
5. Ортега Дж. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем. Москва: Мир, 1991. 368 с.
6. Kidger P. Diffrax: a library for numerical integration of differential equations in JAX. 2021. URL: <https://github.com/patrick-kidger/diffrax>. Дата обращения: 10.07.2026.

MSC 65L20

A hybrid GPU algorithm for modeling axisymmetric reacting flows with stiff chemical kinetics

V.V. Loginov¹, E.E. Peskova¹

National Research Ogarev Mordovia State University¹

Abstract: A hybrid computational algorithm is presented for modeling axisymmetric flows of a multicomponent reacting gas with detailed chemical kinetics. The gas-dynamic part is solved on GPU using PyCUDA, while the integration of the stiff system of ordinary differential equations of chemical kinetics is performed with the JAX library (Kvaerno5 solver) on the same GPU. A zero-copy data exchange between PyCUDA and JAX is implemented via DLPack, avoiding unnecessary copying through host memory. The performance of the proposed approach is compared with a C++ implementation using the Radau5 solver, and the impact of zero-copy on data transfer speed is evaluated. The results demonstrate that the hybrid GPU algorithm provides high efficiency for problems with a large number of cells and complex chemistry.

Keywords: axisymmetric flows, reacting gases, chemical kinetics, GPU, PyCUDA, JAX, DLPack

УДК 51-72:004.942:532.529:544.77

Модель самодвижущейся системы вращающихся частиц вблизи плоской стенки

Мартынов С.И.¹, Ткач Л.Ю.¹

Сургутский государственный университет¹

Аннотация: В статье предложена модель самодвижущейся системы вращающихся дипольных частиц вдоль плоской стенки. Механизм самодвижения вращающихся частиц основан на их гидродинамическом взаимодействии со стенкой и между собой. Вращение дипольных частиц создается внешним переменным однородным полем. На основе предложенной модели проведено компьютерное моделирование динамики системы частиц, расположенных в виде прямолинейной и замкнутой цепочки частиц, а также в виде трехмерного облака из случайно расположенных частиц. Вращение частиц рассматривалось как вдоль стенки, так и перпендикулярно ей. Смоделировано самодвижение системы вращающихся частиц при наличии сдвигового потока жидкости.

Ключевые слова: коллективный транспорт, численное моделирование, вязкая жидкость, гидродинамическое взаимодействие, вращающиеся частицы.

1. Актуальность исследования

Изучение механизмов управляемого транспорта системы микрочастиц вблизи стенки представляет практический интерес в связи актуальными задачами биомедицины (процессы образование тромбов в сосудах) и динамики микрочастиц в каналах микрофлюидных устройств [1]. Современные достижения в области нанотехнологий позволяют создавать синтетические наномоторы, использующие взаимодействие со стенкой для формирования направленного движения [2]. При этом сложность динамических процессов, происходящих в системах микрочастиц вблизи стенки, требует дальнейших теоретических исследований в области управляемого транспорта таких систем.

Для одиночной сферы, вращающейся в вязкой ньютоновской жидкости вблизи плоской стенки, аналитические результаты были получены в работе [3] в приближении Стокса. Было найдено, что вращающаяся сфера движется параллельно стенке в направлении, соответствующем направлению качения сферы. Сила, перпендикулярная стенке, появляется при учете инерционных слагаемых в уравнениях движения жидкости и частицы [4]. На основании имеющихся результатов по динамике одиночной частицы можно предположить, что и система вращающихся частиц также будет перемещаться вдоль стенки за счет механизма гидродинамического взаимодействия. В настоящей работе представлены результаты моделирования динамики системы вращающихся дипольных частиц и ее перемещение вдоль стенки за счет гидродинамического взаимодействия. Предполагается, что вращение дипольных частиц вызвано действием переменного внешнего поля, создающего момент силы, вращающий частицы. В работе [5] показано, что такая система формирует неравновесную динамическую структуру в результате гидродинамического взаимодействия частиц между собой. Причем, сформированные структуры вращаются в том же направлении, что и сами частицы. При этом центр масс вращающихся структур остается

неподвижным, хотя размеры структур могут изменяться за счет увеличения расстояния между частицами. Вращение же структуры при наличии плоской стенки должно приводить к перемещению центра тяжести системы. Для подтверждения этого вывода в настоящей работе смоделирована динамика системы из пяти дипольных частиц одинакового радиуса, образующих равновесную структуру в виде прямой или замкнутой цепочки, ориентированной вдоль и перпендикулярно плоскости, а также облака из четырнадцати случайно расположенных над плоскостью частиц. Кроме того, для системы в виде прямолинейной цепочки вращающихся частиц, расположенных вдоль стенки, смоделировано совместное действие вращения частиц и сдвигового течения жидкости на перемещение системы вдоль стенки.

2. Математическая модель

В полубесконечном пространстве, ограниченном плоскостью $Z = 0$, помещается несжимаемая жидкость вязкости η и система из сферических частиц радиуса a , обладающих магнитным моментом $\mathbf{m}$. Рассматривались одномерный, двухмерный и трехмерный случаи задачи. В одномерном случае система из 5 частиц в равновесном состоянии формирует структуру в виде прямолинейной цепочки с расстоянием $4a$ между частицами, расположенной вдоль оси Ox на расстоянии $4a$ от стенки. В двухмерном случае система из 5 частиц в равновесном состоянии формирует плоскую структуру в виде правильного пятиугольника в вершинах которого располагаются частицы, причем суммарный магнитный момент равен нулю. Считалось, что частицы, образующих правильный пятиугольник лежат на окружности радиуса $3a$. Рассматривался случай расположения пятиугольника в плоскости yOz , т.е. перпендикулярно стенке. Расстояние от частиц до стенки в первом случае равно $3a$, а во втором – начальное расстояние от стенки до ближайших частиц в пятиугольнике равно $2.073a$. В трехмерном случае система из 14 частиц случайно расположены в объеме, ограниченном координатами $-4a \leq X \leq 4a$, $-4a \leq Y \leq 4a$, $2a \leq Z \leq 10a$. Приложенное внешнее однородное переменное магнитное поле с напряженностью $\mathbf{H} = \{0; -H_0 \cos(\Omega t); H_0 \sin(\Omega t)\}$ приводит частицы во вращательное движение. Вращательное движение частиц, в свою очередь, приводит к возникновению течения вязкой жидкости и формированию гидродинамических сил и моментов, действующих на частицы. Моделирование динамики рассматриваемых систем частиц следует работе [5]. Система уравнений динамики рассматриваемой системы определяется уравнениями движения жидкости и каждой частицы, входящей в систему. В уравнениях движения частиц учитываются как внутренние, так и внешние силы и моменты, действующих на частицы, в том числе и со стороны жидкости. Так как рассматривается случай малых чисел Рейнольдса, это позволяет использовать следующую систему уравнений для описания динамики системы частиц:

$$\mathbf{F}_k^{(i)} + \mathbf{F}_k^{(e)} + \mathbf{F}_k^{(h)} = 0, \quad \mathbf{T}_k^{(i)} + \mathbf{T}_k^{(e)} + \mathbf{T}_k^{(h)} = 0. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{F}_k^{(h)}$ – силы, $\mathbf{T}_k^{(h)}$ – моменты сил со стороны жидкости, $\mathbf{F}_k^{(e)}$, $\mathbf{T}_k^{(e)}$ – силы и моменты сил со стороны внешнего поля, $\mathbf{F}_k^{(i)}$, $\mathbf{T}_k^{(i)}$ – силы и моменты диполь-дипольного взаимодействия, действующие на частицу с номером k со стороны других частиц. В настоящей работе рассматривается воздействие переменного магнитного поля с частотой, при которой силы инерции можно не учитывать (случай малых частот). Учет внутренних сил взаимодействия частиц проводится на основе парных диполь-дипольных взаимодействий.

Для нахождения гидродинамических сил $\mathbf{F}_k^{(h)}$ и моментов $\mathbf{T}_k^{(h)}$, действующих на частицы, решается следующая система уравнений гидродинамики для скорости $\mathbf{u}$ и давления p :

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \quad -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} = 0.$$

На поверхности частицы с номером k должны выполняться условия:

$$u_i = V_i^k + \Omega_{ij}^k x_j^k, \quad |\mathbf{X}^k| = a^k.$$

Здесь введены следующие обозначения: $\mathbf{V}^k$ – вектор абсолютной линейной скорости, Ω_{ij}^k – тензор угловой скорости, $\mathbf{X}^k$ – вектор положения точки жидкости относительно центра частицы с номером k и радиусом a^k .

Далеко от частиц должны выполняться условия:

$$u_i \rightarrow 0, \quad p \rightarrow p_0 \quad \text{если } |\mathbf{X}| \rightarrow \infty.$$

Здесь p_0 – невозмущенное давление в жидкости.

3. Результаты моделирования

Первоначально прямолинейная цепочка из пяти дипольных частиц, расположенной вдоль стенки, целиком перемещается по направлению вращения частиц. При этом частицы движутся с различными скоростями, не перемешиваясь между собой. Крайние частицы отстают от трех центральных. Другими словами, при движении частиц образуется выступ, который увеличивается со временем. Это согласуется с экспериментальными результатами работы [6], в которой вращающиеся частицы демонстрировали неустойчивость своей фронтальной структуры с образованием «пальчиковых» образований. При наличии сдвигового течения со скоростями $U_y = 0.1z$ и $U_y = -0.1z$ величина перемещения частиц увеличивается в 1.04 раза для течения с первой скоростью, а для течения со второй скоростью уменьшается в 1.03 раза по сравнению со случаем цепочки без дополнительного вращения частиц. Замкнутая цепочка, в которой частицы расположены в вершинах правильного многоугольника перпендикулярно стенке, перемещается вдоль стенки по направлению вращения частиц, значительно деформируя первоначальную форму. При наличии между частицами в такой цепочке потенциала взаимодействия, имеющего минимум при равновесном положении частиц, приводит к увеличению перемещения за счет вращения всей цепочки в целом. Потенциал взаимодействия стабилизирует форму цепочки в результате взаимодействия со стенкой: она деформируется меньше, чем в случае его отсутствия. Для трехмерной структуры получено перемещение центра тяжести системы на расстояние $l = 0.25a$ по направлению вращения частиц. Таким образом, результаты моделирования показывают, что система вращающихся частиц может перемещаться вдоль стенки за счет механизма гидродинамического взаимодействия.

Литература

1. Chen Y., Demir E., Gao W., Yong Y., Pak O. Wall-induced translation of a rotating particle in a shear-thinning fluid // J. Fluid Mechanics. 2021. Vol. 927. R2.
2. Elgeti J., Gompper G. Microswimmers near surfaces // Eur. Phys. J. 2016. Vol. 225. P. 2333-2352.

3. Dean W.R., O'Neill M.E. A slow motion of viscous liquid caused by the rotation of a solid sphere // *Mathematika*. 1963. Vol. 10, No. 1. P. 13-24.
4. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. Москва: Мир, 1976. 630 с.
5. Мартынов С.И., Ткач Л.Ю. Гидродинамический механизм формирования динамической структуры системы вращающихся частиц // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2024. Т. 26, № 2. С. 175-194.
6. Driscoll M., Delmotte B., Youssef M., Sacanna S., Donev A., Chaikin P. Unstable fronts and motile structures formed by microrollers // *Nature Phys.* 2017. Vol. 13. P. 375-379.

MSC 76D07, 76D09, 76D17

Model of a self-propelled system of rotating particles near a flat wall

S.I. Martynov ¹, L.Yu. Tkach ¹

Surgut State University ¹

Abstract: A model of a self-propelled system of rotating dipole particles along a flat wall is proposed. The mechanism of self-propelled particles is based on their hydrodynamic interaction with the wall and with each other. The rotation of the dipole particles is generated by an external variable uniform field. Based on the proposed model, a computer simulation of the dynamics of a system of particles arranged in the form of a rectilinear and closed chain of particles, as well as a three-dimensional cloud of randomly distributed particles, was conducted. Particle rotation was considered both along and perpendicular to the wall. The self-propelled system of rotating particles was simulated in the presence of a shear fluid flow.

Keywords: collective transport, numerical modeling, viscous fluid, hydrodynamic interaction, rotating particles.

УДК 519.63

Моделирование фильтрации вязкопластической жидкости в пакете ЛОГОС

Мешкова Е.А.¹, Сыромясов А.О.¹

МГУ им. Н.П. Огарёва¹

Аннотация: В работе представлены результаты численного исследования фильтрации вязкопластических жидкостей через регулярные пористые среды на примере гексагональной плотноупакованной структуры в пакете ЛОГОС. Ввиду отсутствия встроенной реологической модели Бингама в гидродинамическом модуле пакета, расчеты выполнены с использованием адаптированного модуля «Логос Прочность» на основе упругопластической модели с учетом вязкости. Проведена двухэтапная верификация решателя на течениях в цилиндрических трубах круглого и прямоугольного поперечного сечения. Установлены закономерности формирования застойных зон и порогового характера течения, оценено влияние реологических параметров жидкости на эффективную проницаемость.

Ключевые слова: численное моделирование, фильтрация, вязкопластическая жидкость, модель Шведова–Бингама, ЛОГОС, предельное напряжение сдвига, пористая среда.

1. Введение

Вязкопластические жидкости, характеризующиеся наличием предельного напряжения сдвига, широко распространены в технологических процессах [1]. Их фильтрация через пористые среды принципиально отличается от классического течения ньютоновских жидкостей, описанных законом Дарси: при градиентах давления ниже порогового значения движение отсутствует, формируются застойные зоны, а эффективная проницаемость зависит от реологических параметров среды [1, 2].

Отечественный пакет программ ЛОГОС представляет собой мощный инструмент для моделирования различных физических процессов [3], однако моделирование течения неньютоновских жидкостей в пористых структурах даже в таких пакетах является достаточно сложным.

Целью работы является численное исследование закономерностей фильтрации вязкопластических жидкостей через регулярные пористые структуры с применением пакета ЛОГОС, а также оценка влияния реологических параметров жидкости на фильтрационные характеристики.

2. Постановка задачи и методика моделирования

Для описания реологического поведения жидкости использовалась модель Шведова – Бингама [1, 4], которая в одномерном сдвиговом течении имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = 0, & \tau \leq \tau_0, \\ \tau = \tau_0 + \mu_P \dot{\gamma}, & \tau > \tau_0, \end{cases} \quad (1)$$

где τ — касательное напряжение, τ_0 — предельное напряжение сдвига, μ_P — пластическая вязкость, $\dot{\gamma}$ — скорость сдвига.

Данная модель является частным случаем обобщенной модели Гершеля–Балкли [1], которая задается соотношением:

$$\tau = \tau_0 + K\dot{\gamma}^n, \quad (2)$$

где K — коэффициент консистенции, n — индекс течения.

Так как в расчетах жидкость является несжимаемой, то учитывается уравнение неразрывности, а описание движения основывается на уравнении Навье–Стокса. Однако данная система с реологией Бингама не решается напрямую из-за отсутствия встроенной модели вязкопластической среды в гидродинамическом модуле «Логос Аэро-Гидро». Поэтому для численного моделирования был адаптирован модуль «Логос Прочность» на основе упругопластической модели с учетом вязкости.

Адаптированный подход был применён для моделирования фильтрации через пористую среду, представленную гексагональной плотноупакованной решеткой сферических частиц одинакового диаметра. Эта структура была выбрана из-за ее физической реалистичности и вычислительной эффективности [5]. Использование такой решетки позволило построить трубу (фильтрационную область) со сложной формой внутренней поверхности благодаря контактам сферических гранул.

В качестве граничных условий задавались фиксированные значения давления на входе и выходе трубы, при этом перепад давления известен, а на поверхностях гранул и стенках трубы использовалось условие прилипания.

3. Верификация решателя

Для проверки корректности адаптированного модуля «Логос Прочность» выполнена серия тестовых расчётов. Сначала рассматривалось стационарное течение жидкости плотностью ρ , подчиняющееся модели Шведова–Бингама (1), в бесконечной цилиндрической трубе радиусом R при заданном перепаде давления Δp . Аналитическое решение имеет вид:

$$v(r) = \frac{1}{\mu_P} \left[\frac{|\nabla p|}{4} (R^2 - r^2) - \tau_0 (R - r) \right], \quad r_0 \leq r \leq R, \quad r_0 = \frac{2L\tau_0}{\Delta p}. \quad (3)$$

где L — длина расчетной области.

Расчёт выполнен при $R = 3$ м, $L = 20$ м, $\rho = 1000$ кг/м³, $\mu_P = 1$ Па·с, $\tau_0 = 6$ Па, $\Delta p = 10^5$ Па. Сравнение численных и аналитических значений профиля скорости приведено в таблице 1.

Таблица 1. Профиль скорости в цилиндрической трубе

r , м	Аналитическое решение (3), м/с	ЛОГОС, м/с	Погрешность, %
1.2	8.100	8.091	0.11
2.0	6.500	6.454	0.71
2.5	3.875	3.874	0.03
3.0	0.000	0.000	0.00

Максимальное отклонение не превысило 0.7%, что подтверждает высокую точность реализованного подхода.

Затем для проверки способности модуля моделировать течения в каналах некруглого сечения выполнено сравнение с расчётами в коммерческом пакете ANSYS Fluent [6]. Рассматривался канал с поперечным сечением 8×8 м и длиной $L = 20$ м. В ANSYS использовалась модель Гершеля–Балкли (2) с показателем степени $n = 1$, что эквивалентно модели Бингама с теми же τ_0 и μ_P . Реологические параметры жидкости сохранены такими же, как в предыдущей задаче.

Результаты сравнения с ANSYS представлены в таблице 2.

Таблица 2. Профиль скорости в прямоугольном канале

Расстояние от центра, м	ANSYS, м/с	ЛОГОС, м/с	Погрешность, %
1.4	19.500	19.4627	0.19
2.0	18.000	17.6274	2.07
3.0	11.500	11.4618	0.33
4.0	0.000	0.0000	0.00

Максимальное расхождение составило около 2%, что находится в пределах допустимой погрешности для инженерных расчётов.

Таким образом, модуль «Логос Прочность» корректно воспроизводит вязкопластические течения как в каналах простой, так и сложной геометрии, что позволяет использовать его для моделирования фильтрации в пористых структурах.

4. Результаты моделирования фильтрации в пористой структуре

В ходе вычислительного эксперимента решалась технологическая задача фильтрации бетонной смеси ($\mu_P = 25$ Па·с, $\rho = 2350$ кг/м³, $\tau_0 = 100$ Па) через слой гранулированного керамзита высотой 0.4 м при постоянном перепаде давления.

Таблица 3. Скорость фильтрации в пористой структуре

Расстояние от центра, м	Скорость, м/с
0.05	0.16610
0.10	0.06735
0.15	0.03442
0.20	0.01795
0.25	0.00000

Полученное при моделировании распределение скоростей (таблица 3) позволило количественно описать фильтрацию вязкопластической жидкости внутри регуляр-

ной пористой структуры. Расчеты показывают, что скорость движения жидкости заметно падает при удалении от центра канала: с 0.1661 м/с на расстоянии 0.05 м она снижается до 0.01795 м/с на расстоянии 0.20 м.

При таком распределении видно, что поровое пространство участвует в фильтрации неравномерно. Основной поток сосредоточен в центральной зоне, где сопротивление движению минимально. В то же время вблизи точек контакта между гранулами скорость падает.

Причина в том, что касательные напряжения в этих областях слишком малы, чтобы преодолеть предел текучести вязкопластической жидкости и заставить её течь. Таким образом, расчёты позволили чётко разделить область на активные зоны фильтрации и зоны застоя.

5. Заключение

Проведенные исследования подтвердили, что пакет ЛОГОС с использованием адаптированного модуля «Логос Прочность» обеспечивает достоверное численное моделирование фильтрации вязкопластических жидкостей в регулярных пористых средах.

Использованный подход позволяет корректно учитывать основные физические особенности: пороговый характер движения, формирование застойных зон и влияние реологических параметров на фильтрационные характеристики.

Литература

1. Уилкинсон У.Л. Неньютоновские жидкости. Москва: Мир, 2018. 196 с.
2. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. Москва: Недра, 1972. 288 с.
3. Пакет программ ЛОГОС. Саров, 2012. URL: <https://logos-support.ru/logos/>. Дата обращения: 10.03.2026.
4. Малкин А.Я., Исаев А.И. Реология: концепции, методы, приложения. Санкт-Петербург: Профессия, 2010. 560 с.
5. Шаскольская М.П. Кристаллография. Москва: Высшая школа, 1984. 386 с.
6. ANSYS Fluent. Canonsburg, 2018. URL: <https://www.ansys.com/>. Дата обращения: 08.04.2026.

MSC 76A05, 76S05, 76D99, 76M10

Modeling of Viscoplastic Fluid Filtration in the LOGOS Software Package

E.A. Meshkova¹, A.O. Syromyasov¹

National Research Mordovia State University¹

Abstract: This paper presents the results of a numerical study of viscoplastic fluid filtration through regular porous media, using a hexagonally close-packed structure as an example, performed in the LOGOS software package. Since the hydrodynamic module of LOGOS does not have a built-in Bingham rheological model, the calculations were carried out using an adapted “Logos Strength” module based on an elastoplastic model with viscosity taken into account. A two-stage solver verification was performed for flows in cylindrical pipes of circular and rectangular cross-sections. The patterns of stagnant zone formation and threshold flow behavior were established, and the influence of fluid rheological parameters on effective permeability was evaluated.

Keywords: numerical modeling, filtration, viscoplastic fluid, Shvedov–Bingham model, LOGOS, yield stress, porous medium.

УДК 517.95:536.2:533.2

Численное моделирование сгорания биогаза в камере с центральным впрыском воздуха

Мизхер У.Д.¹, Мизхер М.Д.², Абрашкин П.М.³, Вельмисов П.А.³

Южный технический университет (Ирак)¹, Университет Аль-Шатра (Ирак)²,
Ульяновский государственный технический университет³

Аннотация: В работе представлено численное исследование реагирующего турбулентного потока. Результаты исследования предназначены для повышения стабильности и экологичности сжигания низкокалорийного биогаза. На основе решения системы уравнений Навье-Стокса (RANS), дополненной двухпараметрической моделью турбулентности Realizable $k - \epsilon$ и концепцией вихревого рассеяния (EDC), проанализировано влияние центральной струи вторичного воздуха на макроструктуру и термические свойства факела. Показано, что впрыск инициирует образование устойчивой центральной тороидальной зоны рециркуляции (CTRZ), которая возвращает продукты сгорания и надежно стабилизирует корень пламени. Установлено, что подача 20% центрального воздуха является оптимальным интегральным режимом, обеспечивающим эффективное микроперемешивание, минимизацию выбросов недогоревшего угарного газа (CO) и удержание термических оксидов азота в допустимых безопасных пределах. Полученные данные формируют теоретическую базу для проектирования и модернизации промышленных эко-горелок.

Ключевые слова: вычислительная гидродинамика (CFD), горение биогаза, центральный впрыск воздуха, концепция вихревого рассеяния (EDC), снижение выбросов.

1. Введение

В условиях глобальных экологических вызовов использование возобновляемых источников энергии, в частности биогаза, представляет собой перспективное направление для снижения углеродного следа [1]. Однако сырой биогаз характеризуется значительным содержанием диоксида углерода (CO_2), что снижает его низшую теплоту сгорания и скорость распространения пламени. Прямое сжигание такого топлива часто ведет к нестабильности горения, отрыву пламени и высоким выбросам недогоревших углеводородов и оксида углерода (CO). В настоящей работе для решения этих проблем предлагается внедрение центральной струи вторичного воздуха, направленное на интенсификацию смешения в ядре факела и стабилизацию зоны горения.

2. Математическая модель

Для описания стационарного, неизотермического, реагирующего турбулентного потока многокомпонентной газовой смеси применяется система уравнений Навье-Стокса, осредненных по Рейнольдсу (RANS) [2, 3]:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{u'_i u'_j} \right], \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i h) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{k_{eff}}{C_p} \frac{\partial h}{\partial x_i} \right) + S_h, \quad (3)$$

где p – давление, ρ – плотность, u_i – проекции вектора скорости, μ – динамическая вязкость, $(-\rho \overline{u'_i u'_j})$ представляет собой тензор напряжений Рейнольдса, описывающий турбулентный перенос импульса, h – энтальпия смеси, k_{eff} – эффективная теплопроводность (учитывающая турбулентную теплопроводность), C_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении, S_h – объемный источник тепла за счет экзотермических химических реакций:

Замыкание системы уравнений осуществляется с помощью двухпараметрической модели турбулентности Realizable $k - \epsilon$, обладающей высокой точностью для коаксиальных струй и зон обратных токов. Уравнения переноса кинетической энергии турбулентности (k) и скорости ее диссипации (ϵ) имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i k) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k - \rho \epsilon, \\ \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i \epsilon) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + \rho C_1 S_\epsilon - \rho C_2 \frac{\epsilon^2}{k + \sqrt{\nu \epsilon}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Турбулентно-химическое взаимодействие и локальный состав смеси рассчитываются на основе концепции вихревого рассеяния (Eddy Dissipation Concept – EDC), которая предполагает, что химические реакции протекают в микрозонах турбулентных вихрей.

3. Постановка задачи и граничные условия

Расчетная область моделирует горизонтальный осесимметричный канал камеры сгорания. Конструкция включает центральный канал подачи окислителя (воздуха), коаксиальный канал для биогаза и периферийный канал для основной подачи окислителя. Биогаз задавался бинарной смесью: 65% CH_4 и 35% CO_2 при начальной температуре 300 К и фиксированном расходе 0.05 г/с. Массовый расход центрального впрыска варьировался в диапазоне 0–40% от общего расхода воздуха (0.3 г/с). Стенки камеры моделировались как адиабатические с условием прилипания.

4. Результаты вычислительных экспериментов

1. **Анализ базового режима (без центрального впрыска):** Из-за высокого балластирующего эффекта CO_2 , зона воспламенения сдвинута далеко вниз по течению, а ядро факела прижато к периферии. Это приводит к слабой химической реакционной способности смеси в прикорневой зоне (рис. 1, кривая 0%).
2. **Влияние умеренного впрыска (10–20%):** Введение центральной струи окислителя радикально меняет макроструктуру потока. Формируется высокоинтенсивный сдвиговый слой и устойчивая центральная тороидальная зона рециркуляции (CTRZ). Эта зона возвращает раскаленные продукты сгорания к основанию пламени, стабилизируя корень факела (рис. 1, кривая 20%). Режим с 20% впрыска обеспечивает оптимальное турбулентное микроперемешивание,

минимизируя выбросы недогоревшего СО при умеренной генерации термических оксидов азота (NO_x).

3. **Эффект термического демпфирования (30–40%):** При избыточном центральном впрыске массив холодного воздуха (300 K) вызывает локальное термическое разбавление реакционной зоны («эффект продувки»). Для режима 40% зафиксировано резкое падение концентрации NO_x до минимального уровня 0.0055 г/м^3 , так как температура в ядре падает ниже критического порога активации механизма Зельдовича. Однако это сопровождается риском деформации фронта пламени.

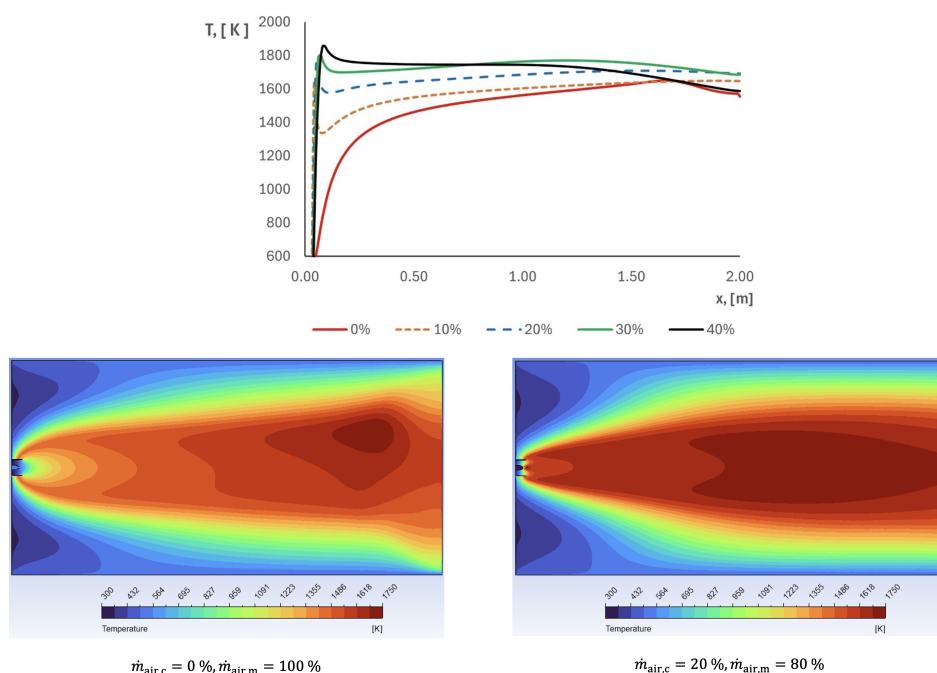


Рис. 1. Двухмерные контуры распределения температуры (K) в камере сгорания при различных режимах распределения центрального ($\dot{m}_{air,c}$) и основного ($\dot{m}_{air,m}$) воздуха и изменение локальной температуры (T) вдоль центральной оси камеры сгорания (x) при различных режимах подачи центрального воздуха (от 0% до 40%).

5. Заключение

Результаты численного моделирования доказывают эффективность метода центрального впрыска вторичного воздуха для повышения стабильности горения низкокалорийных биотоплив. Установлено, что с точки зрения баланса аэродинамической стабилизации, полноты сгорания и экологических показателей оптимальной является конфигурация с подачей 20% центрального воздуха. Полученные данные могут служить теоретической базой для проектирования и модернизации промышленных эко-горелок.

Литература

1. Чжан Л., Чжан Ш., Чжоу Х. и др. Эффективное сжигание низкокалорийных промышленных газов: возможности и вызовы // *Energies*. 2022. Т. 15, № 23. С.

9224.

2. Бялецкий Т. Математическая модель процесса сгорания для турбореактивного двигателя на основе свойств топлива // International Journal of Energy and Environmental Engineering. 2022. Т. 13. С. 1309-1316. DOI: 10.1007/s40095-022-00489-2.
3. Леонтьев А.И., Кузма-Кичта Ю.А., Попов И.А. Тепломассообмен и гидродинамика в закрученных потоках // Теплоэнергетика. 2017. № 2. С. 36-54.

MSC 49K20, 76F60, 80A20

Numerical simulation of biogas combustion in a chamber with central air injection

U.J. Mizher¹, M.J. Mezher², P.M. Abrashkin³, P.A. Velmisov³

Southern Technical University (Iraq)¹, Al-Shatrah University (Iraq)², Ul'yanovsk State Technical University³

Abstract: The paper presents a numerical study of the reacting turbulent flow. The results of the study are intended to increase the stability and environmental friendliness of low-calorie biogas combustion. Based on the solution of the system of Navier-Stokes equations (RANS), supplemented by the two-parameter model of turbulence Realizable $k - \epsilon$ and the concept of vortex scattering (EDC), the influence of the central jet of secondary air on the macrostructure and thermal properties of the flare is analyzed. It is shown that injection initiates the formation of a stable central toroidal recirculation zone (CTRZ), which returns the combustion products and reliably stabilizes the flame root. It has been established that the supply of 20% of the central air is the optimal integrated mode, ensuring effective micro-mixing, minimizing emissions of unburned carbon monoxide (CO) and the retention of thermal nitrogen oxides within acceptable safe limits. The data obtained form the theoretical basis for the design and modernization of industrial eco-burners.

Keywords: computational fluid dynamics (CFD), biogas burning, central air injection, vortex scattering concept (EDC), emission reduction.

УДК 519.63

Численное исследование процесса окислительной регенерации слоя цилиндрического катализатора*

Митрюхин И.В.¹, Язовцева О.С.¹, Усманова А.А.¹

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет¹

Аннотация: В работе представлена математическая модель нестационарного процесса окислительной регенерации в слое катализатора, предназначенная для моделирования выжига многокомпонентных коксовых отложений из слоя катализатора с цилиндрической формой зерен.

Ключевые слова: математическое моделирование, численные методы, окислительная регенерация.

Актуальность ресурсосбережения в наше время как никогда высока. В рамках этого стратегического направления лежит вопрос о восстановлении каталитической активности отработанного катализатора, одним из методов которого является окислительная регенерация [1]. Она заключается в выжиге отложений с зерен катализатора. Хорошо известна проблематика процессов горения: с одной стороны, для глубокого тщательного выжига необходимо длительное воздействие высоких температур, с другой – необходимо минимизировать температурное воздействие на катализатор во избежание его порчи. Помимо этой очевидной проблемы возникает множество других, например, температурные забросы, неконтролируемое распространение фронта горения по слою и т.д. Трудности в реализации натурных экспериментов обуславливают использование математического моделирования для исследования процесса окислительной регенерации [2].

Математическая модель окислительной регенерации катализатора как модель каталитического процесса включает в себя несколько частей: кинетическая модель, модель зерна, модель слоя. Они являются системами нелинейных дифференциальных уравнений и описывают основные процессы, протекающие в ходе регенерации: теплообмен, массообмен, теплоперенос, диффузию и конвективные потоки, обладающие различными характерными временами. Вычислительные алгоритмы для них достаточно трудоемки, требуют либо применения явных численных методов с целью распараллеливания алгоритмов, либо использования неявных абсолютно устойчивых разностных схем. Задачи исследования подобных моделей качественными методами нетривиальны, зачастую теоретические условия применения труднодостижимы на практике.

Доклад посвящен исследованию процесса окислительной регенерации зерна катализатора с детальной кинетикой средствами математического моделирования.

Литература

1. Масагутов Р.М., Морозов Б.Ф., Кутепов Б.И. Регенерация катализаторов в нефтепереработке и нефтехимии. Москва: Химия, 1987. 144 с.

*Исследование выполнено при поддержке РНФ, проект № 25-21-00242.

2. Губайдуллин И.М., Пескова Е.Е., Язовцева О.С., Загоруйко А.Н. Численное моделирование окислительной регенерации сферического зерна катализатора // Математическое моделирование. 2022.Т. 34, № 11. С. 48-66. DOI 10.20948/mm-2022-11-04.

MSC 76S05

Numerical investigation of the process of oxidative regeneration of a cylindrical catalyst layer

I.V. Mitryukhin¹, O.S. Yazovtseva¹, A.A. Usmanova¹

National Research Mordovia State University¹

Abstract: The paper presents a mathematical model of a nonstationary oxidative regeneration process in a catalyst layer designed to simulate the burning of multicomponent coke deposits from a catalyst layer with cylindrical grain shape.

Keywords: mathematical modeling, numerical methods, oxidative regeneration.

УДК 519.866

Квартальная прогнозная модель с инвестиционным акселератором Кларка

Мищенко В.П.¹

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова¹

Аннотация: Для моделирования макроэкономического равновесия рассмотрим модель малой открытой экономики на основе полуструктурной квартальной прогнозной модели (QPM), добавив в модель инвестиционный акселератор Кларка, что в итоге позволяет дополнительно оценивать инвестиционный процесс в России, с точки зрения его динамики во взаимосвязи с ключевыми макроэкономическими переменными по рынку товаров и услуг, рынку денег, валютному рынку, внешнему рынку товаров и услуг.

Ключевые слова: квартальная прогнозная модель, инвестиции, инвестиционный процесс, шок спроса, шок предложения.

1. Анализ инвестиционного процесса в России на основе полуструктурной квартальной прогнозной модели (QPM) с инвестиционным акселератором в условиях шоков спроса и шоков предложения

Исследуем особенности инвестиционного процесса в России в условиях новых вызовов (шоков предложения, шоков спроса) на основе квартальных данных за период с 01.01.2022 по 31.12.2025 г. Структура модели представлена 21 уравнением. Анализируется 21 переменная: Y_t – ВВП; A_t – Абсорбция; IR_t – Номинальная процентная ставка; CPI_t – Инфляция; CPI_{Id_t} – Инфляция отечественных товаров; CPI_{It_t} – Инфляция торгуемых товаров; CPI_t – Совокупная инфляция; CPI_{f_t} – Инфляция импортных товаров; EX_t – Экспорт; IMP_t – Импорт; $CPI_t F$ – Иностранная инфляция; IF_t – Иностранная номинальная ставка процента; RER_t – Реальные обменный курс; F_t – Вывод капитала резидентами; R_t – Реальная процентная ставка; Q_t – Спрос нерезидентов на ОФЗ; Inv_t – Валовое накопление (инвестиции); $sht IS$ – Шок спроса; $sht PC$ – Шок издержек; $sht f$ – Шок оттока капитала; $sht iF$ – Шок иностранной ставки процента.

Будем применять стандартную модель малой открытой экономики с таргетированием инфляции и плавающим валютным курсом [1–3].

Моделируемые рынки: рынок товаров и услуг, рынок денег, валютный рынок, внешний рынок товаров и услуг.

Спецификация модели выбрана следующая.

Товарно-денежный рынок

Кривая совокупного спроса AD:

$$Y_t = A_t + EX_t + IMP_t \quad (1)$$

Кривая совокупного предложения IS:

$$A_t = A_{t+1} - \delta^{ir} * (IR_t - CPI_t - \theta) - \delta^{rer} * (RER - RER^{SS}) + sh_t^{IS} \quad (2)$$

Денежный рынок МР:

$$IR_t = w^{MP} * (IR_{t-1}) + (1 - \omega^{MP}) * (1 + IR^{SS} + \psi * (CPI_{t+1} - CPI^{SS})) \quad (3)$$

Уравнение Фишера:

$$R_t = \frac{IR_t}{CPI_{t+1}} \quad (4)$$

Совокупное предложение AS=PC

Инфляция отечественных товаров:

$$CPI_{dt} = (1 - \beta^{cpid}) * CPI^{SS} + \beta^{cpid} * CPI_{dt+1} + \beta^Y * (Y_t - Y^{SS}) \quad (5)$$

Инфляция торгуемого товара:

$$CPI_{tdt} = 0,5 * CPI_{dt-1} + 0,5 * CPI^{SS} \quad (6)$$

PC^t (Кривая Филлипса торгуемых товаров):

$$CPI_{It} = CPI^{SS} + 0,5 * (RER_t - RER_{t-1}) + 0,5 * (CPI_{tdt} - CPI^{SS}) \quad (7)$$

PC^i (import) (Кривая Филлипса для импортных товаров):

$$CPI_{ft} = CPI_{f}^{SS} + \beta^{rer} * (RER_t - RER_{t-1}) \quad (8)$$

Совокупная инфляция:

$$CPI_t = 0,4 * CPI_{dt} + 0,3 * CPI_{ft} + 0,3 * CPI_{It} \quad (9)$$

Экспорт (AR (1) процесс):

$$EX_t = p^{Ex} * EX_{t-1} + (1 - p^{Ex}) * EX^{SS} \quad (10)$$

Спрос на импорт:

$$IMP_t = \alpha^{IMP} * Y_t - \beta^{IMP} * RER_t \quad (11)$$

Спрос нерезидентов на ОФЗ:

$$Q_t = \frac{\beta}{H} * \left(IR_t * RER_t - IF_t * RER_{t+1} * \frac{CPI_{t+1}}{CPI_{t+1}^F} \right) \quad (12)$$

Вывоз капитала резидентами ((AR (1) процесс с ненулевым средним):

$$F_t = p^f * F^{SS} + (1 + p^f) * F_{t-1} + sh_t^f \quad (13)$$

Реальный валютный курс:

$$RER_t = (IMP_t + F_t) / (EX_t + Q_t - IR_t * Q_{t-1}) \quad (14)$$

Иностранная инфляция:

$$CPI_t^F = 0,2 * CPI_{t-1}^F + 0,8 * cpi^{FSS} \quad (15)$$

Иностранная ставка процента (AR (1) процесс):

$$IF_t = 0,2 * IF_{t-1} + 0,8 * IF^{SS} + sh_t^{IF} \quad (16)$$

Инвестиционный акселератор Кларка:

$$inv_t = inv_{ss} + rho_{inv} * (inv(-1) - inv_{ss}) + \kappa_{inv} * (y - y(-1)) \quad (17)$$

Шок IS:

$$sh_t^{IS} = 0,5 * sh_{t-1}^{IS} + 0,5 * res^{IS} \quad (18)$$

Шок f:

$$sh_t^F = 0,5 * sh_{t-1}^F + 0,5 * res^F \quad (19)$$

Шок PC:

$$sh_t^{PC} = 0,5 * sh_{t-1}^{PC} + 0,5 * res^{PC} \quad (20)$$

Шок iF:

$$sh_t^{IF} = 0,5 * ssh_{t-1}^{IF} + 0,5 * res^{IF} \quad (21)$$

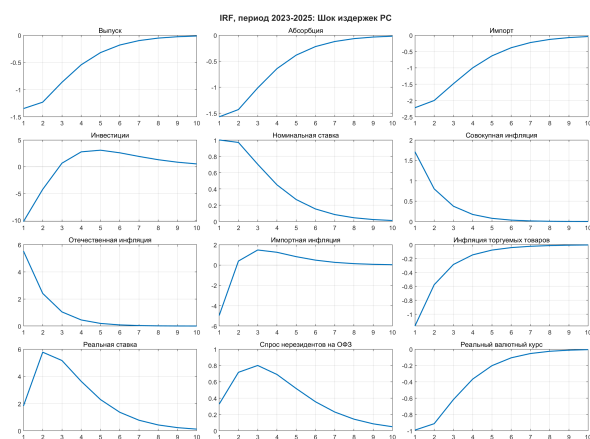


Рис. 1. Функции импульсных откликов (IRF) на шок издержек (=шока предложения) PC за период 2023-2025 гг

Анализ IRF показывает, что в случае, если ЦБ значительно повышает ключевую ставку, шок издержек приводит к тому, что инвестиции снижаются, так как запасы капитала идут на покрытие возникших расходов, в т.ч. процентных, отодвигая на второй план инвестиционные цели.

Заключение

В ходе анализа установлено, что спецификация модели выбрана корректно, функции импульсных откликов по различным переменным в ответ на шоки показывают результаты, соотносимые с положениями экономической теории, устанавливается равновесие после шоков.

Литература

1. Глазова А., Неваленный М., Синякова А. Учебная модель малой открытой экономики для анализа денежно-кредитной политики. Серия докладов об экономических исследованиях. № 154. Москва: Банк России, 2025.
2. Galí J. Uncovered interest parity, forward guidance and the exchange rate // Journal of Money, Credit and Banking. 2020. Vol. 52(S2). P. 465-496.

3. Maggiori M. International macroeconomics with imperfect financial markets // Handbook of International Economics. Elsevier. 2022. Vol. 6. P. 199-236.

MSC 03C30

Quarterly Forecasting Model with Clark's Investment Accelerator

V.P. Mishchenko¹

Lomonosov Moscow State University¹

Abstract: To model macroeconomic equilibrium, we will consider a model of a small open economy based on the semi-structural quarterly forecast model (QPM), adding Clarke's investment accelerator to the model. This allows us to evaluate the investment process in Russia from the point of view of its dynamics with respect to key macroeconomic variables such as the market for goods and services, money market, foreign exchange market and external market for goods.

Keywords: quarterly forecast model, investments, investment process, demand shock, supply shock.

УДК 517.958

Математическое моделирование восстановления остаточной намагниченности бурильных труб по данным магнитного градиентометра

Морозкин Н.Д.¹, Колонских Д.М.¹

Уфимский университет науки и технологий¹

Аннотация: Рассматривается обратная задача магнитостатики – восстановление профиля остаточной намагниченности в стенках немагнитной бурильной трубы по измерениям разности модулей магнитной индукции. Прямая задача описывается уравнением Лапласа для скалярного магнитного потенциала и сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода относительно искомой намагниченности. Предложена математическая модель и способ численной оценки локализации пиковой намагниченности бурильных труб. Приводятся результаты численного моделирования, подтверждающие эффективность метода. Работа выполнена в рамках разработки комплекса определения остаточной намагниченности при производстве и эксплуатации буровых немагнитных труб.

Ключевые слова: магнитостатика, интегральное уравнение Фредгольма, остаточная намагниченность, неразрушающий контроль бурильных труб, дефектоскопия.

1. Математическая модель

Пусть задан полый цилиндр с внешним радиусом R_2 , внутренним R_1 и длиной L . Материал трубы немагнитный, относительная магнитная проницаемость близка к единице. Остаточная намагниченность полагается преимущественно осевой. Скалярный магнитный потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа вне источников. Для аксиальной компоненты магнитного поля на оси цилиндра получено интегральное соотношение типа свёртки [1]:

$$B(z) = \int_0^L M(z') \left[\frac{z - z'}{\sqrt{(z - z')^2 + R_2^2}} - \frac{z - z'}{\sqrt{(z - z')^2 + R_1^2}} \right] dz' \quad (1)$$

где $B(z)$ – аксиальная компонента магнитной индукции в точке на оси трубы с координатой измерения z , $M(z')$ – намагниченность в поперечном сечении стенки на продольной координате магнитного источника z' .

Уравнение (1) является уравнением Фредгольма 1-го рода относительно неизвестной функции $M(z)$. Левая часть уравнения представляет собой набор экспериментальных данных, полученных в результате измерения градиента магнитного поля вдоль исследуемой трубы.

2. Обратная задача и регуляризация

По измерениям магнитного градиента $B(z)$ требуется найти исходное распределение остаточной намагниченности $M(z')$ в бурильной трубе из уравнения (1). Об-

ратная задача является некорректной – оператор интегрирования с гладким ядром компактен и малые ошибки в измерениях $B(z)$ приводят к неограниченным колебаниям решения. Для построения устойчивого приближения применяется метод регуляризации Тихонова [2].

Для перехода от непрерывной постановки задачи (1) к конечномерной введем равномерную сетку по оси $z \in [0, L]$:

$$z_i = \frac{i-1}{h}, \quad i = \overline{1, N}, \quad h = \frac{L}{N-1},$$

где N – число узлов дискретизации.

Аппроксимируем искомую функцию $M(z')$ кусочно-постоянной на каждом элементарном отрезке $[z'_j - h/2, z'_j + h/2]$ значением $M_j = M(z'_j)$. Тогда интеграл в уравнении (1) заменяется квадратурной формулой:

$$B(z_i) = \sum_{j=1}^N M_j \int_{z'_j - h/2}^{z'_j + h/2} \left[\frac{z_i - z'_j}{\sqrt{(z_i - z'_j)^2 + R_2^2}} - \frac{z_i - z'_j}{\sqrt{(z_i - z'_j)^2 + R_1^2}} \right] dz', \quad i = \overline{1, N}.$$

Обозначим элементы матрицы $\mathbf{A}$ размера $N \times N$:

$$A_{ij} = \int_{z'_j - h/2}^{z'_j + h/2} \left[\frac{z - z'}{\sqrt{(z - z')^2 + R_2^2}} - \frac{z - z'}{\sqrt{(z - z')^2 + R_1^2}} \right] dz', \quad i, j = \overline{1, N}. \quad (2)$$

В результате непрерывное уравнение (1) сводится к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} M_j = B_i, \quad i = \overline{1, N} \quad (3)$$

или в матрично-векторном виде:

$$\mathbf{A}\mathbf{M} = \mathbf{B},$$

где $\mathbf{M} = (M_1, M_2, \dots, M_N)^T$ – искомый вектор дискретных значений намагниченности, $\mathbf{B} = (B_1, B_2, \dots, B_N)^T$ – вектор значений поля на оси, полученных из измерений градиентометра.

Число обусловленности матрицы $\mathbf{A}$ велико. Это означает, что решение $\mathbf{M} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ будет неустойчивым к малым погрешностям в правой части $\mathbf{B}$ – высокочастотные шумы измерений приводят к нефизическим осцилляциям искомого профиля.

Для построения устойчивого решения применяется метод регуляризации Тихонова. Вместо исходной некорректной задачи (3) минимизируется сглаживающий функционал:

$$\Phi_\alpha(\mathbf{M}) = \|\mathbf{A}\mathbf{M} - \mathbf{B}\|_2^2 + \alpha \|\mathbf{L}\mathbf{M}\|_2^2, \quad (4)$$

где $\mathbf{L}$ – матрица конечно-разностной аппроксимации первой производной, $\alpha > 0$ – параметр регуляризации, выбираемый по принципу невязки или L-кривой.

Получаем систему нормальных уравнений регуляризованной задачи:

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{L}^T \mathbf{L}) \mathbf{M} = \mathbf{A}^T \mathbf{B}. \quad (5)$$

Это система с симметричной положительно определённой матрицей, которая хорошо обусловлена при $\alpha > 0$. Её решение:

$$\mathbf{M}_\alpha = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{L}^T \mathbf{L})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{B} \quad (6)$$

даёт регуляризованную оценку искомого вектора намагниченности.

3. Обработка экспериментальных данных

Метод применён при исследовании немагнитной бурильной трубы. Геометрические параметры: длина $L = 5.1$ м, внешний радиус $R_2 = 0.121$ м, внутренний радиус $R_1 = 0.062$ м. Измеренный продольный градиент модуля магнитного поля обнаруживает две выраженные локальные особенности: интенсивный всплеск в интервале 2.8–3.0 м и менее сильный на участке 4.4–4.6 м (рис. 1а). Фоновый уровень градиента вне этих зон не превышает 40 нТл/м, что соответствует допустимому разностному критерию производителя.



Рис. 1. Магнитный профиль бурильной трубы

а) показания градиентометра, б) рассчитанная остаточная намагниченность.

Результаты восстановления намагниченности $M(z)$ представлены на рис. 16. Обнаружение дефектных интервалов производится по превышению модулем порогового значения $|M(z)|$, определяемого нормоконтролером предприятия эксплуатации [3]. Большая часть трубы имеет намагниченность в пределах ± 2 А/м, что удовлетворяет стандартам производства немагнитных труб. Вместе с тем в зоне 2.8–3.0 м зафиксирован пик $M \approx 8$ А/м, а на участке 4.4–4.6 м – значение $M \approx -2.9$ А/м. Первая аномалия пространственно совпадает с зоной ремонтной вставки, где в процессе восстановительных работ применялась электродуговая сварка, вызвавшая локальное намагничивание. Второй пик у торца, вероятно, обусловлен ударным воздействием при монтаже или демонтаже трубы. Оба участка подлежат размагничиванию перед допуском к эксплуатации.

Таким образом, предложенный метод позволяет уверенно локализовать дефектные участки, вызванные механическими и термическими воздействиями, и количественно оценить остаточную намагниченность.

4. Заключение

Разработана математическая модель восстановления аксиальной намагниченности полого цилиндра по скалярным магнитным измерениям. Метод не требует учёта абсолютного значения земного поля и устойчив к экспериментальным погрешностям. Результаты внедрены и используются в системах неразрушающего контроля изделий нефтегазового машиностроения.

Литература

1. Лунева Л.А., Андреев А.Г. Электростатика. Магнитостатика. Москва: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2021. 40 с.
2. Бахвалов Ю.А., Гречихин В.В., Грекова А.Н. Определение намагниченностей постоянных магнитов в составе электрической машины на основе решения обратной задачи магнитостатики // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2014. Т. 10, № 1. С. 46-48.
3. Загидулин Т.Р., Загидулин Р.В., Мардамшин В.Р., Бакиев Т.А. Магнитный контроль напряженного состояния при сложном сопротивлении металла и снижении величины остаточных механических напряжений буровых труб // Научные труды НИПИ Нефтегаз ГНКАР. 2018. № 2. С. 49-57.

MSC 65R32

Mathematical Modeling of Residual Magnetization Recovery in Drill Pipes Using Magnetic Gradiometer Data

N.D. Morozkin¹, D.M. Kolonskikh¹

Ufa University of Science and Technology¹

Abstract: This paper addresses an inverse magnetostatics problem: determining the distribution of residual magnetization in the walls of a non-magnetic drill pipe from measurements of the difference in magnetic induction magnitudes. The forward problem is described by the Laplace equation for the scalar magnetic potential and is reduced to a Fredholm integral equation of the first kind with respect to the unknown magnetization. A mathematical model and a numerical method for estimating the localization of peak magnetization in drill pipes are proposed. Simulation results are presented that confirm the effectiveness of the proposed approach. The work is carried out as part of the development of a system for assessing residual magnetization during the production and operation of non-magnetic drill pipes.

Keywords: magnetostatics, Fredholm integral equation, residual magnetization, drill pipes.

УДК 517.977:539.3

Наиточнейший нагрев неограниченной пластины с учетом ограничений на термонапряжения

Морозкин Н.Д.¹, Морозкин Н.Н.¹, Садрисламов М.Ф.¹
 ФГБОУ ВО Уфимский университет науки и технологий¹

Аннотация: Исследуется задача определения изменения во времени температуры греющей среды, позволяющей за фиксированное время получить конечное распределение температуры в теле, максимально близкое к заданной. При этом требуется, чтобы растягивающие и сжимающие термонапряжения, возникающие вследствие неравномерного нагрева, не привели к разрушению нагреваемого изделия. Рассматриваются материалы, у которых пределы прочности на сжатие и растяжение существенно зависят от температуры, а теплофизические коэффициенты и другие механические характеристики можно считать постоянными. Предложен алгоритм поиска оптимального управления в случае нагрева одномерной неограниченной пластины. Результаты расчетов приведены при отсутствии фазовых ограничений.

Ключевые слова: оптимальное управление, теплопроводность, термонапряжения, метод Фурье, метод условного градиента.

1. Постановка задачи

Процесс осесимметричного нагрева неограниченной пластины внешними тепловыми источниками описывается уравнениями:

$$c\rho \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad x \in (0, \bar{x}), \quad t \in (0, \bar{t}), \quad 0 < \bar{t} < \infty, \quad (1)$$

$$T(x, 0) = p = \text{const}, \quad x \in [0, \bar{x}], \quad (2)$$

$$\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=\bar{x}} = \alpha(v(t) - T(\bar{x}, t)), \quad t \in [0, \bar{t}], \quad (3)$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad t \in [0, \bar{t}], \quad (4)$$

где t – время, x – пространственная переменная, $T(x, t)$ – температура, c – удельная теплоемкость, ρ – плотность материала, α – коэффициент теплообмена, λ – коэффициент теплопроводности, $v(t)$ – температура греющей среды (управление):

$$v(t) \in V, \quad V = \{v(t) : 0 \leq v^- \leq v(t) \leq v^+, v(t) \in L_2[0, \bar{t}]\}. \quad (5)$$

В предположении, что модуль упругости E и коэффициент линейного расширения α_T постоянны, а края пластины жёстко защемлены, в квазистатической постановке задача термоупругости решается аналитически [2]:

$$\frac{\alpha_T E}{1 - \nu} \left(-T(0, t) + \frac{1}{\bar{x}} \int_0^{\bar{x}} T(x, t) dx \right) \leq \sigma_p(T(0, t)), \quad (6)$$

$$\frac{\alpha_T E}{1 - \nu} \left(T(\bar{x}, t) + \frac{1}{\bar{x}} \int_0^{\bar{x}} T(x, t) dx \right) \leq \sigma_c(T(\bar{x}, t)). \quad (7)$$

Здесь ν — коэффициент Пуассона, σ_c и σ_p — соответственно пределы прочности на сжатие и растяжение.

Задача 1. Требуется определить управление $v^0(t)$, при котором температурное поле в конечный момент времени $\bar{t}$ максимально приближается к заданному распределению температуры $T^*(r)$:

$$J(v) = \int_0^{\bar{x}} (T(r, \bar{t}) - T^*(r))^2 dr \rightarrow \inf, \quad (8)$$

и с заданной точностью будут выполнены неравенства (6)-(7).

Отметим, что в работе [1] рассматривалась подобная задача достижения заданного распределения температуры в теле, но за минимальное время.

2. Алгоритм решения

Введём безразмерные переменные:

$$\begin{aligned} l = \frac{x}{\bar{x}}, \quad \theta(l, \tau) = \alpha_T(T(x, t) - T_0), \quad \tau = \frac{\lambda t}{c\rho\bar{x}^2}, \quad Bi = \frac{\alpha\bar{x}}{\lambda}, \\ u(\tau) = \alpha_T(v(t) - T_0), \quad u^- = \alpha_T(v^- - T_0), \quad u^+ = \alpha_T(v^+ - T_0), \\ \bar{\theta} = \alpha_T(T^* - T_0), \quad \sigma_c^* = \frac{(1-\nu)\sigma_c}{E}, \quad \sigma_p^* = \frac{(1-\nu)\sigma_p}{E}. \end{aligned}$$

В безразмерном виде задача принимает вид:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial l^2}, \quad \theta(l, 0) = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial l} \Big|_{l=1} = Bi(u(\tau) - \theta(1, \tau)), \quad \frac{\partial \theta}{\partial l} \Big|_{l=0} = 0. \quad (9)$$

Функционал (8) запишется так:

$$I(u) = \int_0^1 [\theta(l, \bar{\tau}) - \bar{\theta}(l)]^2 dl. \quad (10)$$

Применяя косинус-преобразование Фурье, решение системы уравнений (9) запишем в виде:

$$\theta(l, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n x_n(u, \tau) \cos(\mu_n l), \quad D_n = \frac{2Bi^2}{(\mu_n^2 + Bi^2 + Bi) \sin \mu_n}, \quad (11)$$

где μ_n — корни уравнения

$$Bi \cos(\mu_n) - \mu_n \sin(\mu_n) = 0, \quad (12)$$

а $x_n(\tau)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ находятся из решения системы:

$$\frac{dx_n}{d\tau} = -\mu_n^2 x_n(\tau) + \mu_n u(\tau), \quad x_n(0) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

Предположим, что зависимость пределов прочности от температуры можно аппроксимировать линейными функциями: $\sigma_p^*(\theta) = \alpha_1 + \beta_1 \theta$, $\sigma_c^*(\theta) = \alpha_2 + \beta_2 \theta$. Тогда неравенства (6)-(7) в безразмерных единицах можно записать так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n x_n(\tau) \left(\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} - 1 - \beta_1 \right) - \alpha_1 \leq 0, \quad (14)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n x_n(\tau) \left((1 - \beta_2) \cos \mu_n - \frac{\sin \mu_n}{\mu_n} \right) - \alpha_2 \leq 0. \quad (15)$$

С помощью метода множителей Лагранжа свведём задачу на условный экстремум к задаче безусловной оптимизации. Ограничиваясь первыми N уравнениями в соотношении (13) и первыми N членами ряда в соотношениях (11), (14)-(15), задачу 1 заменим задачей 2.

Задача 2. Найти управление $u^0(\tau)$, минимизирующее функционал

$$J_N(u) = \frac{\gamma_1}{\alpha_T} \sum_{n=1}^N \frac{D_n}{\sin \mu_n} [x_n(u, \bar{\tau}) \sin \mu_n - g_n]^2 + \int_0^{\bar{\tau}} \sum_{i=2}^3 \gamma_i C_i^2(u, \tau) d\tau \quad (16)$$

на решениях системы (13), когда $n = \overline{1, N}$, где

$$C_1(u, \tau) = \max \left\{ \sum_{n=1}^N D_n x_n(u, \tau) \left(\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} - 1 - \beta_1 \right) - \alpha_1, 0 \right\}, \quad (17)$$

$$C_2(u, \tau) = \max \left\{ \sum_{n=1}^N D_n x_n(u, \tau) \left[(1 - \beta_2) \cos \mu_n - \frac{\sin \mu_n}{\mu_n} \right] - \alpha_2, 0 \right\}, \quad (18)$$

$$g_n = \int_0^1 \bar{\theta}(l) \cos(\mu_n l) dl, \quad \gamma_i, \quad i = 1, 2, 3 - \text{множители Лагранжа}. \quad (19)$$

Для решения задачи 2 используется метод условного градиента [3]. Опишем кратко итерационную процедуру метода условного градиента. Пусть известно u_k – k -ое приближение оптимального управления. Управление u_{k+1} вычисляется по формуле

$$u_{k+1} = u_k + \alpha_k (\bar{u}_k - u_k), \quad (20)$$

где $\bar{u}_k$ – решение вспомогательной задачи

$$\bar{u}_k : \min_{u \in U} (J'(u_k), u - u_k), \quad (21)$$

$\alpha_k \in [0, 1]$ и находится с использованием метода золотого сечения как решение задачи одномерной минимизации

$$\min_{\alpha \in [0, 1]} (J(u_k + \alpha(\bar{u}_k - u_k))). \quad (22)$$

В рассматриваемом случае градиент функционала (16) записывается в виде [4]:

$$J'_u(\tau) = - \sum_{n=1}^N \mu_n \Psi_n(\tau), \quad (23)$$

где μ_n , $n = \overline{1, N}$ – корни уравнения (12), $\Psi_n(\tau)$, $\tau \in [0, \bar{\tau}]$, $n = \overline{1, N}$ – решение сопряжённой системы:

$$\frac{d\Psi_n}{d\tau} = \mu_n^2 \Psi_n(\tau) + 2\gamma_2 D_n C_1(u, \tau) \left(\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} - 1 - \beta_1 \right) + 2\gamma_3 D_n C_2(u, \tau) \left((1 - \beta_2) \cos \mu_n - \frac{\sin \mu_n}{\mu_n} \right), \quad (24)$$

$$\Psi_n(\bar{\tau}) = \frac{2\gamma_1 D_n}{\alpha_T} [x_n(u, \bar{\tau}) \sin \mu_n - g_n]. \quad (25)$$

3. Численный эксперимент

Приведем результаты расчетов для сплава ЖС6У в случае отсутствия ограничений на термонапряжения.

Исходные данные: $\bar{x} = 0.18$ м, $\lambda = 18$ Вт/(м·°C), $\alpha = 200$ Вт/(м²·°C), $\alpha_T = 0.16 \cdot 10^{-4}$ 1/°C, $T_0 = 20^\circ\text{C}$, $T^* = 820^\circ\text{C}$.

Расчеты были проведены для $N = 4, 5, 6, 7$. При $N = 6$ и $N = 7$ результаты расчетов мало отличались от случая $N = 5$, поэтому приведены для $N = 5$ и представлены на рис. 1.

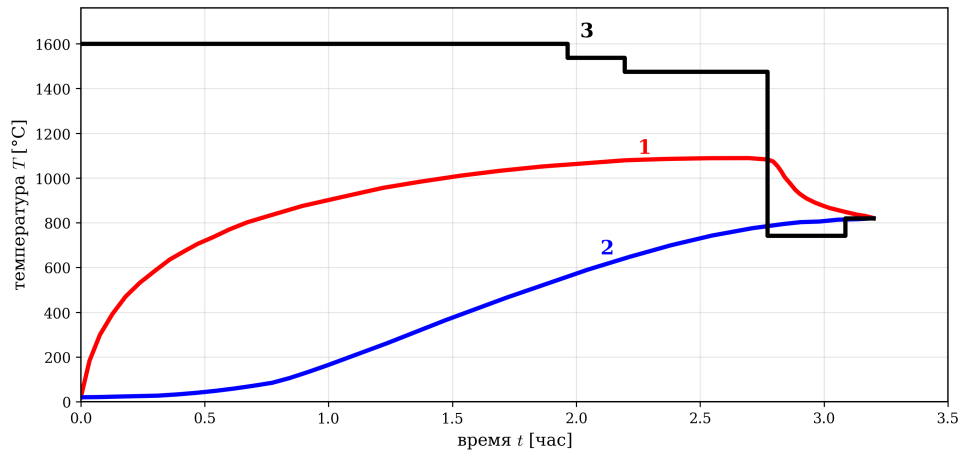


Рис. 1. График зависимости температуры поверхности (1), температуры центра (2) и оптимального управления (3) от времени

Литература

1. Morozkin N.D., Morozkin Y.N., Bayramgulov R.A. On optimal high-speed heating of an unlimited plate with restrictions on thermal stresses. *Tran. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Mechanics*. 2025. Vol. 45, No. 8. P. 22-28. URL: <https://doi.org/10.30546/2706-7734.45.8.2025.026>.
2. Филоненко-Бородич М.И. Механические теории прочности. Москва: МГУ, 1961. 92 с.
3. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. Москва: Факториал Пресс, 2002. 824 с.
4. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. Москва: Наука, 1978. 488 с.

MSC 49M05

Precise heating of an unlimited plate with constraints on thermal stresses

N.D. Morozkin¹, N.N. Morozkin¹, M.F. Sadrislamov¹

Ufa University of Science and Technology¹

Abstract: The problem of determining the time-varying temperature of the heating medium is investigated, which allows obtaining, over a fixed time, a final temperature distribution in the body as close as possible to the desired one. It is required that the tensile and compressive thermal stresses arising due to non-uniform heating do not lead to the failure of the heated product. Materials are considered in which the ultimate strengths under compression and tension depend significantly on temperature, while the thermophysical coefficients and other mechanical characteristics can be assumed constant. An algorithm for finding the optimal control is proposed for the case of heating a one-dimensional infinite plate. The results of calculations are presented in the absence of phase constraints.

Keywords: optimal control, thermal conductivity, thermal stresses, Fourier method, conditional gradient method.

УДК 519.63

Об одном вычислительном алгоритме для моделирования дозвуковых реагирующих течений в трубах круглого сечения*

Мустайкин М.С.¹, Пескова Е.Е.¹

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет¹

Аннотация: Представлены математическая модель и вычислительный алгоритм для моделирования дозвуковых реагирующих течений в трубах круглого сечения на основе многокомпонентных уравнений Навье–Стокса с расщеплением давления. Верификация проведена на задачах о вращающемся диске и осесимметричном пиролизе метана. В вычислительном эксперименте смоделирован вдув смеси через боковую стенку; локальные градиенты температуры у отверстий не нарушают устойчивости течения, что подтверждает пригодность алгоритма для реакторов с различными схемами ввода реагентов.

Ключевые слова: математическое моделирование, уравнения Навье–Стокса, дозвуковые течения, многокомпонентная среда, расщепление по физическим процессам, численные методы.

Разработка алгоритмов для моделирования многокомпонентных газовых сред представляет собой важную научно-практическую задачу [1, 2]. В настоящее время уже разработаны подобные алгоритмы для осесимметричных течений. Однако их недостатком является невозможность задания различных углов ввода смеси через боковые стенки трубы, а также учёт возможных вихревых течений в вязкой среде. В то же время современные мощности ЭВМ позволяют перейти к трёхмерным задачам, что, в свою очередь, требует разработки новых верифицированных алгоритмов.

Целью настоящей работы является обобщение известной осесимметричной математической модели для моделирования дозвуковых реагирующих течений [3] на трёхмерный случай в цилиндрической системе координат, разработка вычислительного алгоритма, реализующего данную модель, и его верификация на тестовых задачах.

В основе алгоритма лежит принцип расщепления по физическим процессам:

1. Система обыкновенных дифференциальных уравнений химической кинетики решается с помощью модуля RADAU5 [4], который обладает L-устойчивостью, что обуславливает его применение для решения жёстких задач.

2. Конвективные и диффузионные потоки аппроксимируются схемой Русанова и центральными разностями соответственно.

3. Уравнение Пуассона на динамическую составляющую давления решается с помощью метода Якоби.

Верификация алгоритма проводилась на двух задачах. Задача об увлечении жидкости вращающимся диском [5] позволила оценить корректность реализации схем для вязких членов и центробежных сил в цилиндрической системе координат. Задача об осесимметричном пиролизе метана использовалась для верификации химической части алгоритма. Сравнение полученных результатов с эталонными данными показало хорошее согласование. Это подтверждает корректность реализованных численных

*Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 26-11-00095).

схем.

После завершения верификации был проведён вычислительный эксперимент по моделированию трёхмерного течения в трубе круглого сечения с вдувом смеси через боковую стенку. Расчётная область представляла собой цилиндр длиной 220 мм и диаметром 20 мм. Температура вдуваемых газов составляла 973 К, температура стенок трубы поддерживалась постоянной и равной 1273 К.

На рис. 1 представлена схема расположения отверстий в продольном сечении. Через отверстия 1 и 3 поступает метан, через отверстия 2 и 4 - смесь метана и этана, а отверстие 5 представляет собой выходное.

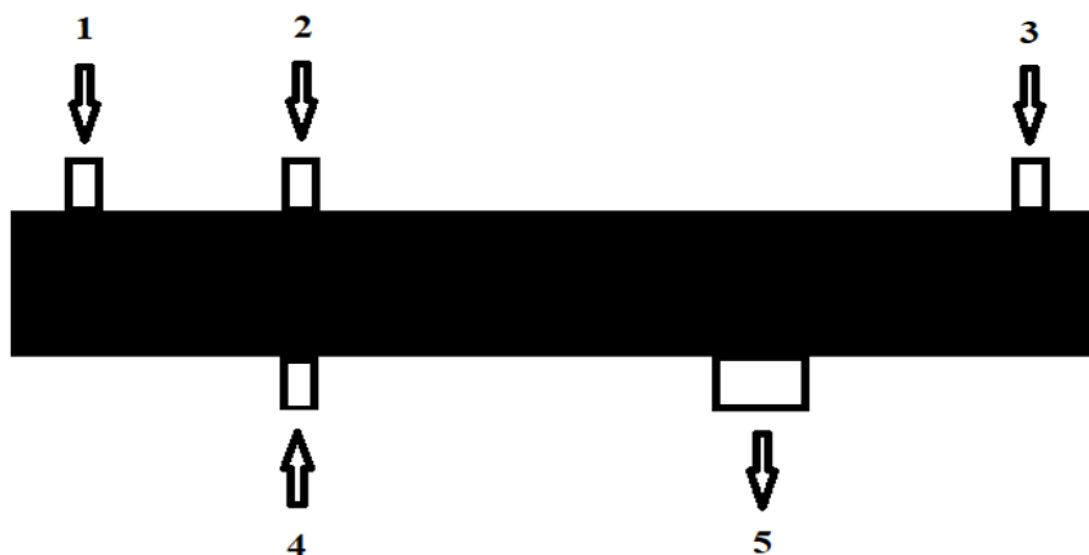


Рис. 1. Схема расположения отверстий

В результате моделирования получены распределения температуры, скорости, плотности и массовых долей компонентов смеси. На рис. 2 представлено распределение температуры в трёхмерной трубе, а на рис. 3 то же распределение, но в продольном сечении. Видно, что вблизи отверстий вдува формируются локальные зоны с пониженной температурой. Это обусловлено тем, что втекающий газ не успевает прогреться до температуры стенок в непосредственной близости от мест ввода. По мере удаления от отверстий поток нагревается от стенок, и температурные различия становятся менее заметными.

Литература

1. Yakush S., Semenov O., Alexeev M. Premixed Propane-Air Flame Propagation in a Narrow Channel with Obstacles // *Energies*. 2023. Т. 16, № 3. Ст. 1516. DOI: 10.3390/en16031516.
2. Пескова Е.Е., Снытников В.Н. Численное исследование конверсии метановых смесей под воздействием лазерного излучения // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2023. Т. 25, № 3. С. 159-173.
3. Пескова Е.Е., Язовцева О.С., Мустайкин М.С. Численный алгоритм для исследования дозвукового потока с химическими реакциями в присутствии

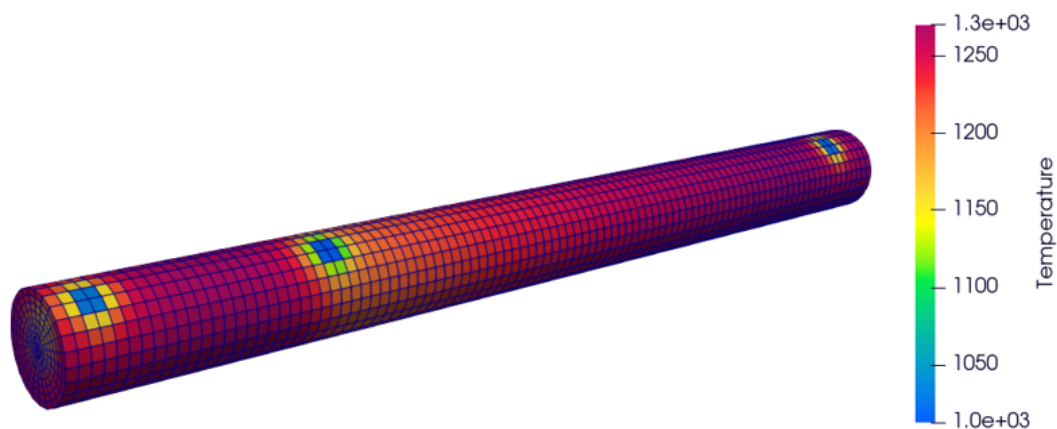


Рис. 2. Распределение температуры в 3D

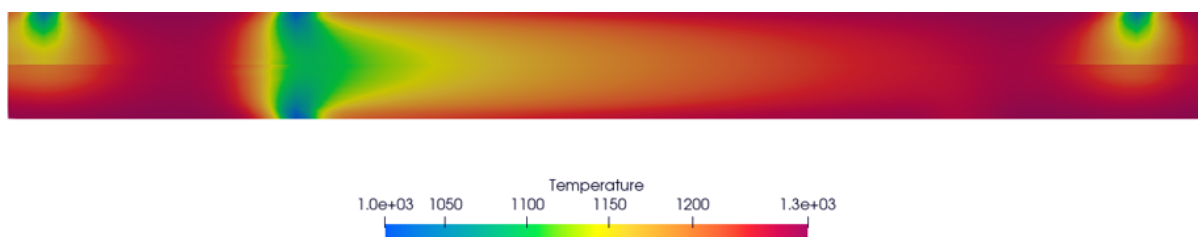


Рис. 3. Распределение температуры в продольном сечении

лазерного излучения // Журнал Средневолжского математического общества.
2025. Т. 27, № 2. С. 243-254. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202502.243-254.

4. Hairer E., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems. Berlin: Springer, 1996.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6: Гидродинамика. Москва: Наука, 1986. 731 с.

MSC 35Q35

On a Computational Algorithm for Modeling Subsonic Reacting Flows in Circular Pipes

M.S. Mustaikin¹, E.E. Peskova¹

National Research Mordovia State University¹

Abstract: A mathematical model and a computational algorithm for simulating subsonic reacting flows in circular pipes are presented. The model is based on multicomponent Navier–Stokes equations with pressure splitting. Verification was performed on the problems of a rotating disk and axisymmetric methane pyrolysis. In the computational experiment, injection of a gas mixture through the side wall was simulated; local temperature gradients near the injection holes do not disturb the stability of the main flow, which confirms the applicability of the algorithm for reactors with various reagent inlet configurations.

Keywords: mathematical modeling, Navier–Stokes equations, subsonic flows, multi-component media, splitting by physical processes, numerical methods.

УДК 517.926:517.929

Триангуляция линейных систем

Никонов В.И.¹

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет¹

Аннотация: Предлагается исследование в направлении получения нового метода триангуляризации линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и его приложение к разностным системам и системам уравнений с отклоняющимся аргументом. По результатам проводимых исследований также предполагается разработка конструктивного алгоритма решения проблемы, основанного на теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений с применением методов линейной алгебры, теории групп, алгебраической и проективной геометрии включая элементы математического анализа.

Ключевые слова: линейная система, триангуляризация, фундаментальная система решений.

Как гласит общая теория линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, не всякая система интегрируется в квадратурах. Если система не интегрируется в классе элементарных функций, то используют специальные функции такие как функция ошибок Гаусса, функции Матьё и Хилла, функции Бесселя. Этот список можно продолжать достаточно долго. Известная теорема Перрона о триангуляризации линейных систем дает некоторые теоретические предпосылки к решению этой проблемы. Уже прошло более 200 лет, а алгоритма интегрирования до сих пор не найдено, за исключением некоторых частных случаев. По-видимому, весь научный мир еще не совсем разобрался в тонкостях взаимосвязи линейности и нелинейности. Это наводит на мысль использовать основной принцип диалектики – единство и борьба противоположностей. Как известно, свойство коммутативности играет важнейшую роль в проблеме интегрировании линейных систем с переменными коэффициентами. Одна часть ученых пытается разглядеть линейность в нелинейности. И если это удастся, то с большой вероятностью изучаемая задача может быть решена. Однако, чтобы окончательно разобраться в проблеме вероятно нужно и видеть нелинейность в линейности. Вероятно еще не достаточно геометрических методов, чтобы это сделать. Данное исследование служит попыткой хотя бы немного приблизится к решению озвученной проблемы.

Литература

1. Козлов В.В. Замечания об интегрируемых системах // Нелинейная динамика. 2013. Т. 9, № 3. С. 459-478.
2. Никонов В.И. Об алгебро-геометрическом подходе к исследованию устойчивости относительно части переменных линейных систем с постоянными коэффициентами // Автоматика и телемеханика. 2026. № 1. С. 28-41. DOI: 10.7868/S2413977726010024.
3. Nikonov V.I. On an Algebro-Geometric Approach to the Study of Stability with Respect to a Part of the Variables of Linear Systems with Constant Coefficients //

Automation and Remote Control. 2026. Vol. 87, No. 1. P. 18-28. DOI:
10.7868/S1608303226010023.

4. Никонов В.И. Об алгебро-геометрических свойствах суммы циклических подпространств относительно линейного оператора // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: Сборник материалов XI Международной научной молодежной школы-семинара имени Е.В. Воскресенского. Саранск, 26-28 июля 2024 года. Саранск: Средневолжское математическое общество, 2024. С. 143-148.

MSC 34A30

Triangulation of linear systems

V.I. Nikonov¹

National Research Mordovia State University¹

Abstract: The proposed research aims to develop a new method for the triangularization of linear systems of ordinary differential equations and to apply it to difference systems and systems of equations with deviating arguments. Based on the research findings, the project also envisages the development of a constructive algorithm for solving the problem, drawing upon the theory of systems of ordinary differential equations and employing methods from linear algebra, group theory, and algebraic and projective geometry, including elements of mathematical analysis.

Keywords: linear system, triangularization, fundamental system of solutions.

УДК 519.63

Численное исследование пиролиза этана в цилиндрическом реакторе при воздействии лазерного излучения

Панов А.В.¹, Орехова В.Н.¹

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет¹

Аннотация: В работе представлены результаты численного моделирования процесса пиролиза этана в цилиндрическом реакторе под воздействием лазерного излучения. Математическая модель основана на системе уравнений Навье-Стокса в приближении малых чисел Маха в цилиндрической системе координат и дополнена кинетической схемой пиролиза этана и уравнением переноса лазерного излучения с учётом поглощения этиленом. Проведена серия вычислительных экспериментов при различных температурах стенок. Показано, что лазерное излучение позволяет снизить температуру стенок на 100 – 150°C для осуществления пиролиза этана. Установлено, что при умеренных температурах стенок 1073 К и наличии лазерного излучения достигается накопление этилена как целевого продукта.

Ключевые слова: математическое моделирование, пиролиз этана, лазерное излучение.

В современной нефтехимии процесс пиролиза углеводородов является одним из основных способов получения низших олефинов, в частности, этилена. Повышение эффективности и селективности этого процесса остаётся важной научно-технической задачей. Одним из перспективных подходов является использование лазерного излучения для инициирования и интенсификации химических реакций, что позволяет снизить энергозатраты и требования к материалу установок. В связи с этим актуальным является построение адекватных математических моделей и разработка численных алгоритмов для исследования реагирующих течений в трубчатых реакторах с учётом сложной химической кинетики и энерговклада от лазерного излучения.

В настоящей работе проведено численное исследование воздействия лазерного излучения на процесс пиролиза этана в реакторе цилиндрической формы.

В основе модели лежит система уравнений, описывающая дозвуковое течение многокомпонентного сжимаемого вязкого теплопроводного газа в цилиндрической системе координат [1]. Уравнения получены из системы Навье-Стокса в приближении малых чисел Маха [2] и включают систему обыкновенных дифференциальных уравнений, учитывающих химические реакции и дифференциальное уравнение для переноса лазерного излучения, поглощаемого этиленом. Химическая кинетика описывается схемой пиролиза этана, включающей 15 элементарных стадий и 12 компонентов газовой смеси [3]. Для каждой стадии используется уравнение Аррениуса. Поглощение лазерного излучения моделируется с учётом насыщения и зависимости коэффициента поглощения от концентрации этилена и температуры газа.

Проведена серия расчётов для реактора длиной 220 мм и диаметром 20 мм. Рассмотрены два режима: высокотемпературный (температура стенки 1173 К, температура входящего этана 1073 К) и умеренно-температурный (температура стенки 1073 К, температура входящего этана 923 К). В обоих случаях на входе задавался поток

этана 60 л/ч и лазерное излучение мощностью 20 Вт.

Показано, что в обоих режимах лазерное излучение практически полностью поглощается этиленом к выходу из реактора, что приводит к локальному разогреву газовой смеси до температур выше 1300 К, что превышает температуру стенок (рис. 1). При высоких температурах наблюдается полное превращение этана с преимущественным образованием метана и ацетилена, что соответствует кинетике высокотемпературного пиролиза. В умеренном режиме конверсия этана неполная, а основными продуктами являются этилен (рис. 2) и водород. Полученные пространственные распределения полей температуры, скорости и массовых долей компонентов качественно и количественно согласуются с известными закономерностями процесса.

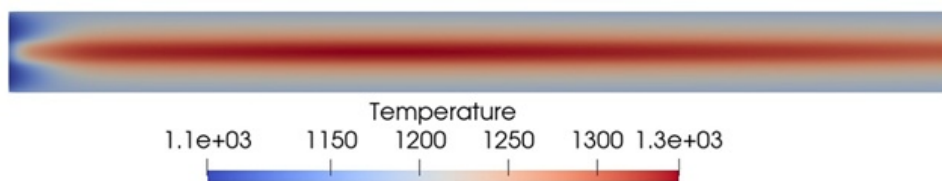


Рис. 1. Распределение температуры

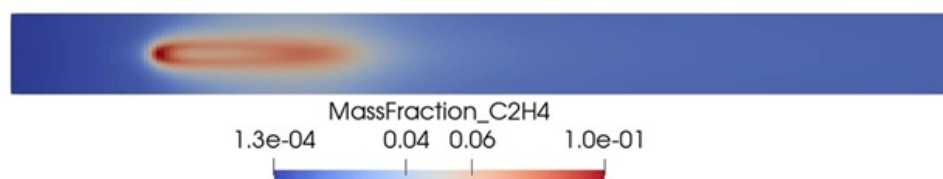


Рис. 2. Распределение этилена

Таким образом, в работе показано, что использование лазерного излучения позволяет эффективно инициировать реакцию при температурах стенок около 1000 К, что ниже традиционно используемых значений, и способствует накоплению целевого продукта – этилена. Результаты работы могут быть полезны при проектировании реакторов лазерной термохимии и выборе оптимальных режимов их эксплуатации.

Литература

1. Мустайкин М.С., Пескова Е.Е. Параллельный алгоритм для численного исследования дозвуковых реагирующих течений в цилиндрической системе координат // Параллельные вычислительные технологии: труды XIX Международной научной конференции. 2025. С. 212-215.
2. Day M.S., Bell J.B. Numerical simulation of laminar reacting flows with complex chemistry // Combustion Theory and Modelling. 2000. Vol. 4, No. 4. P. 535-556.
3. Nurislamova L.F., Stoyanovskaya O.P., Stadnichenko O.A., Gubaidullin I.M., Snytnikov V.N., Novichkova A.V. Few-step kinetic model of gaseous autocatalytic ethane pyrolysis and its evaluation by means of uncertainty and sensitivity analysis // Chemical Product and Process Modeling. 2014. Vol. 9. P. 143-154.

MSC 65M08

Numerical study of ethane pyrolysis in a cylindrical reactor under laser radiation

A.V. Panov¹, V.N. Orekhova¹

National Research Mordovia State University

Abstract: The paper presents the results of numerical simulation of the process of ethane pyrolysis in a cylindrical reactor under the influence of laser radiation. The mathematical model is based on the Navier-Stokes system of equations in the approximation of small Mach numbers in a cylindrical coordinate system and is complemented by the kinetic scheme of ethane pyrolysis and the equation of laser radiation transfer taking into account ethylene absorption. A series of computational experiments was carried out at different wall temperatures. It is shown that laser radiation makes it possible to reduce the wall temperature by 100 – 150°C for the pyrolysis of ethane. It was found that at moderate wall temperatures of 1073 K and the presence of laser radiation, the accumulation of ethylene as a target product is achieved.

Keywords: mathematical modeling, ethane pyrolysis, laser radiation.

УДК 519.63

Гибридные модели для анализа двух типов запаздывающей регуляции алеаторических биофизических процессов

Переварюха А.Ю.¹

Объединённая дирекция заповедников Таймыра¹

Аннотация: В работе предложено обобщающее развитие предложенного ранее автором алеаторического метода формирования модели биофизического процесса с функциональными компонентами. При эволюции в некоторой особой ситуации происходит не полностью предопределённый выбор из вариантов развития. Недетерминированный выбор из набора антигенных детерминант происходит при выработке иммунного ответа на изменчивый коронавирус. Алеаторика на раннем этапе определяет разную эффективность связывания вируса с антителами и в итоге объясняет волны многократных заражений. При совершенствовании модели выработки биофизического противодействия предлагается формировать правые части гибридных уравнений с двумя антагонистическими компонентами запаздывающего противодействия: регуляционного и адаптационного. Компоненты гибридной модели трансформируются по схеме, но не в предопределённое время. Алеаторический подход применим для моделирования популяций Таймыра.

Ключевые слова: алеаторическая модель, возмущённые уравнения, иммунный ответ COVID, неопределённость эволюции вирусов, запаздывающая регуляция.

1. Алеаторический принцип моделирования в биофизике

Многие биофизические процессы не предопределены, хотя существуют алгоритмы, описывающие их. В некоторых критических точках, незначительно отходящих от начального состояния, развитие ситуации определяет выбор из вариантов набора характеристик. Будем называть события при ограниченной неопределённости алеаторическими. Для их моделирования предлагаются вероятностно переопределяемые гибридные структуры. Известно, что иммунитет в локальных популяциях ведёт себя различно при столкновении с инфекциями. При этом антитела в типичном случае у большинства особей вырабатываются как ответ одинаковые антигенные детерминанты большинства вирусов. Иммунный ответ на коронавирус значительно более разнообразен. У некоторых формируется устойчивый нейтрализующий иммунитет и не восприимчивость, некоторые болеют каждый год или даже раз в 6 месяцев, у отдельной группы происходит хронизация последствий коронавируса и развивается иммуносценция. Незначительная в масштабах популяции хроническая группа становится естественным резервуаром накопления мутаций – фактором, способствующим продолжающейся эволюции вируса. Эпидемия в форме непредсказуемых волн COVID-19 поддерживается карусельной сменой доминирующих штаммов, которые способны преодолевать защитные антитела. Возникает задача описания смены колебательных режимов динамики заражений при замене доминирующего штамма. В настоящее время предвидеть заранее новые глобальные варианты вируса из возникающих вариаций затруднительно, однако можно определить признаки перехода к

новой COVID-волне. Штамп-активатор резко увеличит долю в числе заражений от 1/10 до 2/3.

Автором предложен метод сценарного ситуативного моделирования с включением в модель ограниченно действующей вероятностной компоненты, что актуально для описания свойств эпидемических, иммунных и инвазионных процессов.

2. Сценарное формирование алеаторических моделей волн COVID

Известные эпидемические модели SIRS-схемы описывали вспышки гриппа, но оказались принципиально неспособны описать серии волн заражений COVID [1]. Меняются не только эпидемические характеристики, такие как базовое репродуктивное число r_0 , но изменяется нелинейность смены нарастания и снижения числа ежедневных случаев, связанная с вероятностью заражения при контакте и непостоянством средней длины цепочек заражения. Описания флуктуационной динамики предлагаем развивать на основе алеаторически сменяемых форм из уравнений с запаздыванием следующего вида:

$$\dot{N} = r_0 f_i(N(t - \tau), N^k) F_j(N(t - \psi(\nu))), \tau > \nu.$$

При увеличении параметра $r_0\tau$ для траектории решения таких уравнений возникает бифуркация Андронова-Хопфа с образованием цикла $N_*(t; r\tau)$. Для решения рассматриваемой проблемы необходимо описывать не только повторное возникновение волн, но и их естественное и очевидное затухание. Потому формирование гибридных структур потребует несколько вариантов составления уравнения из возможных вариантов функций. За основу наборов гибридных модификации уравнений с коэффициентами с $\dot{N} = rF(N(t))^\Theta$ можно взять:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \frac{(1 - N(t - \tau))/(K + \vartheta N)^\Theta}{(1 - N(t))/K(1 - \gamma)}. \quad (0)$$

На практике важным отличием моделей ограниченного роста является положение точки перегиба $N_p \neq 0$ решения $N(t)$. Для простой логистической модели Ферхюльста-Пирла ордината точки перегиба $N_p = K/2$, абсцисса $t_p = r^{-1} \ln(K - N(0))/N(0)$. Положение ординаты точки перегиба N_p важно установить для анализа сценариев с внешним воздействием $\dot{N} = rf(N(t)) - Q$. Прирост численности в точке N_p максимизируется [2] – инвазионный процесс развивается наиболее стремительно. Необходима актуальная модель с двумя функциями в правой части:

$$\dot{N} = rf(N(t - \tau)) - F(N).$$

Подходит для одного из переходных волновых режимов известное уравнение с запаздывающей регуляцией, но без параметра ниши K с $f(x) = rxe^{-bx}$:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t - \tau) \exp(-bN(t - \tau)) - \delta N(t).$$

При увеличении $r\tau$ решение демонстрирует релаксационные колебания с убывающими к ϵ -окрестности нуля минимумами цикла $\min N_*(t) \rightarrow 0 + \epsilon$. Из-за свойства приближения минимумов к нулю демпфирование амплитуды релаксационного цикла $N_*(t; r\tau)$ с ростом запаздывания в гибридных моделях необходимо усилить:

$$\overline{\max N_*(t; r\tau) - \min N_*(t; r\tau)} \rightarrow \Omega = const, \max N > \Omega > \epsilon.$$

Будем развивать исходно детерминированную модели инвазионного процесса вселенца и ограниченную серию волн COVID с $N(t - \tau)$ в форме уравнения с отклоняющимся аргументом, где величина запаздывания τ возмущена равномерно распределенной случайной величиной $\gamma \in [-0.5, 0.5]$. Метод отражает влияние случайных факторов на небольшую исходную группу зараженных. Для включения стохастической компоненты будем возмущать величину запаздывания $\gamma\tau$, что качественно отразится на сценариях завершения инвазионного процесса. Возмущение репродуктивного параметра возможна, но стохастика запаздывания позволяет рассматривать именно сценарии регуляции – сравнивать различные варианты для патогенных штаммов. В работе предложено развитие модели специфических кризисных процессов вне равновесного состояния на базе систем уравнений с возмущенным запаздыванием и с триггерными функциями с учетом времени адаптации нового биотического окружения и восстановления истощенных активным вселенцем или вирусом ресурсов среды. Отражены перемены запаздывания разного генезиса.

3. Методология сценарных моделей с возмущением регуляции

Эффекты запаздывания разделены на 3 типа по биофизической роли в развитии процессов. Инвазионные процессы проходят этап кризисной динамики $N(t) \rightarrow 0 + \epsilon$ и сопровождаются длительными осцилляциями. Так биосистема получит несколько сценариев динамики кризиса, [3] включая гибель $N(t_\infty) = 0$. Мы предлагаем уравнения для алеаторического выбора. Триггерное развитие биофизического явления с кризисом определим в уравнении свойствами выбранной функции Ψ сопротивления среды (или иммунитета):

$$\dot{N} = F(N(t - \tau)) - \Psi(N(t - \nu)).$$

Пороговый эффект [6] в реакции агрессивного роста численности вируса выразим $\ln_K$ -регуляцией в функции противодействия $\Psi(N(t - \nu))$ и при $Q > q, m \geq 2, N(0) < J < K$ в алеаторическом выборе формирования ответа уравнением затухающих колебаний:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \ln \left(\frac{K}{N(t - \tau)} \right) - Q \frac{N^m(t - \nu)}{(J - N(t))^2} - qN(t). \quad (1)$$

Из уравнения (1) следует, что на начальном этапе идет увеличение численности небольшой группы $N(0) < J$. Далее рост остановлен. Вместо стабилизации $N(t) \rightarrow K, N(t_s) < K$ или превышения равновесия K начинается стадия резкого кризиса с возрастанием функции $F(N^2)$, куда включим мягкий порог J . При $N \rightarrow J$ и потенциал роста еще не нивелирован [5] $\ln_K$ -регуляцией. Для прогнозирования стремительных инвазий и инфекций актуален сценарий, когда достигнутая численность $N(t) \rightarrow K$ не будет устойчивой. Стохастическое возмущение значимо при активации иммунного противоборства в состоянии, критическом для среды. При приближении к порогу разрушения среды наблюдается усиление противодействия, что типично для иммунного ответа организма. Время активации вариативно, но не менее τ_1 . Пусть τ_1 варьируется случайной величиной γ в ограниченном диапазоне. Предложим модель инвазии с возмущенным равномерной случайной величиной запаздыванием $(t - \tau_1\gamma)$:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \ln \left(\frac{K}{N(t - \tau\gamma)} \right) - \frac{\delta N^2(t - \tau_1\gamma)}{(J - N(t))^2} - qN(t), \delta > q, \gamma(\omega) \in [1, 2]. \quad (2)$$

В сценарии приближения $N(t)$ к пороговому значению J , $N(0) < J < K$ резкий переход в глубокий популяционный кризис $N(t) \rightarrow 0 + \epsilon$. Сценарий преодоления кризиса с образованием колебаний $N(t) \rightarrow N_*(t)$, $\max N_*(t) < J$ зависит от стохастических временных факторов. Согласно (2) биофизический сценарий гарантированно завершается при пороговом увеличении репродуктивного потенциала r .

Заключение

В статье продолжено развитие метода формирования биофизических моделей для ситуаций, где существуют варианты их развития с аспектом неопределенности, но эти процессы не стохастические. Вероятностный фактор ограничен и во времени, и в выборе возможных вариантов и такие явления мы определяем как алеаторические эффекты. Поиск путей адаптации биосистем не имеет однозначного варианта. В биофизике развитие процесса не предопределено начальным состоянием, но и не стохастично. Например, наличие генетического кода не гарантирует его правильного выполнения, а при иммунном ответе для пролиферации выбирается именно минимально подходящая в существующем наборе наивная иммунная клетка. Именно алеаторический фактор объясняет факт, что даже близнецы болеют одним штаммом вируса с разными симптомами. Другим фактором случайности выступает зависимость скорости запуска иммунного ответа от начальной дозы заражения.

Литература

1. Nikitina A.V. Study of the spread of viral diseases based on modifications of the SIR model // Computational Mathematics and Information Technologies. 2020. Т. 1, № 1. Р. 19-30.
2. Соловьева Т.Н. Динамическая модель деградации запасов осетровых рыб со сложной внутривидовой структурой // Информационно-управляющие системы. 2016. N 4 (83). С. 60-67.
3. Переварюха А.Ю. Моделирование популяционных изменений на основе численного решения разрывных ОДУ // Журнал Средневолжского математического общества. 2011. Т. 13, № 3. С. 101-106.
4. Дубровская В.А., Трофимова И.В. Модель динамики структурированных субпопуляций осетровых рыб каспия с учетом отклонений в темпах развития молоди // Журнал Белорусского государственного университета. Биология. 2017. № 3. С. 76-86.
5. Mikhailov V.V., Trofimova I.V. Principles of Simulation of Invasion Stages with Allowance for Solar Cycles // Technical Physics Letters. 2023. Т. 49, № 9. С. 97-105.
6. Переварюха А.Ю. Моделирование эффекта волнообразной кривой воспроизводства популяций рыб // Экологические системы и приборы. 2008. № 8. С. 41-44.

MSC 92-10

Hybrid models for the analysis of two types of delayed regulation of aleatoric biophysical processes

A.Yu. Perevaryukha¹

United Directorate of Taimyr Nature Reserves¹

Abstract: This paper proposes a generalized development of the author's previously proposed aleatoric method for forming a model of a biophysical process with functional components. During evolution, in a particular situation, a not entirely predetermined choice between developmental options occurs. A nondeterministic choice from a set of antigenic determinants occurs during the development of an immune response to a variable coronavirus. Early aleatorics will determine the varying efficiency of virus binding to antibodies and ultimately explain waves of multiple infections. When refining the model for the development of biophysical counteraction, it is proposed to form the right-hand sides of hybrid equations with two antagonistic components of the delayed counteraction: regulatory and adaptive. The components of the hybrid model are transformed according to a pattern, but at a non-predetermined time. The aleatoric approach is applicable to modeling Taimyr populations.

Keywords: aleatoric model, perturbed equations, COVID immune response models, uncertainty in viral evolution, delayed regulation.

УДК 519.63

Реализация PINN для вихря Тейлора–Грина

Подгорнов А.А.¹, Каледина Е.А.¹

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет¹

Аннотация: Реализована физико-информированная нейронная сеть для численного решения уравнений Навье–Стокса несжимаемой жидкости в двумерной постановке. На примере классического вихря Тейлора–Грина проведена оценка точности и устойчивости метода при различных уровнях зашумления входных данных, а также выполнено сравнение с методом конечных разностей.

Ключевые слова: физико-информированная нейронная сеть, уравнения Навье–Стокса, вихрь Тейлора–Грина.

1. Постановка задачи

Физико-информированные нейронные сети (Physics-Informed Neural Networks, PINNs) представляют собой бессеточный метод аппроксимации решений дифференциальных уравнений в частных производных. Искомая функция моделируется нейронной сетью, а функция потерь помимо невязки начальных и граничных условий, включает невязку самого уравнения [1].

Исследуется реализация PINN для задачи двумерного распада вихря Тейлора–Грина [2]. Рассматривается течение несжимаемой жидкости в квадратной области с периодическими граничными условиями. Начальное поле скорости задаётся аналитическими выражениями $u(x, y, 0) = \sin x \cos y$, $v(x, y, 0) = -\cos x \sin y$. Благодаря линейности уравнений в данном случае существует точное решение. Его наличие делает задачу удобным эталоном для оценки точности и сходимости вычислительных алгоритмов.

Входными переменными PINN служат пространственные координаты $x = (x, y, z)$ и время t ; выходом – предсказанные поля компонент вектора скорости $\hat{\vec{u}} = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$ и давления $\hat{p}$. Сеть реализует отображение $[\hat{\vec{u}}(\vec{x}, t; \vec{\theta}), \hat{p}(\vec{x}, t; \vec{\theta})] = \mathcal{N}_{\vec{\theta}}(\vec{x}, t)$, где $\vec{\theta}$ – полный набор обучаемых параметров. Архитектура сети $\mathcal{N}_{\vec{\theta}}$ – многослойный персептрон, содержащий 4 скрытых слоя по 256 нейронов в каждом с функцией активации $\sigma(z) = \tanh(z)$.

В оптимизируемый функционал явно включаются невязки уравнений Навье–Стокса, а также ошибки выполнения начальных и граничных условий. Для этого на множестве коллокационных точек, случайно распределённых по области $\Omega \times [0, T]$, с помощью автоматического дифференцирования вычисляются все частные производные сетевого предсказания по входам x, y, z, t [3]. Подстановка нейросетевых аппроксимаций $\hat{\vec{u}}, \hat{p}$ даёт векторную невязку уравнений моментов

$$\vec{R}_{NS}(\vec{x}, t; \vec{\theta}) = \frac{\partial \hat{\vec{u}}}{\partial t} + (\hat{\vec{u}} \cdot \nabla) \hat{\vec{u}} + \nabla \hat{p} - \nu \Delta \hat{\vec{u}}$$

и скалярную невязку уравнения неразрывности $R_{div}(\vec{x}, t; \vec{\theta}) = \nabla \cdot \hat{\vec{u}}$. Функция потерь $L(\vec{\theta})$, минимизируемая в процессе обучения, представляет собой взвешенную сумму

нескольких слагаемых [4]

$$L(\vec{\theta}) = \lambda_{PDE} L_{PDE}(\vec{\theta}) + \lambda_{IC} L_{IC}(\vec{\theta}) + \lambda_{BC} L_{BC}(\vec{\theta}) + \lambda_{data} L_{data}(\vec{\theta}).$$

Здесь $L_{PDE}(\vec{\theta})$ – невязка уравнений Навье–Стокса, $L_{IC}(\vec{\theta})$ – невязка начальных условий, $L_{BC}(\vec{\theta})$ – невязка граничных условий, $L_{data}(\vec{\theta})$ – невязка аппроксимации аналитического решения, вычисляемые соответственно по формулам

$$\begin{aligned} L_{PDE} &= \frac{1}{N_f} \sum_{i=1}^{N_f} (\|\vec{R}_{NS}(\vec{x}_f^i, t_f^i; \vec{\theta})\|^2 + |R_{div}(\vec{x}_f^i, t_f^i; \vec{\theta})|^2), \\ L_{IC}(\vec{\theta}) &= \frac{1}{N_{IC}} \sum_{i=1}^{N_{IC}} \|\hat{u}(\vec{x}_{IC}^i, 0; \vec{\theta}) - \vec{u}_0(\vec{x}_{IC}^i)\|^2, \\ L_{BC}(\vec{\theta}) &= \frac{1}{N_{BC}} \sum_{i=1}^{N_{BC}} \|\hat{u}(\vec{x}_{bc,1}^i, t_{bc}^i; \vec{\theta}) - \hat{u}(\vec{x}_{bc,2}^i, t_{bc}^i; \vec{\theta})\|^2, \\ L_{data}(\vec{\theta}) &= \frac{1}{N_d} \sum_{i=1}^{N_d} \|\hat{u}(\vec{x}_d^i, t_d^i; \vec{\theta}) - \vec{u}_{ref}^i\|^2. \end{aligned}$$

Для минимизации функционала $L(\vec{\theta})$ на начальном этапе применяется оптимизатор Adam, а затем для тонкой настройки используется квазиньютоновский метод L-BFGS.

2. Результаты вычислительных экспериментов

Для проведения вычислительных экспериментов использовалась библиотека PyTorch с поддержкой CUDA. Использованы следующие параметры сети: количество точек коллокации $N_f = 1000$, количество точек начальных условий $N_{ic} = 500$, количество пар точек для периодических ГУ $N_{bc} = 200$.

На рис. 1–2 представлены графики аналитического решения и прогноза PINN, поля скорости и давления, графики ошибок.

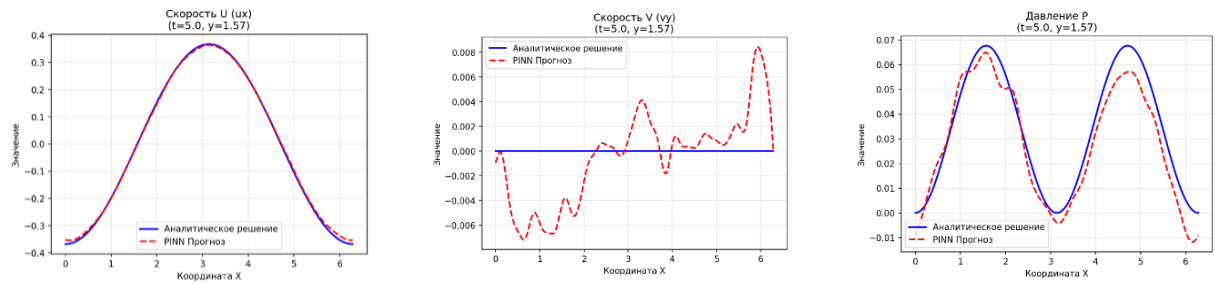


Рис. 1. Сравнение значений скорости параметров u, v, p аналитического решения и прогноза PINN

3. Устойчивость к зашумлённым данным

Чтобы оценить устойчивость PINN к ошибкам во входных данных, в начальные поля скорости добавлялся гауссовский шум с нулевым средним и возрастающим стандартным отклонением. Для сравнения использовался классический метод конечных разностей (МКР) на сетке 50×50 . В качестве метрики точности вычислялась среднеквадратичная ошибка (RMSE) между полученным решением и аналитическим. В

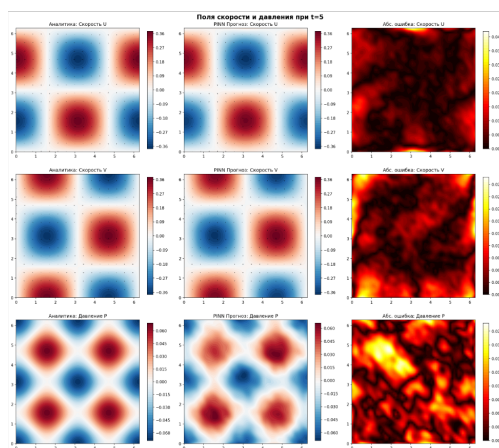


Рис. 2. Сравнение полей скорости, давления и ошибок аналитического решения и PINN

таблице 1 представлено сравнение двух подходов. Относительный рост ошибок для PINN и метода конечных разностей рассчитан следующим образом

$$\text{Относительный рост ошибок} = (RMSE_{\text{с шумом}}) / (RMSE_{\text{без шума}}).$$

Таблица 1. Сравнение RMSE для PINN и метода конечных разностей

Уровень шума	Абс. значение RMSE PINN			Отн. рост RMSE PINN			Абс. значение RMSE МКР			Отн. рост RMSE МКР		
	u	v	p	u	v	p	u	v	p	u	v	p
0.00	0.0074	0.0078	0.0078	—	—	—	0.0002	0.0002	0.0003	—	—	—
0.05	0.0189	0.0210	0.0117	2.6	2.7	1.5	0.0026	0.0024	0.0008	13.0	12.0	2.7
0.10	0.0313	0.0331	0.0159	4.2	4.2	2.0	0.0051	0.0049	0.0014	25.5	24.5	4.7
0.20	0.0468	0.0493	0.0205	6.3	6.3	2.6	0.0102	0.0097	0.0028	51.0	48.5	9.3

В отсутствие шума PINN и метод конечных разностей показывают сопоставимую точность. Однако из таблицы 1 видно, что при увеличении шума ошибка метода конечных разностей растёт гораздо быстрее, чем ошибка PINN. Таким образом, физические законы (уравнения Навье–Стокса), заложенные в обучение сети, помогают сглаживать случайные помехи, не давая им катастрофически нарастать, в отличие от классического численного метода.

Литература

1. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations // Journal of Computational Physics. 2019. Vol. 378. P. 686-707. DOI: 10.1016/j.jcp.2018.10.045.
2. Taylor G.I., Green A.E. Mechanism of the production of small eddies from large ones // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 1937. Vol. 158, No. 895. P. 499-521. DOI: 10.1098/rspa.1937.0036.

3. Бетелин В.Б., Галкин В.А. О построении искусственной нейронной сети для решения системы уравнений Навье-Стокса в случае несжимаемой жидкости // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2024. Т. 517. С. 115-119. DOI: 10.31857/S2686954324700412.
4. Xiaowei Jin, Shengze Cai, Hui Li, Karniadakis G.E. NSFnets (Navier-Stokes flow nets): Physics informed neural networks for the incompressible Navier-Stokes equations // Journal of Computational Physics. 2021. Vol. 426. P. 109951. DOI: 10.1016/j.jcp.2020.109951.

MSC 65M99

PINN implementation for the Taylor–Green vortex

A.A. Podgornov¹, E.A. Kaledina¹

National Research Mordovia State University¹

Abstract: A physically-informed neural network for the numerical solution of the Navier–Stokes equations for an incompressible fluid in a two-dimensional setting has been implemented. Using the classical Taylor–Green vortex as an example, the accuracy and stability of the method are assessed for various levels of input data noise, and a comparison with the finite difference method is made.

Keywords: Physics-informed neural network, Navier–Stokes equations, Taylor–Green vortex.

Численное моделирование волновых процессов на графе

Рыбаков М.А.¹

Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина¹

Аннотация: Исследование колебаний упругих струнных сетей необходимо для анализа виброакустических характеристик строительных и авиакосмических конструкций, прогнозирования резонансов и проектирования систем виброзащиты. В работе рассматривается начально-краевая задача для волнового уравнения на графе, моделирующая такие колебания. Условия согласования в узлах графа описывают непрерывность смещения и баланс сил, позволяя учесть как идеальное соединение, так и соединение, в котором происходит торможение или ускорение волнового процесса под влиянием внешних воздействий и изменений жёсткости примыкающих струн – рёбер графа. Для решения используется явная разностная схема с двойными узлами. Вычислительные эксперименты подтвердили устойчивость и точность метода.

Ключевые слова: численное моделирование, начально-краевая задача, волновой процесс, граф, условия согласования.

Рассматривается начально-краевая задача, определяющая математическую модель волнового процесса на графе $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ с внутренним узлом ξ (рис. 1). Ребро γ_1 параметризовано отрезком $[0, 1/2]$, ребро γ_2 — отрезком $[1/2, 1]$. Актуальность таких задач обоснована в работах по распространению волн на графах [1].

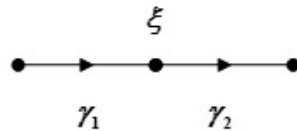


Рис. 1. Граф Γ

Пусть функция $u(x, t)$, определяющая волновой процесс, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - a(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - b(x)u(x, t) = f(x, t), \quad x \in \Gamma, \quad t \in (0, T], \quad (1)$$

условиям согласования в узле ξ

$$u(x, t)|_{x=\frac{1}{2} \in \gamma_1} = u(x, t)|_{x=\frac{1}{2} \in \gamma_2}, \quad (2)$$

$$a(x)_{\gamma_1} \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=\frac{1}{2} \in \gamma_1} = \alpha \cdot a(x)_{\gamma_2} \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=\frac{1}{2} \in \gamma_2}, \quad (3)$$

начальным

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \Gamma, \quad (4)$$

и граничным условиям

$$u(x, t)|_{x=0} = u(x, t)|_{x=1} = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (5)$$

Для волнового процесса поперечных колебаний упругой струнной конструкции коэффициенты $a(x)$ и $b(x)$ в уравнении (1) определяют инерционные и упругие характеристики среды. Коэффициент $a(x)$ – коэффициент упругости материала конструкции, коэффициент $b(x)$ характеризует внутреннее сопротивление сплошной среды. Функция источника $f(x, t)$ задает мощность распределенного внешнего воздействия. Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определяют начальное отклонение и начальную скорость точек конструкции при $t = 0$.

Условие (2) обеспечивает непрерывность поперечного смещения $u(x, t)$ в узле ξ . Условие (3) задает баланс сил натяжения в узле ξ , где коэффициент α характеризует внешнее воздействие на упругий материал конструкции (тормозящее или усиливающее) волновой процесс в узле ξ .

Аппроксимация начально-краевой задачи (1)-(5) приводит к дискретному аналогу математической модели. Для построения разностной схемы используется подход, изложенный в [2]:

$$\begin{aligned} \frac{(u_i^{j+1})_{\gamma_k} - 2(u_i^j)_{\gamma_k} + (u_i^{j-1})_{\gamma_k}}{\tau^2} - (a_i)_{\gamma_k} \frac{(u_{i+1}^j)_{\gamma_k} - 2(u_i^j)_{\gamma_k} + (u_{i-1}^j)_{\gamma_k}}{h^2} - (b_i)_{\gamma_k} (u_i^j)_{\gamma_k} &= (f_i^j)_{\gamma_k}, \\ i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{1, K-1}, \quad k = 1, 2, \\ (u_N^{j+1})_{\gamma_1} &= (u_0^{j+1})_{\gamma_2}, \\ (a_N)_{\gamma_1} \cdot \frac{(u_N^{j+1})_{\gamma_1} - (u_{N-1}^{j+1})_{\gamma_1}}{h} &= \alpha \cdot (a_0)_{\gamma_2} \cdot \frac{(u_1^{j+1})_{\gamma_2} - (u_0^{j+1})_{\gamma_2}}{h}, \\ (u_i^0)_{\gamma_k} &= (\varphi_i)_{\gamma_k}, \quad \frac{(u_i^1)_{\gamma_k} - (u_i^0)_{\gamma_k}}{\tau} = (\psi_i)_{\gamma_k}, \quad i = \overline{0, N}, \quad k = 1, 2, \\ (u_0^{j+1})_{\gamma_1} &= (u_N^{j+1})_{\gamma_2} = 0. \end{aligned}$$

На основе этой разностной схемы рассмотрена тестовая задача, в которой $a(x) = 1$, $b(x) = 0$, $f(x, t) = 0$, $\varphi(x) = \sin(2\pi x)$, $\psi(x) = 0$, $\tau = 0.01$, $h = 0.05$, $T = 1$.

Графические изображения вычисленных значений $u(x, t)$ на графе Γ при различных временных значениях и значениях коэффициента α представлены на рис. 2 и рис. 3.

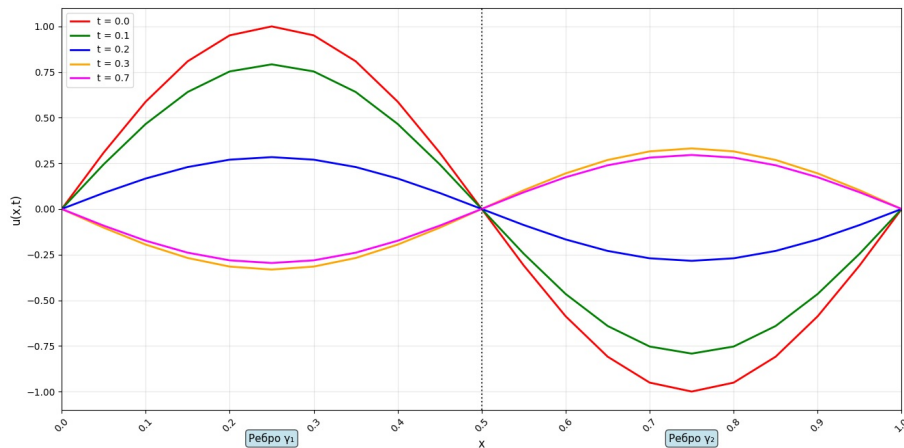


Рис. 2. Значения $u(x, t)$ на графе Γ при $\alpha = 1$

На графиках эволюции волны на графе Γ при $\alpha = 1$ излом отсутствует, и волна гладко переходит через узел ξ . В случае $\alpha = 5$ наблюдается скачок градиента (излом), соответствующий балансу сил и изменению упругих свойств среды. Плавное

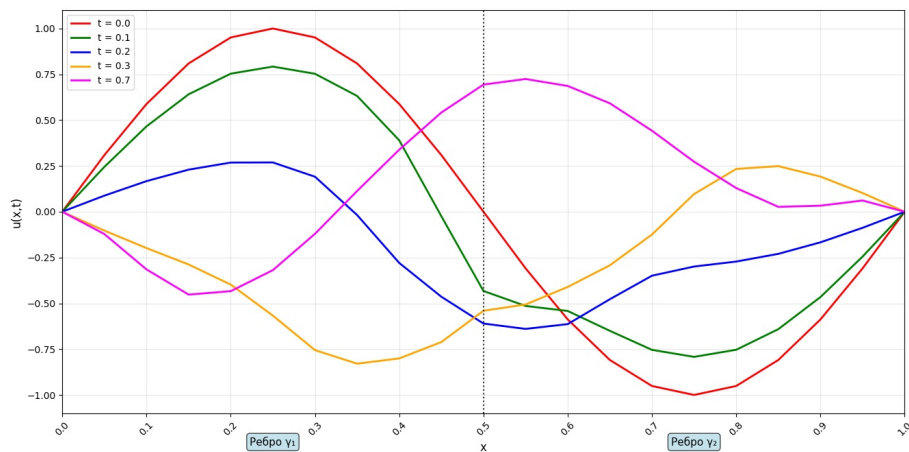


Рис. 3. Значения $u(x, t)$ на графе Γ при $\alpha = 5$

затухание амплитуды колебаний с сохранением формы профиля во времени подтверждает корректность работы численной схемы.

Для подтверждения точности и сходимости разработанного алгоритма было проведено численное решение тестовой «классической» (т.е. при $\alpha = 1$) начально-краевой задачи (1)-(5), где $a(x) = 1$, $b(x) = 0$, $f(x, t) = 0$, $\varphi(x) = \sin(2\pi x)$, $\psi(x) = 0$, $T = 1$, для которой известно точное аналитическое решение $u(x, t) = \sin(2\pi x) \cos(2\pi t)$. Для количественной оценки точности численного решения вычислялась максимальная абсолютная погрешность во всех узлах сетки. Для сетки с шагами $\tau = 0.01$, $h = 0.05$ получена погрешность $\Delta_{\max} = 0.025011$, для $\tau = 0.005$, $h = 0.025$ — погрешность $\Delta_{\max} = 0.013741$, а для $\tau = 0.0025$, $h = 0.0125$ — погрешность $\Delta_{\max} = 0.007172$. Полученные значения погрешностей свидетельствуют о том, что при уменьшении шага сетки в два раза погрешность уменьшается в два раза.

Таким образом, разработанная разностная схема является сходящейся и устойчивой, что подтверждает её пригодность для практических инженерных расчётов. В отличие от аналитических методов (например, с использованием преобразования Лапласа [3]), которые имеют ограниченную применимость, предложенный численный подход позволяет моделировать волновые процессы на графах со сложной топологией, и учитывать сложные условия сопряжения в узлах ветвления.

Литература

1. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 272 с.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем. Москва: Наука, 1977. 656 с.
3. Рыбаков М.А. Решение задачи переноса сплошной среды по сетевому носителю в символьном виде // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2023. Т. 11, Вып. 4. URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1451>.

MSC 35R02

Numerical modeling of wave processes on a graph

M.A. Rybakov¹

Derzhavin Tambov State University¹

Abstract: The investigation of vibrations in elastic string networks is crucial for the analysis of vibroacoustic properties of civil and aerospace structures, the prediction of resonant behavior, and the design of vibration isolation systems. The present work considers an initial-boundary value problem for the wave equation on a graph that describes such vibrations. The coupling conditions at the graph nodes enforce continuity of displacement and force balance, thereby accounting for both ideal joints and joints where external influences and stiffness changes of adjacent strings (graph edges) decelerate or accelerate the wave propagation. An explicit finite-difference scheme with double nodes is used for the numerical solution. Numerical experiments have verified the stability and accuracy of the proposed method.

Keywords: numerical modeling, initial-boundary value problem, wave process, graph, coupling conditions.

УДК 517.9

Аппроксимация решения двумерного интегрального уравнения Вольтерра с нагруженным оператором*

Рязанцев В.А.¹, Тында А.Н.¹

Пензенский государственный университет¹

Аннотация: В работе строится численный метод решения двумерного интегрального уравнения Вольтерра с локальными нагрузками. Предлагаемый численный метод основывается на сведении задачи к решению системы линейных уравнений относительно коэффициентов аппроксимации искомой функции на сетке узлов специального вида. Проведённые численные расчёты подтверждают эффективность метода.

Ключевые слова: двумерное интегральное уравнение, уравнение вольтерровского типа, кусочно-линейная аппроксимация, локальные нагрузки

В работе описывается прямой численный метод решения двумерного линейного интегрального уравнения вольтерровского типа с локальными нагрузками, под которым понимается интегральное уравнение с оператором, включающим в себя след искомого решения в форме линейной комбинации значений этого решения в конечном множестве точек. Само уравнение, в котором искомой является функция $\psi(x, y)$, записывается следующим образом:

$$\gamma_0(x, y)\psi(x, y) + \sum_{j=1}^N \gamma_j(x, y)\psi(M_j) = \lambda \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y H(x, y; \xi, \eta)\psi(\xi, \eta) d\eta d\xi + f(x, y). \quad (1)$$

Здесь $(x, y) \in \Omega$, $\Omega = [x_0, X] \times [y_0, Y]$, $x_0 < X$ и $y_0 < Y$. Точки M_j , $j = \overline{0, N}$, называемые точками нагрузки, все принадлежат области Ω и являются попарно различными, в то время как функции $H(x, y, \xi, \eta)$ и $f(x, y)$, а также функции $\gamma_j(x, y)$ при $j = \overline{0, N}$, являются непрерывными функциями своих аргументов.

В основе описываемого численного метода решения уравнения (1) лежит кусочно-линейная аппроксимация решения $\psi(x, y)$ по обоим независимым переменным: выполняется построение специальной сетки узлов, которая учитывает распределение неизвестных нагрузок. В результате аппроксимации интегралов рассматриваемого уравнения при помощи квадратурных формул поставленная задача сводится к решению системы линейных уравнений относительно коэффициентов приближённого решения на каждом из сегментов построенной сетки. Численное решение ряда модельных примеров иллюстрирует эффективность предложенного метода.

Литература

1. Byankin V., Tynda A., Sidorov D., Dreglea A. Numerical Solution of Locally Loaded Volterra Integral Equations // Computation. 2025. Vol. 13 (5). P. 121.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-21-00743, <https://rscf.ru/project/25-21-00743/>.

2. Вечкасов Д. Р., Тында А. Н. Решение нелинейных интегральных уравнений Вольтерра с локально нагруженным оператором // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2025. № 4. С. 77–89.
3. Рязанцев В. А., Тында А. Н. Аппроксимация решения двумерного интегрального уравнения Вольтерра с нагруженным оператором // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2026. № 1. С. 49–59.

MSC 65R20

Approximation of solution of two-dimensional Volterra integral equation with a loaded operator

V.A. Ryazantsev¹, A.N. Tynda¹

Penza State University¹

Abstract: A numerical method for solution of two-dimensional Volterra integral equation with local loads is constructed in the paper. The proposed method is based on reduction of the problem to solving the system of linear equations in approximation coefficients of the unknown function on the grid of special type. Calculations that have been performed for the paper proved the efficiency of the method.

Keywords: two-dimensional integral equation, Volterra equation, piecewise-linear approximation, local loads

УДК 519.862.2

Построение регрессионной модели рентабельности производственных фондов нефтедобывающего предприятия

Савинков А.С.¹

Санкт-Петербургский горный университет императрицы Екатерины II¹

Аннотация: В работе рассматривается задача построения множественной линейной регрессионной модели, описывающей зависимость рентабельности производственных фондов от ключевых производственно-экономических факторов на примере ООО «Газпромнефть-Хантос». Для решения задачи использованы методы корреляционного и регрессионного анализа. В результате получено уравнение регрессии, включающее такие факторы, как добыча нефти, действующий фонд скважин и показатель Netback. Коэффициент детерминации модели составил 0,97, что свидетельствует о высокой объясняющей способности модели. Проведена экономическая интерпретация полученных коэффициентов, построен прогноз рентабельности на 2024–2026 годы. Результаты могут быть использованы для принятия управленческих решений в нефтегазовой отрасли.

Ключевые слова: рентабельность производственных фондов, регрессионный анализ, нефтедобыча, экономико-математическое моделирование, множественная регрессия, прогнозирование, нефтегазовая отрасль.

1. Введение

В современных экономических условиях нефтегазовая отрасль России сталкивается с необходимостью повышения эффективности производства при одновременном снижении издержек. Одним из ключевых показателей, отражающих эффективность использования производственных ресурсов, является рентабельность производственных фондов. Целью данной работы является построение экономико-математической модели, позволяющей количественно оценить влияние основных производственных факторов на рентабельность производственных фондов на примере дочернего предприятия ПАО «Газпром нефть» — ООО «Газпромнефть-Хантос».

2. Постановка задачи и методология

Объектом исследования выступает ООО «Газпромнефть-Хантос» — одно из крупнейших добывающих предприятий компании, разрабатывающее месторождения в Ханты-Мансийском автономном округе. Гипотеза исследования заключается в том, что рентабельность производственных фондов (Y) напрямую зависит от трёх факторов: добычи нефти на Южно-Приобском месторождении (X_{12}), действующего фонда скважин (X_{13}) и показателя Netback на нефть (X_{14}). В работе использованы данные за 2019–2023 годы (5 наблюдений), что обусловлено доступностью релевантной информации.

Для проверки гипотезы применены методы корреляционного анализа для отбора значимых факторов и множественный регрессионный анализ методом наименьших

квадратов. Модель построена в среде MS Excel с использованием инструмента «Регрессия» и надстройки «Пакет анализа».

3. Результаты исследования

На первом этапе проведён корреляционный анализ между результативным признаком и всеми потенциальными факторами. Наиболее сильная связь выявлена с прибылью до налогообложения ($r = 0.97$), валовой прибылью ($r = 0.93$) и прибылью от продаж ($r = 0.93$), однако эти факторы сильно коррелируют между собой (мультиколлинеарность), что делает их совместное использование некорректным. Поэтому для построения итоговой модели выбраны слабо взаимосвязанные, но экономически значимые производственные факторы: добыча нефти ($r = 0.28$), действующий фонд скважин ($r = 0.21$) и Netback ($r = 0.36$).

На втором этапе построено уравнение множественной регрессии:

$$Y = -0.6447 + 0.00019 \cdot X_{12} + 0.00038 \cdot X_{13} + 0.0068 \cdot X_{14},$$

где:

- Y — рентабельность производственных фондов (в долях единицы);
- X_{12} — добыча нефти на Южно-Приобском месторождении, тыс. т;
- X_{13} — действующий фонд скважин на Южно-Приобском месторождении, ед.;
- X_{14} — Netback на нефть, тыс. руб./т.

Коэффициент множественной корреляции $R = 0.985$ свидетельствует о высокой тесноте связи. Коэффициент детерминации $R^2 = 0.971$ показывает, что 97,1% вариации рентабельности объясняется включёнными факторами. Скорректированный $R^2 = 0.913$ подтверждает состоятельность модели при малом объёме выборки.

Экономическая интерпретация коэффициентов:

- увеличение добычи на 1 тыс. т приводит к росту рентабельности на 0,00019 пункта (0,019 процентного пункта);
- увеличение фонда скважин на 1 ед. повышает рентабельность на 0,00038 пункта (0,038 п.п.);
- рост Netback на 1 тыс. руб./т увеличивает рентабельность на 0,0068 пункта (0,68 п.п.).

Прогнозные расчёты на 2024–2026 годы, выполненные на основе экстраполяции трендов факторов, показали плавный рост рентабельности: 21,0% в 2024 г., 24,2% в 2025 г., 27,5% в 2026 г. (расчётные значения). Это согласуется с общей динамикой показателя и стратегией компании по повышению эффективности.

4. Заключение

Построенная многофакторная регрессионная модель адекватно описывает зависимость рентабельности производственных фондов от ключевых производственных параметров для ООО «Газпромнефть-Хантос». Несмотря на ограниченный объём выборки, модель обладает высокой объясняющей способностью и может быть использована для оперативного прогнозирования и поддержки управленческих решений.

Полученные результаты подтверждают, что инвестиции в развитие фонда скважин и повышение эффективности добычи являются наиболее значимыми рычагами роста рентабельности. Дальнейшие исследования могут быть направлены на расширение набора факторов (цены на нефть, макроэкономические показатели) и применение нелинейных моделей.

Литература

1. Кремер Н.Ш., Путко Б.А. Эконометрика: учебник для вузов. Москва: ЮНИТИ-ДАНА, 2019. 311 с.
2. Орлова И.В., Половников В.А. Экономико-математическое моделирование: учебное пособие. Москва: Вузовский учебник, 2020. 288 с.
3. Статистическая отчётность ООО «Газпромнефть-Хантос» за 2019-2023 гг. (бухгалтерский баланс, отчёт о финансовых результатах).

MSC 62J05

Construction of a Regression Model of Return on Production Assets of an Oil-Producing Enterprise

A.S. Savinkov¹

St. Petersburg Mining University of Empress Catherine II¹

Abstract: The paper addresses the problem of constructing a multiple linear regression model describing the dependence of return on production assets on key production and economic factors using the example of Gazpromneft-Khantos LLC. Correlation and regression analysis methods were used to solve the problem. The resulting regression equation includes such factors as oil production, the number of active wells and Netback indicator. The coefficient of determination of the model was 0.97, indicating a high explanatory power of the model. An economic interpretation of the obtained coefficients was carried out, and a forecast of profitability for 2024–2026 was constructed. The results can be used for managerial decision-making in the oil and gas industry.

Keywords: return on production assets, regression analysis, oil production, economic-mathematical modeling, multiple regression, forecasting, oil and gas industry.

УДК 519.63

Анализ и оценка математических моделей синтеза медицинских данных

Сайфетдинов С.Ф.¹, Мамедова Т.Ф.¹

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет¹

Аннотация: В исследовании рассматривается проблема дефицита данных в клинической практике и оцениваются методы их искусственного расширения. Сравнение классического алгоритма SMOTE с современными нейросетевыми подходами при работе со сверхмалыми выборками. Тестирование проводилось с использованием строгого протокола валидации (обучение на синтетических данных, тестирование на реальных). Результаты показывают, что табличные автокодировщики наиболее точно воспроизводят внутреннюю структуру медицинских данных, тогда как SMOTE максимизирует точность прогнозов, но может искажать исходное распределение.

Ключевые слова: обогащение данных, генеративно-состязательные сети, малые выборки, машинное обучение, синтез данных.

1. Введение

Применение машинного обучения в медицине часто сталкивается с серьезным ограничением: острой нехваткой данных для обучения моделей. На практике исследователи нередко имеют дело со сверхмалыми выборками, где количество наблюдений может быть менее 50. В таких условиях классические алгоритмы неизбежно переобучаются, запоминая данные конкретных пациентов вместо поиска общих закономерностей.

Для решения этой проблемы применяются методы искусственного увеличения данных. Исторически стандартом здесь выступает алгоритм SMOTE, который создает новые примеры путем линейной интерполяции. Однако в медицинском контексте такой прямолинейный подход может генерировать физиологически невозможные показатели. Логичной альтернативой становятся современные архитектуры глубокого обучения — табличные вариационные автокодировщики и состязательные сети [1, 2], способные улавливать более сложные, скрытые взаимосвязи между признаками.

2. Методология и результаты исследования

С целью определения преимуществ того или иного подхода для анализа медицинских данных, мы провели сравнительный анализ. В качестве тестовой базы использовались клинические показатели пациентов.

Для получения максимально объективных результатов оценка моделей проводилась по строгому протоколу тестирования. Мы применили подход, при котором прогностическая модель обучается исключительно на синтезированных данных, а проверяется на реальных (схема TSTR). Для исключения утечки информации этот процесс был встроен в алгоритм перекрестной проверки с исключением по одному (LOOCV).

Проведенные эксперименты выявили следующую закономерность. Алгоритм SMOTE

продемонстрировал самую высокую предсказательную силу при классификации. С другой стороны, модель TVAE оказалась значительно эффективнее в сохранении оригинальной структуры и связей между клиническими признаками. Что касается CTGAN, то на столь малом объеме данных этот метод оказался наименее стабильным из-за того, что его внутренние механизмы слишком быстро переобучались.

Таким образом, выбор метода зависит от конечной цели. Если критически важно сохранить естественную структуру и взаимосвязи клинических данных, следует отдать предпочтение TVAE. Если же главной задачей является максимальная точность классификации, целесообразно использовать SMOTE, осознавая при этом риски появления аномальных синтетических примеров.

Литература

1. Xu L. et al. Modeling Tabular Data using Conditional GAN // NeurIPS. 2019.
2. Yadav P. et al. Rigorous Experimental Analysis of Tabular Data Generated using TVAE and CTGAN // IJACSA. 2024.

MSC 62R07

Analysis and evaluation of mathematical models for medical data synthesis

S.F. Saifetdinov¹, T.F. Mamedova¹

National Research Mordovia State University¹

Abstract: This study addresses the issue of data scarcity in clinical practice and evaluates methods for their artificial expansion. A comparison of the classic SMOTE algorithm with modern neural network approaches is conducted when working with ultra-small samples. Testing was conducted using a strict validation protocol (training on synthetic data, testing on real data). The results show that tabular autoencoders most accurately reproduce the internal structure of medical data, whereas SMOTE maximizes predictive accuracy but may distort the original distribution.

Keywords: data enrichment, generative adversarial networks, small samples, machine learning, data synthesis.

УДК 519.63

SO(n)-расширения линейных квазипериодических систем

А.Н. Сахаров

Нижегородский государственный аграрно-технологический университет им.
Л.Я. Флорентьева

Аннотация: В докладе рассматриваются дифференциальные уравнения на многомерном торе, получающаяся в результате приведения к треугольному виду линейной системы с вещественными квазипериодическими коэффициентами. Формулируя необходимые и достаточные условия структурной устойчивости исходной линейной системы. Эти условия определяются свойствами топологического инварианта потока на торе – вектором вращения.

Ключевые слова: групповые расширения, вектор вращения, треугольные линейные системы.

1. Уравнения на торе

Алгоритм приведения к треугольному виду вещественной линейной квазипериодической системы с помощью SO(n)-расширения подробно описан в [1], общий случай – теорема 5.8 [2]. Здесь рассматривается система

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{x} = A(\varphi)x, \quad \varphi \in \mathbb{T}^m, \quad (1)$$

где φ – угловые координаты на торе $\mathbb{T}^m$, ω – вектор с рационально независимыми компонентами, $A(\varphi)$ – гладкая матрица-функция на торе, симметрическая часть которой диагональна. Пусть $A(\varphi) = S(\varphi) + R(\varphi)$ разложение матрицы $A(\varphi)$ на симметрическую и антисимметрическую части. Уравнения для матрицы $Q \in \text{SO}(n)$, приводящая систему (1) к треугольному виду выглядят так:

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad Q' \dot{Q} = Q' R(\varphi) Q + P'(\varphi, Q) - P(\varphi, Q). \quad (2)$$

Здесь $P(\varphi, Q)$ – верхняя треугольная матрица с нулевой диагональю. Начальные данные (φ_0, Q_0) решения системы (2) определены с точностью до множителя из подгруппы стабильности матрицы Q_0 . Эта подгруппа совпадает с группой $\text{SO}(n-1)$. Из равенства $S^{n-1} = \text{SO}(n)/\text{SO}(n-1)$ следует, что система (2) определяет поток на $\mathbb{T}^m \times S^{n-1}$, который будем называть групповым расширением потока на торе $\mathbb{T}^m$.

Представим систему (2) в координатах (φ, θ) , где $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n-1})$ – обобщенные углы Эйлера. Матрица Q в этих координатах записывается так¹

$$Q = Q(\theta_1)Q(\theta_2) \cdots Q(\theta_{n-1}), \quad Q(\theta_k) = e^{\theta_k J_k}, \quad 0 \leq \theta_1 < 2\pi, \quad 0 \leq \theta_k < \pi, k = 2, \dots, n-1,$$

$$\text{где } J_k = \text{diag}(0, \dots, 0, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 0, \dots, 0).$$

¹Корректность такого представления следует из структуры группы $\text{SO}(n)$, описание которой можно найти, например, в [3], глава IX, § 1.

Теорема 1. В координатах (φ, θ) система (2) может быть представлена в как система на торе $\mathbb{T}^{m+n-1}$

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{\theta} = F(\varphi, \theta), \quad (3)$$

где компоненты вектора $F(\varphi, \theta) = (f_1(\varphi, \theta_1), f_2(\varphi, \theta_1, \theta_2), \dots, f_{n-1}(\varphi, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}))$ имеют одинаковую структуру:

$$f_k(\varphi, \theta_1, \dots, \theta_k) = a_k(\varphi, \theta_1), \dots, \theta_{k-1}) - b_k(\varphi, \theta_1, \dots, \theta_{k-1}) \sin 2\theta_k, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Таким образом, подсистема $m+k$ уравнений системы (3) представляет собой SO(2)-расширение потока на торе, определяемого системой

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{\theta}_1 = f_1(\varphi, \theta_1), \quad \dots \quad \dot{\theta}_{k-1} = f_{k-1}(\varphi, \theta_1, \dots, \theta_{k-1}), \quad (4)$$

то есть является триангуляцией двумерной линейной системы с матрицей коэффициентов

$$\begin{pmatrix} b_k(\varphi, \theta_1, \dots, \theta_{k-1}) & -a_k(\varphi, \theta_1) \\ a_k(\varphi, \theta_1) & -b_k(\varphi, \theta_1, \dots, \theta_{k-1}) \end{pmatrix}.$$

Например, пусть $n = 3$, $A(\varphi) = D(\varphi) + R(\varphi)$, где $D(\varphi) = \text{diag}(d_1(\varphi), d_2(\varphi), d_3(\varphi))$, а

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -r_1(\varphi) & -r_2(\varphi) \\ r_1(\varphi) & 0 & -r_3(\varphi) \\ r_2(\varphi) & r_3(\varphi) & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда система (2) записывается так

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \omega, \\ \dot{\theta}_1 = f_1(\varphi, \theta_1) = r_1(\varphi) - \frac{d_1(\varphi) - d_2(\varphi)}{2} \sin 2\theta_1, \\ \dot{\theta}_2 = f_2(\varphi, \theta_1, \theta_2) = r_4(\varphi) \cos \theta_1 - r_2(\varphi) \sin \theta_1 + \\ + (\cos^2 \theta_1 (d_1(\varphi) - d_2(\varphi)) - d_1(\varphi) + d_3(\varphi)) \frac{\sin 2\theta_2}{2}. \end{cases} \quad (5)$$

Пусть $\theta_k(t, \varphi_0, \theta_{10}, \dots, \theta_{k0})$ – решение k -го уравнения системы (3), тогда система в вариациях относительно переменной θ_k будет линейной

$$\dot{\xi} = -2b_k(\varphi, \theta_1, \dots, \theta_{k-1}) \cos \theta_k(t, \varphi_0, \theta_{10}, \dots, \theta_{k0}) \xi, \quad (6)$$

что позволяет эффективно вычислять показатель Ляпунова этого решения.

2. Вектор вращения

Геометрический вектор вращения для системы (3) это вектор (ω, ρ) , где вектор ρ – вектор вращения слоя $\mathbb{T}^{n-1}$ определяется так

$$\rho(\varphi, \theta) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^t F(\varphi + \omega s, \theta(s, \varphi, \theta)) ds, \quad (7)$$

где $(\varphi + \omega t, \theta(t, \varphi, \theta))$ – решение (3). Небольшая модификация конструкции из [1] позволяет доказать следующее утверждение.

Теорема 2. Предел (7) существует и не зависит от выбора начальных значений (φ, θ) .

Согласно теории асимптотических циклов С. Шварцмана [4] число рационально независимых компонент вектора вращения не превышает $m + \ell$, где ℓ – размерность максимальной торической подалгебры алгебры Ли группы $SO(n)$. На рис. 1 показаны графики компонент вектора вращения слоя в зависимости от параметра системы вида (5). Далее обсуждаются вопросы нормальной гиперболичности системы (1), вследствие чего приходится рассматривать зависимость поведения групповых расширений от параметра. Предполагается, что поток на торе $\mathbb{T}^m$ не варьируется.

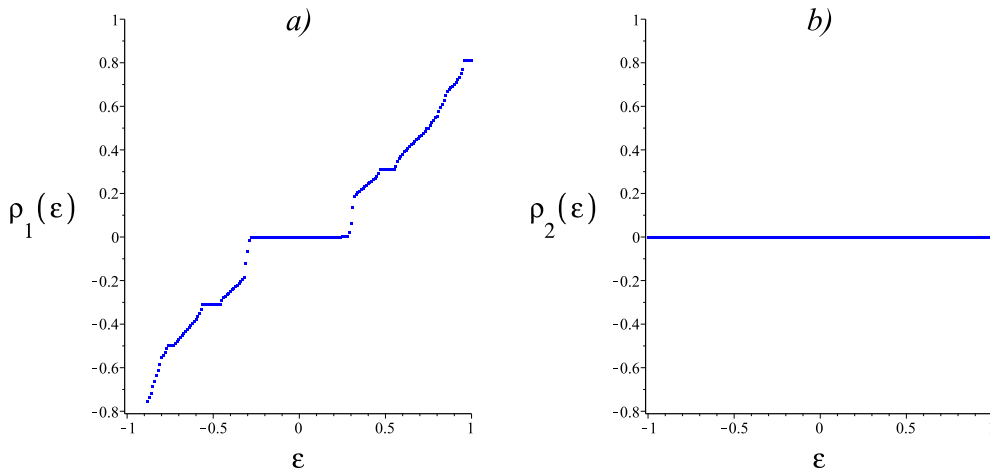


Рис. 1. Компоненты вектора вращения слоя системы вида (5): а) число вращения слоя 2-го уравнения системы, б) число вращения слоя 3-го уравнения системы.

3. Условия гиперболичности

На графике зависимости от параметра компонент вектора вращения слоя наблюдаются интервалы постоянства компонент этого вектора. Они играют существенную роль в описании гиперболической структуры системы (3).

Теорема 3. Рассмотрим подсистему

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{\theta}_1 = f_1(\varphi, \theta_1), \quad \dots \quad \dot{\theta}_k = f_k(\varphi, \theta_1, \dots, \theta_k) \quad (8)$$

подсистемы (3). Если компонента вектора вращения ρ_k принадлежит интервалу постоянства, то показатели Ляпунова система в вариациях (6) отличны от нуля.

Доказательство существенно опирается на то, что (как было отмечено выше) система (8) является групповым расширением линейной двумерной системы и следующим фактом: инвариантное многообразие сохраняется при возмущениях тогда и только тогда, когда оно нормально гиперболично [5]. Заметим, что если ρ_k принадлежит интервалу постоянства, то оно соизмеримо с предыдущими компонентами вектора вращения. Если все предыдущие компоненты вектора вращения рационально независимы, то теорема 3 работает при условии, что все решения системы (4) квазипериодические с $m + k - 1$ рационально независимыми частотами.

Литература

1. Сахаров А.Н. Множества вращения $SO(3)$ -расширений квазипериодических потоков // Журнал СВМО. 2025. Т. 27, № 2. С. 171-184.
2. Бронштейн И.У. Неавтономные динамические системы. Кишинев: Штиинца, 1984. 290 с.
3. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представления групп. Москва: Наука, 1965. 588 с.
4. Schwartzman S. Asymptotic cycles // Ann. of Math. 1957. Vol. 66. P. 270-284.
5. Mané R. Persistent manifolds are normally hyperbolic // Trans. Amer. Math. Soc. 1978. Vol. 246. P. 261-283.

MSC 34D20

SO(n)-extensions of linear quasiperiodic systems

A.N. Sakharov

Nizhny Novgorod State Agrarian and Technological University named after
L.Ya. Florentyev

Abstract: This paper examines differential equations on a multidimensional torus, resulting from the reduction of a linear system with real quasiperiodic coefficients to triangular form. Necessary and sufficient conditions for the structural stability of the original linear system are formulated. These conditions are determined by the properties of a topological invariant of the flow on the torus – the rotation vector.

Keywords: group extensions, rotation vector, triangular linear systems.

УДК 519.63

Реализация параллельного алгоритма на основе технологии CUDA для численного исследования дозвуковых химически активных сред

Сидорова А.В.¹, Шишлонов А.А.¹

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет¹

Аннотация: Работа посвящена разработке параллельного вычислительного алгоритма на основе технологии CUDA для численного исследования трёхмерных дозвуковых течений многокомпонентной вязкой теплопроводящей газовой смеси в цилиндрическом канале с учётом многокомпонентной диффузии. За основу взяты математическая модель и последовательный численный алгоритм, ранее разработанные для исследования подобных течений. Приведено описание реализации ключевых этапов алгоритма средствами CUDA: организации памяти, вычислительных ядер, параллельного вычисления потоков и параллельной редукции. Проведено сравнение времени счёта последовательной, MPI-реализации и CUDA-реализации на сетках различной размерности, показавшее ускорение CUDA-версии до 46 раз относительно последовательной программы.

Ключевые слова: математическое моделирование, дозвуковые течения, многокомпонентная среда, уравнения Навье–Стокса, технология CUDA, параллельные вычисления.

1. Введение

Численное моделирование дозвуковых течений многокомпонентных смесей широко применяется при проектировании трубчатых реакторов, теплообменников и других технологических устройств. Математические модели подобных процессов основаны на системе уравнений Навье–Стокса с учётом вязкости, теплопроводности и многокомпонентной диффузии, что приводит к высокой вычислительной сложности задачи. Последовательная реализация численных алгоритмов на CPU требует значительных расчётных времён даже для сеток умеренного размера, а использование технологии MPI, хотя и позволяет ускорить вычисления, не всегда обеспечивает время счёта, приемлемое для проведения серийных расчётов. В связи с этим актуальной является разработка параллельного алгоритма с использованием графических процессоров на основе технологии CUDA, обладающей принципиально иным уровнем производительности для задач с регулярной структурой данных.

Целью работы является разработка параллельного вычислительного алгоритма на основе технологии CUDA для численного исследования дозвуковых многокомпонентных вязких газовых потоков с учётом многокомпонентной диффузии, вязкости и теплопроводности в трёхмерной цилиндрической постановке.

2. Математическая модель и численный алгоритм

За основу настоящей работы взяты математическая модель и последовательный вычислительный алгоритм, разработанные и реализованные в работах [1–3]

для исследования дозвуковых вязких многокомпонентных газовых течений. Модель описывает трёхмерное течение вязкой теплопроводящей газовой смеси в приближении малых чисел Маха в цилиндрической системе координат (z, r, φ) и представляет собой систему уравнений Навье–Стокса, записанную относительно массовых долей компонент, компонент импульса и энтальпии смеси, с учётом конвективных и диффузионно-вязкостных потоков, а также источников членов, обусловленных цилиндрической геометрией. Диффузионный перенос компонент и перенос тепла рассчитываются с использованием средних по смеси коэффициентов диффузии и теплопроводности, зависящих от температуры и состава смеси.

Численное решение строится по схеме расщепления по физическим процессам с использованием явной конечно-разностной схемы. На каждом временном шаге последовательно выполняются: задание граничных условий; вычисление конвективных потоков (по схеме Русанова) и диффузионно-вязких потоков (центральными разностями второго порядка); обновление консервативных переменных; коррекция динамической составляющей давления путём решения уравнения Пуассона итерационным методом Якоби; коррекция скоростей и определение температуры итерационным методом Ньютона.

3. Реализация параллельного алгоритма средствами CUDA

Разработанный параллельный алгоритм реализует описанную выше вычислительную схему средствами технологии CUDA. Расчётная область покрывается равномерной сеткой размерностью $320 \times 16 \times 10$ ячеек, при этом каждая ячейка обрабатывается отдельным потоком GPU, что соответствует структуре конечно-разностных схем на регулярных сетках.

Основные этапы реализации включают: выделение и обнуление буферов видеопамяти под все газодинамические поля и потоковые массивы на этапе инициализации, что исключает повторные затраты на выделение памяти на каждом временном шаге; разработку макросов линейного индексирования трёхмерных и четырёхмерных массивов; реализацию граничных условий в виде отдельных последовательно вызываемых ядер; параллельное вычисление конвективных, диффузионных и вязких потоков через грани ячеек по трём направлениям (X, Y, Z) с использованием отдельных потоков (streams) CUDA, позволяющее выполнять вычисления по разным направлениям асинхронно на GPU; обновление консервативных переменных и температуры на новом временном слое; параллельную редукцию для определения максимальной невязки давления, используемой в качестве критерия сходимости итерационного метода Якоби.

При проектировании алгоритма учитывались особенности архитектуры GPU: обеспечение объединённого доступа к глобальной памяти соседними потоками одного варпа, минимизация ветвлений внутри варпа и использование разделяемой памяти в операциях редукции.

4. Результаты расчётов

Верификация параллельной реализации проведена путём сопоставления результатов расчёта течения чистого этана в цилиндрическом канале длиной 0.32 м и радиусом 0.01 м при начальной температуре 1073 К и атмосферном давлении, полученных с использованием последовательной программы и параллельной CUDA-реализации. Поля плотности, давления и температуры полностью совпали для обеих реализаций

и для сеток различной размерности, что подтверждает корректность параллельного алгоритма.

Сравнение времени счёта последовательной, MPI-реализации и CUDA-реализации на процессоре Intel Core i7-9700K и видеокарте NVIDIA RTX 2070 Super приведено в таблице 1.

Таблица 1. Сравнение времени счёта различных реализаций

Размерность сетки (количество ячеек)	CUDA, с	MPI (10 процес- сов), с	Последовательный алгоритм, с
6400	0.17	0.37	3.07
51200	0.51	2.50	23.66

На сетке 6 400 ячеек ускорение CUDA-реализации относительно последовательной составило 18.3 раза, MPI-реализации — 8.3 раза. На сетке 51 200 ячеек ускорение достигло 46.2 и 9.5 раза соответственно, а сравнение CUDA с MPI на 10 процессах на крупной сетке дало ускорение около 4.9 раза. Таким образом, с увеличением размера расчётной сетки эффективность CUDA-реализации возрастает существенно, чем эффективность MPI-реализации, что объясняется большим числом одновременно работающих вычислительных ядер GPU и их более полной загрузкой при увеличении объёма данных.

Литература

1. Peskova E. E., Snytnikov V. N., Zhalnin R. V. The computational algorithm for studying internal laminar flows of a multicomponent gas with different-scale chemical processes // Computer Research and Modeling. 2023. № 15(5). P. 1169–1187.
2. Peskova E. E., Yazovtseva O. S., Makarova E. Yu., Tingaeva N. A. Parallel implementation of a computational algorithm based on the explicit iterative scheme for modeling subsonic reacting gas flows // Communications in Computer and Information Science. 2023. P. 112–121.
3. Мустайкин М. С., Пескова Е. Е. Параллельный алгоритм для численного исследования дозвуковых реагирующих течений в цилиндрической системе координат // Параллельные вычислительные технологии: труды XIX Международной научной конференции. 2025. С. 212–215.

MSC 65Y05

Implementation of a parallel algorithm based on CUDA technology for the numerical study of subsonic chemically active media

A.V. Sidorova¹, A.A. Shishlonov¹

National Research Mordovia State University¹

Abstract: The paper is devoted to the development of a parallel computational algorithm based on CUDA technology for the numerical study of three-dimensional subsonic flows of a multicomponent viscous heat-conducting gas mixture in a cylindrical channel, taking into account multicomponent diffusion. The mathematical model and the sequential numerical algorithm previously developed for the study of such flows are taken as a basis. A description of the implementation of the key stages of the algorithm using CUDA is presented: memory organization, computational kernels, parallel computation of fluxes, and parallel reduction. A comparison of the computation time of the sequential, MPI-based, and CUDA-based implementations on grids of various sizes is performed, showing a speedup of the CUDA version of up to 46 times relative to the sequential program.

Keywords: mathematical modeling, subsonic flows, multicomponent medium, Navier–Stokes equations, CUDA technology, parallel computing.

УДК 519.83:519.688

Численная реализация кооперативно-игрового алгоритма построения устойчивых коалиционных структур на основе матрицы попарного сходства

Соловьева А.К.¹

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана¹

Аннотация: В работе рассматривается задача построения коалиционной структуры на конечном множестве объектов, заданных матрицей попарного сходства. Предлагаемый подход дополняет классическую кластеризацию учетом индивидуальных стимулов игроков к изменению коалиционной принадлежности. На основе центрированной матрицы сходства задается парно-аддитивная характеристическая функция кооперативной игры. Для значения Ауманна–Дрезе и правила Equal Surplus получены индивидуальные выигрыши и критерии выгоды одностороннего перехода. Описана численная процедура, последовательно модифицирующая начальное разбиение до состояния без выгодных индивидуальных отклонений.

Ключевые слова: кооперативная игра, коалиционная структура, матрица попарного сходства, индивидуальная устойчивость, значение Ауманна–Дрезе, Equal Surplus, численный алгоритм.

1. Постановка задачи

Пусть задано конечное множество объектов $N = \{1, 2, \dots, n\}$, интерпретируемых как игроки, и симметричная матрица попарного сходства

$$S = (s_{ij})_{i,j=1}^n, \quad s_{ij} \in [0, 1], \quad s_{ij} = s_{ji}, \quad s_{ii} = 1.$$

Элемент s_{ij} характеризует близость объектов i и j . В классической постановке кластеризации по такой матрице строится разбиение множества N на группы. Однако в ряде задач группы целесообразно трактовать как коалиции игроков, каждый из которых может быть заинтересован в переходе в другую группу. Такая постановка близка к моделям гедонических коалиций, где устойчивость разбиения определяется через индивидуальные предпочтения участников [1].

Цель работы состоит в построении численной процедуры формирования такой коалиционной структуры, в которой отсутствуют выгодные односторонние переходы игроков. Тем самым качество результата определяется с учетом внутригруппового сходства и индивидуальной устойчивости полученного разбиения.

2. Кооперативно-игровая модель

Для перехода от матрицы сходства к кооперативной игре введем базовый уровень сходства и центрированные веса:

$$\mu = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} s_{ij}, \quad a_{ij} = s_{ij} - \mu \quad (i \neq j), \quad a_{ii} = 0.$$

Центрирование позволяет учитывать отклонение попарного сходства от среднего уровня и уменьшает систематическое предпочтение крупных коалиций.

Коалиционная ценность задается парно-аддитивной характеристической функцией

$$v(C) = \sum_{\substack{i < j \\ i, j \in C}} a_{ij}, \quad C \subseteq N,$$

где $v(\emptyset) = 0$ и $v(\{i\}) = 0$. Таким образом, ценность коалиции определяется суммой центрированных попарных вкладов между ее участниками. Коалиционная структура представляет собой разбиение

$$\pi = \{C_1, \dots, C_K\}, \quad C_k \cap C_l = \emptyset \ (k \neq l), \quad \bigcup_{k=1}^K C_k = N.$$

Через $C(i)$ обозначим коалицию, содержащую игрока i .

Для перехода от $v(C)$ к индивидуальным выигрышам рассматриваются два правила распределения. Значение Ауманна–Дрезе представляет собой значение Шепли, вычисляемое отдельно внутри каждой коалиции структуры [2, 3]. Для выбранной парно-аддитивной функции

$$u_i^{AD}(\pi) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{j \in C(i) \\ j \neq i}} a_{ij}.$$

При правиле Equal Surplus, поскольку $v(\{i\}) = 0$, индивидуальный выигрыш равен

$$u_i^{ES}(\pi) = \frac{v(C(i))}{|C(i)|}.$$

Таким образом, значение Ауманна–Дрезе учитывает локальные связи игрока, а Equal Surplus распределяет ценность коалиции поровну.

3. Критерии выгодных переходов и численный алгоритм

Рассмотрим односторонний переход игрока i из текущей коалиции $C(i)$ в другую коалицию $D \in \pi$, $D \neq C(i)$, либо образование одноэлементной коалиции. Переход называется выгодным, если индивидуальный выигрыш игрока после перехода строго больше его текущего выигрыша.

Для значения Ауманна–Дрезе переход игрока i в коалицию D выгоден тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j \in D} a_{ij} > \sum_{\substack{j \in C(i) \\ j \neq i}} a_{ij}.$$

Уход в одноэлементную коалицию выгоден, если правая сумма отрицательна.

Для правила Equal Surplus переход игрока i в коалицию D выгоден тогда и только тогда, когда

$$\frac{v(D) + \sum_{j \in D} a_{ij}}{|D| + 1} > \frac{v(C(i))}{|C(i)|}.$$

Уход в одноэлементную коалицию выгоден при $v(C(i)) < 0$.

На основе этих критериев строится итеративный алгоритм односторонних улучшений. Начальное разбиение $\pi^{(0)}$ может быть получено любым алгоритмом кластеризации по матрице сходства; в вычислительных экспериментах использовался подход, связанный с Density-Restricted Agglomerative Clustering [4]. Далее на каждом шаге для всех игроков и всех допустимых направлений перехода вычисляется приращение индивидуального выигрыша. Если существует хотя бы один выгодный переход, выбирается переход с максимальным положительным приращением; после этого коалиционная структура обновляется. Процесс останавливается, когда выгодных переходов не остается.

Полученная структура является индивидуально устойчивой: ни один игрок не может строго увеличить свой выигрыш односторонним переходом. Для значения Ауманна–Дрезе динамика согласована с функционалом

$$V(\pi) = \sum_{C \in \pi} v(C),$$

поэтому каждый выгодный переход увеличивает суммарную ценность структуры, что при конечном числе разбиений обеспечивает сходимость процедуры. Для правила Equal Surplus такая потенциальная структура в общем случае не гарантируется.

4. Вычислительная интерпретация и выводы

Предложенный алгоритм предназначен для задач группировки объектов со сложным признаковым описанием, в которых результат должен допускать коалиционную интерпретацию и быть устойчивым относительно индивидуальных отклонений. В прикладной части вычислительная реализация была апробирована на данных о клинических исследованиях фармацевтических компаний; матрица сходства строилась по профилям исследовательской активности организаций.

Численная реализация позволяет сравнивать начальную и итоговую коалиционные структуры, число выполненных переходов и факт достижения устойчивого состояния. Вычислительные эксперименты показывают, что выбор правила распределения коалиционной ценности влияет на индивидуальные выигрыши игроков и итоговую конфигурацию коалиций: значение Ауманна–Дрезе учитывает локальные связи игрока с участниками его коалиции, а Equal Surplus оценивает положение игрока через среднюю ценность всей группы.

Разработанная вычислительная реализация зарегистрирована в Федеральной службе по интеллектуальной собственности как программа для ЭВМ: свидетельство № 2026663391 от 6 мая 2026 г. Исходный код размещен в репозитории GitHub [5].

Итогом работы является численный алгоритм, преобразующий исходное разбиение в коалиционную структуру, устойчивую относительно индивидуальных отклонений.

Литература

1. Bogomolnaia A., Jackson M.O. The Stability of Hedonic Coalition Structures // Games and Economic Behavior. 2002. Vol. 38, No. 2. P. 201-230.
2. Shapley L.S. A Value for n-Person Games // Contributions to the Theory of Games II / ed. by H.W. Kuhn, A.W. Tucker. Princeton: Princeton University Press, 1953. P. 307-317.

3. Aumann R.J., Dreze J.H. Cooperative Games with Coalition Structures // International Journal of Game Theory. 1974. Vol. 3. P. 217-237.
4. Dhamal S., Bhat S., Anoop K.R., Embar V.R. Pattern Clustering Using Cooperative Game Theory. arXiv:1201.0461, 2012. URL: <https://arxiv.org/abs/1201.0461>.
5. Соловьева А.К. Кооперативная игровая модель формирования устойчивых коалиционных структур на основе матрицы попарного сходства: репозиторий исходного кода. GitHub, 2026. URL: https://github.com/Unsoc1able/coop_theory_diploma/tree/main.

MSC 91A12, 62H30, 68W40

Numerical implementation of a cooperative game algorithm for constructing stable coalition structures based on a pairwise similarity matrix

A.K. Solovyeva¹

Bauman Moscow State Technical University¹

Abstract: The paper considers the construction of a coalition structure on a finite set of objects represented by a pairwise similarity matrix. The proposed approach extends classical clustering by taking into account individual incentives of players to change their coalition membership. A centered pairwise-additive characteristic function of a cooperative game is defined using the similarity matrix. For the Aumann–Dreze value and the Equal Surplus rule, individual payoffs and criteria for profitable unilateral deviations are obtained. A numerical procedure is described that sequentially modifies an initial partition until no profitable individual deviations remain.

Keywords: cooperative game, coalition structure, pairwise similarity matrix, individual stability, Aumann–Dreze value, Equal Surplus, numerical algorithm.

УДК 519.63

Численное исследование динамики упругого элемента проточного канала

Тамарова Ю.А.¹

Ульяновский государственный технический университет¹

Аннотация: Исследуется динамика упругого элемента стенки канала при протекании в канале сжимаемого потока газа или жидкости. Предложен численный метод решения задачи на основе метода конечных разностей. Используется неявно-явная разностная схема второго порядка аппроксимации по времени и пространству, в которой линейное уравнение динамики упругого элемента аппроксимируется неявно, а волновое уравнение для потенциала скорости – явно.

Ключевые слова: аэрогидроупругость, метод конечных разностей, динамика.

1. Постановка задачи

Рассматривается плоское течение дозвукового сжимаемого потока газа (жидкости) в прямоугольной области $J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < x_0, \quad 0 < y < y_0\}$ при $t \geq 0$. Скорость невозмущенного однородного потока равна V и направлена вдоль оси Ox . Упругим элементом является часть стенки $y = y_0$ при $x \in [b, c]$, $0 < b < c < x_0$. Обозначим: $w(x, t)$ — деформация упругого элемента; $\varphi(x, y, t)$ — потенциал скорости возмущенного потока.

Математическая модель рассматриваемого вибрационного устройства включает уравнение для потенциала скорости, уравнение колебаний пластины с учетом демпфирования и продольной силы, а также условия сопряжения на границе раздела сред.

Для сжимаемых течений потенциал скорости удовлетворяет уравнению:

$$\varphi_{tt} + 2V\varphi_{xt} + V^2\varphi_{xx} = a^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}), \quad (x, y) \in J, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где a — скорость звука.

Динамика упругого элемента описывается линейным уравнением:

$$Dw''''(x, t) + \beta_2 \dot{w}'''(x, t) + M\ddot{w}(x, t) + Nw''(x, t) + \\ + \beta_1 \dot{w}(x, t) + \beta_0 w(x, t) = -\rho(\varphi_t(x, y_0, t) + V\varphi_x(x, y_0, t)), \quad x \in (b, c), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

где $D, M, N, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \rho$ — некоторые физические величины.

Условия непротекания на стенках канала:

$$\varphi_y(x, y_0, t) = \dot{w}(x, t) + Vw'(x, t), \quad x \in (b, c), \quad t \geq 0, \quad (3)$$

$$\varphi_y(x, y_0, t) = 0, \quad x \in (0, b) \cup (c, x_0), \quad t \geq 0, \quad (4)$$

$$\varphi_y(x, 0, t) = 0, \quad x \in (0, x_0), \quad t \geq 0. \quad (5)$$

Условия отсутствия возмущений в граничных сечениях канала:

$$\varphi(0, y, t) = 0, \quad \varphi(x_0, y, t) = 0, \quad y \in (0, y_0), \quad t \geq 0. \quad (6)$$

Граничные условия на концах упругого элемента (шарнирное закрепление):

$$w(b, t) = w(c, t) = w''(b, t) = w''(c, t) = 0. \quad (7)$$

Начальные условия:

$$w(x, 0) = f_1(x), \quad \dot{w}(x, 0) = f_2(x), \quad x \in (b, c), \quad (8)$$

$$\varphi(x, y, 0) = \psi_1(x, y), \quad \varphi_t(x, y, 0) = \psi_2(x, y), \quad (x, y) \in J, \quad (9)$$

$f_1(x)$, $f_2(x)$, $\psi_1(x, y)$, $\psi_2(x, y)$ — некоторые заданные функции. Таким образом, имеем связанную начально-краевую задачу (1)-(9) для функций $\varphi(x, y, t)$ и $w(x, t)$.

2. Разностная схема

Учитывая простую геометрию расчетной области (прямоугольный канал), для численного решения задачи (1)-(9) используется метод конечных разностей второго порядка точности [1]. В работе [2] была разработана полностью явная разностная схема для решения данной задачи. Однако использование явной схемы для уравнения динамики упругого элемента накладывает жесткое ограничение на шаг по времени, что обусловлено высокой жесткостью пластины. Предлагается модификация численного метода: уравнение для потенциала скорости аппроксимируется явно, а уравнение динамики пластины аппроксимируется неявно. Это позволяет снять ограничение на шаг по времени, связанное с жесткостью упругого элемента, и повысить вычислительную эффективность метода.

Введем равномерную разностную сетку:

$$\begin{aligned} x_i &= ih_x, \quad i = 0, 1, \dots, N_x, \quad h_x = x_0/N_x, \\ y_j &= jh_y, \quad j = 0, 1, \dots, N_y, \quad h_y = y_0/N_y, \\ t_k &= kh_t, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где N_x , N_y — число интервалов разбиения по x и y соответственно; h_x , h_y — шаги пространственной сетки; h_t — шаг по времени. Упругий элемент расположен на интервале $x \in [b, c]$, которому соответствуют узлы сетки с индексами $i_b = \frac{b}{h_x}$, $\dots$, $i_c = \frac{c}{h_x}$. Граница контакта жидкости и упругого элемента $y = y_0$ соответствует индексу $j = N_y$. Обозначим: $\varphi_{ij}^k \approx \varphi(x_i, y_j, t_k)$, $w_i^k \approx w(x_i, t_k)$.

Для уравнения (1) используем явную схему второго порядка точности. Для внутренних узлов сетки имеем:

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}^{k+1} &= 2\varphi_{ij}^k - \varphi_{ij}^{k-1} - \frac{Vh_t}{2h_x} [(\varphi_{i+1,j}^k - \varphi_{i-1,j}^k) - (\varphi_{i+1,j}^{k-1} - \varphi_{i-1,j}^{k-1})] - \\ &- \frac{V^2h_t^2}{h_x^2} (\varphi_{i+1,j}^k - 2\varphi_{ij}^k + \varphi_{i-1,j}^k) + \frac{a^2h_t^2}{h_x^2} (\varphi_{i+1,j}^k - 2\varphi_{ij}^k + \varphi_{i-1,j}^k) + \\ &+ \frac{a^2h_t^2}{h_y^2} (\varphi_{i,j+1}^k - 2\varphi_{ij}^k + \varphi_{i,j-1}^k). \end{aligned} \quad (10)$$

Для уравнения (2) используем неявную схему. Для узлов упругого элемента $i \in (i_b + 2, i_c - 2)$ значения w_i^{k+1} находятся из решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \gamma w_{i-2}^{k+1} + \left(-4\gamma + \frac{N}{h_x^2}\right) w_{i-1}^{k+1} + \left(6\gamma + \frac{M}{h_t^2} + \frac{\beta_1}{h_t} + \beta_0 - \frac{2N}{h_x^2}\right) w_i^{k+1} + \\ + \left(-4\gamma + \frac{N}{h_x^2}\right) w_{i+1}^{k+1} + \gamma w_{i+2}^{k+1} = R_i, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$R_i = -\rho \left(\frac{\varphi_{i,N_y}^{k+1} - \varphi_{i,N_y}^k}{h_t} + V \frac{\varphi_{i+1,N_y}^{k+1} - \varphi_{i-1,N_y}^{k+1}}{2h_x} \right) + \frac{\beta_2}{h_t h_x^4} \Lambda_i^k + \frac{M}{h_t^2} (2w_i^k - w_i^{k-1}) + \frac{\beta_1}{h_t} w_i^k,$$

$$\Lambda_i^k = w_{i+2}^k - 4w_{i+1}^k + 6w_i^k - 4w_{i-1}^k + w_{i-2}^k, \quad \gamma = \frac{D + \beta_2 h_t}{h_x^4}.$$

Из условий (3)-(6) получим:

$$\varphi_{i,N_y+1}^k = \varphi_{i,N_y-1}^k + 2h_y \left(\frac{w_i^{k+1} - w_i^k}{h_t} + V \frac{w_{i+1}^k - w_{i-1}^k}{2h_x} \right), \quad i = i_b, \dots, i_c; \quad (12)$$

$$\varphi_{i,N_y+1}^k = \varphi_{i,N_y-1}^k, \quad i = 0, \dots, i_b - 1, \quad i = i_c + 1, \dots, N_x; \quad (13)$$

$$\varphi_{i,-1}^k = \varphi_{i,1}^k, \quad i = 0, 1, \dots, N_x; \quad \varphi_{0,j}^k = 0, \varphi_{N_x,j}^k = 0, \quad j = 0, 1, \dots, N_y.$$

Из граничных условий (7) получим

$$w_{i_b}^k = 0, \quad w_{i_c}^k = 0, \quad w_{i_b-1}^k = -w_{i_b+1}^k, \quad w_{i_b-2}^k = -w_{i_b+2}^k. \quad (14)$$

Начальные условия (8)-(9) примут вид

$$w_i^0 = f_1(x_i) \text{ при } i \in (i_b, i_c), \quad w_i^0 = 0 \text{ при } i \in (0, i_b) \cup (i_c, n);$$

$$\frac{w_i^1 - w_i^0}{h_t} = f_2(x_i) \text{ при } i \in (i_b, i_c), \quad w_i^0 = w_i^1 \text{ при } i \in (0, i_b) \cup (i_c, n); \quad (15)$$

$$\varphi_{ij}^0 = \psi_1(x_i, y_j);$$

$$\frac{\varphi_{ij}^1 - \varphi_{ij}^0}{h_t} = \psi_2(x_i, y_j) \Rightarrow \varphi_{ij}^1 = \psi_1(x_i, y_j) + h_t \psi_2(x_i, y_j).$$

Получены условия устойчивости разностных схем (10),(11), которые были учтены в расчетах при выборе шага по времени h_t . Численные расчеты выполнены с использованием программы, разработанной на языке Python. На каждом временном шаге необходимо решать систему линейных уравнений (11) с пятидиагональной матрицей. Для решения применяется LU-разложение для разреженных ленточных матриц, реализованное в библиотеке SciPy [3] (алгоритм SuperLU).

3. Примеры расчетов

Разработанная программа позволяет получать графики зависимостей функции прогиба $w(x, t)$ при варьировании параметров задачи: скорости потока V , продольной силы N , коэффициентов демпфирования β_1, β_2 , толщины пластины h . На рисунках 1,2 представлены примеры расчетов для механической системы с параметрами: поток – воздух ($\rho = 1.2$), $V = 5$, $a = 343$; упругий элемент (пластина) изготовлен из алюминия: $M = 13.5$, $D = 808.5$, $\beta_0 = 2$, $\beta_1 = 0.5$, $\beta_2 = 0.2$; $x_0 = 5$, $y_0 = 0.1$, $b = 2$, $c = 3$. Все значения приведены в системе СИ. При реализации расчетов было введено разбиение: $N_x = 30$, $N_y = 20$; конечный момент времени $T = 3$ с. Начальные условия выбираются в согласованной форме [2]:

$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = \sin \left(\frac{\pi(x-b)}{c-b} \right), \quad x \in [b, c],$$

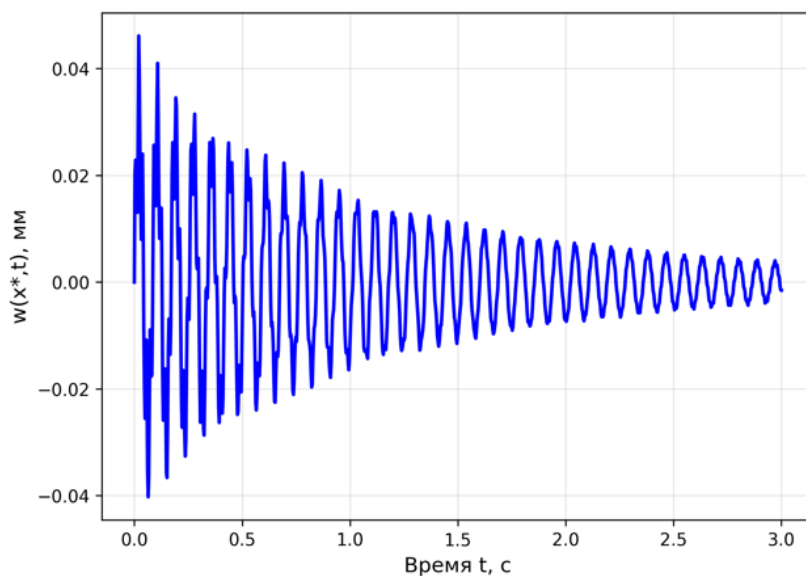


Рис. 1. Колебания точки $x^* = \frac{b+c}{2}$ при $N = 1000$.

$$\psi_1(x, y) = \begin{cases} 0, & x \in (0, b) \cup (c, x_0), \\ \frac{y^2}{2y_0} \sin\left(\pi \frac{x-b}{c-b}\right), & x \in [b, c]. \end{cases} \quad (18)$$

Функция $\psi_2(x, y)$ определяется из условия согласования начальных данных с уравнением динамики пластины и условием непротекания при $t = 0$ и представляет собой кусочно-аналитическую функцию [2].

4. Заключение

Предложена конечно-разностная схема второго порядка точности для численного решения задачи динамического взаимодействия упругого элемента с потоком сжимаемой жидкости (газа) в прямоугольном канале. Построены решения в зависимости от разного задания значений продольного усилия. Разработанный метод может быть использован для анализа динамической устойчивости тонкостенных конструкций, взаимодействующих с потоком.

Литература

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. Москва: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1977. 657 с.
2. Анкилов А.В., Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А. Исследование динамики и устойчивости упругого элемента проточного канала // Журнал Средневолжского математического общества. 2016. Т. 18, № 1. С. 94-107.
3. Нуньес-Иглесиас Х., Уолт ван дер Ш., Дэшноу Х. Элегантный Scipy. Москва: ДМК Пресс, 2018. 266 с.

MSC 35Q74:65N06

Numerical study of the dynamics of an elastic element of a flow channel

Yu.A. Tamarova¹

Ulyanovsk State Technical University¹

Abstract: The dynamics of an elastic element of a channel wall during a compressible gas or liquid flow is investigated. A numerical solution based on the finite difference method is proposed. A second-order implicit-explicit difference scheme with approximations in time and space is used, in which the linear equation for the elastic element's dynamics is approximated implicitly, and the wave equation for the velocity potential is explicitly approximated.

Keywords: aerohydroelasticity, finite difference method, dynamics.

УДК 539.3:519.6

Исследование бифуркации решения одной задачи аэрогидроупругости

Тамарова Ю.А.¹, Вельмисов П.А.¹

Ульяновский государственный технический университет¹

Аннотация: Предложен численно-аналитический подход к исследованию скачкообразных переходов в аэрогидроупругих системах. На основе метода Галеркина нелинейная краевая задача сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, для которой получено аналитическое условие скачкообразного перехода. Результаты подтверждены численным моделированием в пакете Mathematica.

Ключевые слова: аэрогидроупругость, бифуркация, устойчивость, метод Галеркина.

1. Постановка задачи

Рассматривается плоское течение идеальной несжимаемой жидкости в прямоугольной области $J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < x_0, \quad 0 < y < y_0\}$ при $t \geq 0$. Скорость невозмущенного однородного потока равна V и направлена вдоль оси Ox . Упругим элементом является часть стенки $y = y_0$ при $x \in [b, c]$, $0 < b < c < x_0$. Введем обозначения: $u(x, t)$ и $w(x, t)$ — деформации элемента в направлении осей Ox (продольная составляющая) и Oy (поперечная составляющая) соответственно; $\varphi(x, y, t)$ — потенциал скорости возмущенного потока.

Математическая модель содержит следующие уравнения и условия [1]:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad (x, y) \in J, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$\varphi_y(x, y_0, t) = \dot{w}(x, t) + Vw'(x, t), \quad x \in (b, c), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$$\varphi_y(x, y_0, t) = 0, \quad x \in (0, b] \cup [c, x_0), \quad t \geq 0, \quad (3)$$

$$\varphi_y(x, 0, t) = 0, \quad x \in (0, x_0), \quad t \geq 0, \quad (4)$$

$$\varphi(0, y, t) = 0, \quad \varphi(x_0, y, t) = 0, \quad y \in (0, y_0), \quad t \geq 0, \quad (5)$$

$$\begin{cases} -EF \left(u'(x, t) + \frac{1}{2}w'^2(x, t) \right)' + M\ddot{u}(x, t) + \beta_0^*u(x, t) + \beta_1^*\dot{u}(x, t) + \beta_2^*\ddot{u}(x, t) = 0, \\ -EF \left[w'(x, t) \left(u'(x, t) + \frac{1}{2}w'^2(x, t) \right) \right]' + M\ddot{w}(x, t) + Dw''''(x, t) + \\ + Nw''(x, t) + \beta_0w(x, t) + \beta_1\dot{w}(x, t) + \beta_2\ddot{w}(x, t) = \\ = -\rho(\varphi_t(x, y_0, t) + V\varphi_x(x, y_0, t)), \quad x \in (b, c), \quad t \geq 0, \end{cases} \quad (6)$$

$$w(x, t) = w''(x, t) = u(x, t) = 0 \quad \text{при } x = b \text{ и } x = c, \quad (7)$$

$$w(x, 0) = f_1(x), \quad \dot{w}(x, 0) = f_2(x), \quad u(x, 0) = g_1(x), \quad \dot{u}(x, 0) = g_2(x), \quad x \in (b, c), \quad (8)$$

где $E, F, M, D, N, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_0^*, \beta_1^*, \beta_2^*, \rho$ — некоторые физические величины; $f_1(x), f_2(x), g_1(x), g_2(x)$ — некоторые заданные функции.

Представим потенциал скорости $\varphi(x, y, t)$ в виде

$$\varphi(x, y, t) = \sum_{i=1}^s \varphi_i(t) (e^{\lambda_i y} + e^{-\lambda_i y}) \sin \lambda_i x, \quad \lambda_i = \frac{i\pi}{x_0}.$$

Тогда решение задачи (1)–(8) сводится к исследованию нелинейной системы двух интегро-дифференциальных уравнений для функций $u(x, t)$ и $w(x, t)$:

$$\left\{ \begin{aligned} & -EF \left(u'(x, t) + \frac{1}{2} w'^2(x, t) \right)' + M\ddot{u}(x, t) + \beta_0^* u(x, t) + \beta_1^* \dot{u}(x, t) + \beta_2^* \ddot{u}(x, t) = 0, \\ & -EF \left[w'(x, t) \left(u'(x, t) + \frac{1}{2} w'^2(x, t) \right) \right]' + M\ddot{w}(x, t) + Dw''''(x, t) + Nw''(x, t) + \\ & \quad + \beta_0 w(x, t) + \beta_1 \dot{w}(x, t) + \beta_2 \ddot{w}(x, t) = \\ & = -\frac{2\rho}{x_0} \sum_{i=1}^s \frac{1}{\lambda_i t h(\lambda_i y_0)} \left(\sin \lambda_i x \int_b^c (\dot{w} + Vw') \sin \lambda_i x dx + \right. \\ & \quad \left. + V\lambda_i \cos \lambda_i x \int_b^c (\dot{w} + Vw') \sin \lambda_i x dx \right), x \in (b, c), \quad t \geq 0. \end{aligned} \right. \quad (9)$$

Рассмотрим задачу: при каких значениях параметров (внешних и внутренних) система совершает скачкообразный переход из одного состояния равновесия в другое (то есть наблюдается явление дивергенции конструкции), при этом происходит бифуркация соответствующего решения [2].

2. Исследование бифуркации

В качестве таких основных параметров в задачах аэрогидроупругости являются скорость потока V и продольное усилие N . Решение системы (9) отыскивалось в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^n A_k(t) \sin \mu_k(x - b), \quad w(x, t) = \sum_{k=1}^n B_k(t) \sin \mu_k(x - b), \quad (10)$$

$$\mu_k = \frac{k\pi}{(c-b)}, \quad x \in (b, c).$$

В результате применения метода Галеркина [3] получена нелинейная система дифференциальных уравнений для определения $A_k(t), B_k(t)$, коэффициенты которой зависят от параметров N и V . В частности, для $n = 1, \beta_i^* = 0$ имеем нелинейную систему для $A_1(t), B_1(t)$

$$\left\{ \begin{aligned} & M\ddot{A}_1(t) + EF\mu_1^4 A_1(t) = 0, \\ & (M + C_1)\ddot{B}_1(t) + (\beta_1 + \beta_2\mu_1^4 + C_2)\dot{B}_1(t) + \\ & \quad + (D\mu_1^4 - N\mu_1^2 + \beta_0 + C_3)B_1(t) + \frac{3}{4}EF\mu_1^4 B_1^3(t) = 0, \end{aligned} \right. \quad (11)$$

где C_1, C_2, C_3 — коэффициенты, зависящие от $V, \rho, \lambda_i, x_0, y_0$.

В статическом случае ($\dot{A}_1 = \dot{B}_1 = \dot{B}_1 = 0$) система (11) примет вид

$$\left\{ \begin{aligned} & A_1 = 0, \\ & (D\mu_1^4 - N\mu_1^2 + \beta_0 + C_3)B_1 + \frac{3}{4}EF\mu_1^4 B_1^3 = 0. \end{aligned} \right. \quad (12)$$

Система (12) имеет нетривиальное решение (происходит бифуркация) при условии

$$D\mu_1^4 + \beta_0 < N\mu_1^2 - C_3. \quad (13)$$

Рассмотрим механическую систему с параметрами $EF = 3.8 \cdot 10^8$, $\rho = 1000$; $x_0 = 20$; $b = 10$, $c = 11$; $y_0 = 0.1$; $h = 0.005$; $\rho_0 = 8480$; $D = 806.7$, $\beta_0 = 10$, $\beta_1 = 0.5$, $\beta_2 = 0.4$, $s = 5$ (все величины приведены в системе СИ). Подставляя в (12), имеем

$$\begin{cases} A_1 = 0, \\ (39295 - 4.9348N - 836.033V^2)B_1 + 6.9404 \cdot 10^9 B_1^3 = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Система (14) имеет решения:

$$\begin{cases} A_1 = 0, \\ B_1 = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} A_1 = 0, \\ B_1 = \pm \sqrt{\frac{4.9348N + 836.033V^2 - 39295}{6.9404 \cdot 10^9}}. \end{cases}$$

Бифуркация решения происходит, когда выражение под корнем становится положительным (существует нетривиальное решение):

$$4.9348N + 836.033V^2 - 39295 > 0. \quad (15)$$

При этом решение $w(x) = 0$ скачком переходит в решение $w(x) = B_1 \sin \frac{\pi(x-b)}{(c-b)}$.

На рис. 1 в пакете Mathematica построены бифуркационные диаграммы, показывающие зависимость амплитуды прогиба пластины B_1 от скорости потока V и позволяющие определить критические значения параметров, при которых система теряет устойчивость и совершает скачкообразный переход из прямолинейного состояния равновесия.

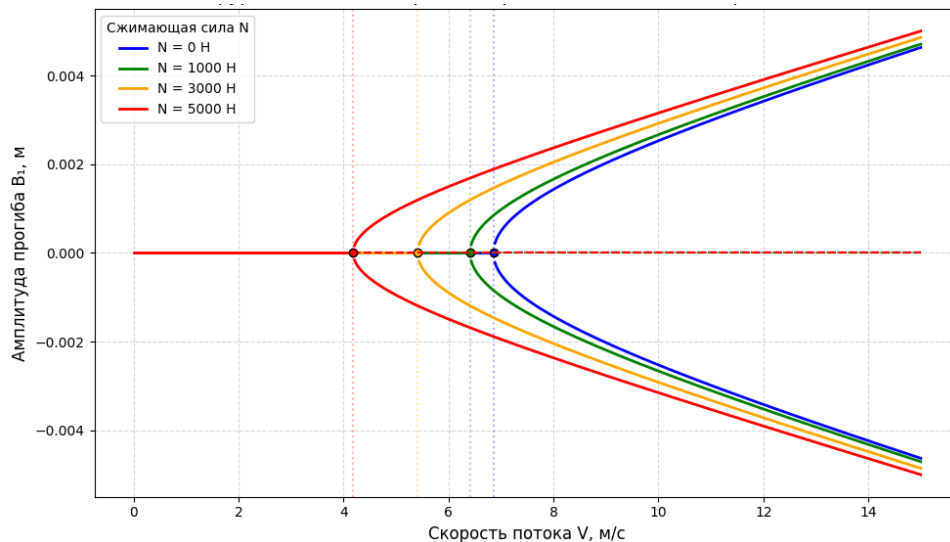


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма

Система нелинейных дифференциальных уравнений (11) численно решалась в пакете Mathematica при начальных условиях: $f_1(0) = 0$, $f_2(0) = 0.0001$, $g_1(0) = 0$, $g_2(0) = 0$. На рисунках 2,3 представлены результаты расчетов:

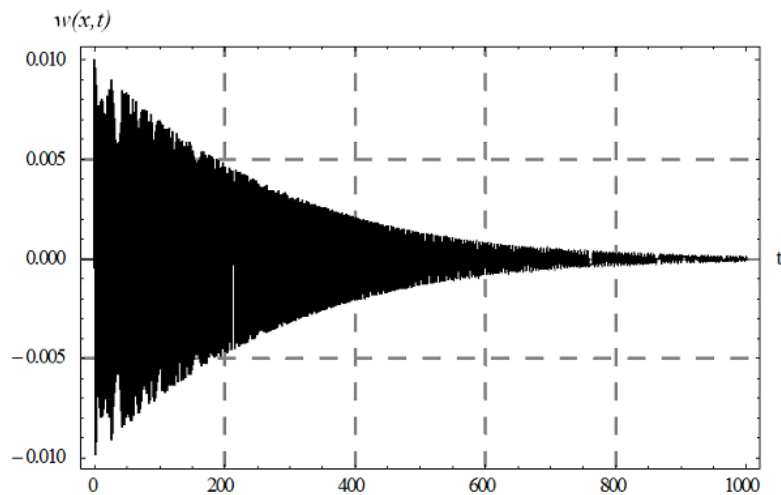


Рис. 2. Колебания точки $x = \frac{b+c}{2}$ при $N = 1000$, $V = 2$.

- при $N = 1000$, $V = 2$ условия (13), (15) не выполняются, система не имеет скачков (рис. 2),
- при $N = 5000$, $V = 8$ условия (13), (15) выполняются, система совершает скачкообразный переход (рис. 3).

Полученные результаты согласуются с рис. 1.

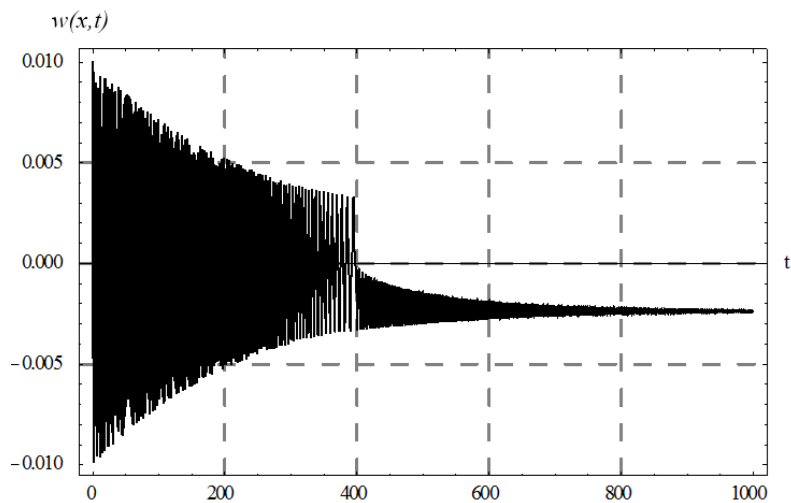


Рис. 3. Колебания точки $x = \frac{b+c}{2}$ при $N = 5000$, $V = 8$.

Заключение

Предложена методика определения критических сочетаний скорости потока и продольного усилия, при которых аэрогидроупругая система совершает скачкообразный переход. Результаты могут быть использованы при проектировании конструкций, работающих в условиях обтекания потоком жидкости или газа, например, вибрационных устройств.

Литература

1. Анкилов А.В., Вельмисов П.А. Функционалы Ляпунова в некоторых задачах аэрогидроупругости. Ульяновск: УлГТУ, 2019. 201 с.
2. Вельмисов П.А., Киреев С.В. Математическое моделирование в задачах статической неустойчивости упругих элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии. Ульяновск: УлГТУ, 2011. 200 с.
3. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. Москва: Мир, 1988. 352 с.

MSC 35Q74:65Q10

Study of the bifurcation of a solution to a problem of aerohydroelasticity

Yu.A. Tamarova¹, P.A. Velmisov¹
Ulyanovsk State Technical University¹

Abstract: A numerical-analytical approach to studying step-like transitions in aero-hydroelastic systems is proposed. Using the Galerkin method, a nonlinear boundary value problem is reduced to a system of ordinary differential equations, for which an analytical condition for the step-like transition is obtained. The results are validated by numerical simulations using the Mathematica package.

Keywords: aerohydroelasticity, bifurcation, stability, Galerkin method.

УДК 519.63

Численное моделирование зеркально-теневого метода контроля цилиндрических изделий на основе открытых программных средств

Терентьев В.А.¹

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет¹

Аннотация: Рассматривается задача численного моделирования зеркально-теневого метода неразрушающего контроля цилиндрических изделий с использованием проходных электромагнитно-акустических преобразователей. Математическая модель процесса представляет собой слабосвязанную систему уравнений электродинамики и эластодинамики: квазистационарные уравнения Максвелла применяются для расчёта вихревых токов и объёмной силы Лоренца, а волновое уравнение теории упругости описывает распространение ультразвуковых импульсов в сечении изделия. Обсуждаются требования к пространственной дискретизации и схемам интегрирования по времени, обеспечивающие корректное воспроизведение многократно переотражённых эхо-сигналов. Предлагается архитектура открытого программного комплекса на языке Python с использованием библиотек конечно-элементного анализа FEniCS и SfePy как импортонезависимой альтернативы коммерческому пакету COMSOL Multiphysics. В качестве эталона для кросс-верификации используются опубликованные результаты моделирования акустического тракта, включая эффекты фокусировки поперечной волны и амплитудной модуляции эхо-импульсов при овальности сечения.

Ключевые слова: неразрушающий контроль, зеркально-теневого метод, электромагнитно-акустический преобразователь, метод конечных элементов, волновое уравнение, численная диссипация, FEniCS, SfePy.

1. Введение

Надёжность трубопроводных систем и механических узлов, применяемых при добыче и транспортировке флюидов, в значительной степени определяется качеством цилиндрических труб и насосных штанг. Одним из перспективных подходов к их дефектоскопии является зеркально-теневого метод (ЗТМ) неразрушающего контроля с использованием проходных электромагнитно-акустических преобразователей (ЭМАП) [1]. Метод является бесконтактным: переменное электромагнитное поле индуцирует в поверхностном слое металла вихревые токи, взаимодействие которых с постоянным полем подмагничивания порождает объёмную силу Лоренца, возбуждающую упругие волны [2]. Дефекты выявляются по изменению амплитудных и временных параметров серии многократно переотражённых донных эхо-импульсов.

Физическая состоятельность метода и качественные закономерности формирования акустического тракта в цилиндрических изделиях были детально исследованы в работе [1] средствами коммерческого пакета COMSOL Multiphysics. В частности, было показано, что в круглом сечении цилиндра возникает фокусировка поперечной волны, а овальность сечения приводит к амплитудной модуляции последовательности эхо-сигналов.

Вместе с тем применение проприетарного программного обеспечения в качестве

вычислительного ядра исследовательского комплекса сопряжено с рядом ограничений. Закрытая архитектура затрудняет модификацию численных схем под специфику задачи, а лицензионные условия препятствуют масштабированию расчётов на кластерных системах. Последнее особенно критично для массовой генерации синтетических данных, необходимых при построении систем автоматической интерпретации сигналов на основе машинного обучения. Целью настоящей работы является разработка архитектуры открытого импортонезависимого решателя данной волновой задачи на языке Python.

2. Математическая модель

Процесс электромагнитно-акустического преобразования описывается слабосвязанной мультифизической системой дифференциальных уравнений в частных производных. Электродинамическая подзадача формулируется в квазистационарном приближении уравнений Максвелла:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1)$$

где $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ — напряжённости магнитного и электрического полей, $\mathbf{B}$ — магнитная индукция, $\mathbf{J}$ — плотность вихревых токов. Решение задачи (1) позволяет вычислить распределение объёмной силы Лоренца

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{J} \times \mathbf{B}_0, \quad (2)$$

где $\mathbf{B}_0$ — индукция поля подмагничивания.

Сила (2) выступает источником в динамическом уравнении теории упругости (уравнении Навье–Коши), описывающем распространение акустических волн в сечении изделия:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F}_L, \quad (3)$$

где ρ — плотность материала, $\mathbf{u}$ — вектор смещений, $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений, связанный с тензором деформаций законом Гука. Слабая связанность системы позволяет решать подзадачи последовательно: поле силы Лоренца рассчитывается один раз и передаётся в эластодинамический решатель в качестве правой части.

3. Вычислительные особенности и архитектура решателя

Численное решение уравнения (3) методом конечных элементов (МКЭ) в постановке ЗТМ предъявляет жёсткие требования к дискретизации. Во-первых, для подавления численной дисперсии характерный размер элемента сетки должен составлять малую долю длины ультразвуковой волны; при использовании базисных функций второго порядка на длину волны требуется порядка шести и более элементов. Во-вторых, специфика метода — анализ серии многократных переотражений — требует длительного интегрирования по времени, при котором стандартные безусловно устойчивые неявные схемы вносят заметную схемную диссипацию и искусственно подавляют высокочастотные составляющие сигнала. Поэтому в основу решателя закладываются схемы интегрирования с контролируемой численной диссипацией, позволяющие сохранять энергию импульса на протяжении всей серии отражений.

Программный комплекс разрабатывается на языке Python с использованием открытых библиотек конечно-элементного анализа FEniCS [3] и SfePy [4]. Такой выбор обеспечивает вариационную формулировку задачи в близкой к математической

нотации форме, автоматическую сборку матриц, доступ к масштабируемым решателям линейных систем, а также свободное распространение и модификацию кода. Архитектура комплекса предусматривает модуль параметрических расчётов, автоматизирующий перебор геометрических и физических параметров модели (диаметр, овальность, положение и размер дефекта) и массовую генерацию синтетических осциллограмм.

Верификация решателя строится по принципу кросс-проверки с опубликованными эталонными результатами [1]: воспроизведение фокусировки поперечной волны в центре круглого сечения и амплитудной модуляции серии эхо-импульсов при малой овальности сечения. Достижение качественного и количественного согласия с эталонными осциллограммами рассматривается как критерий корректности вычислительного ядра.

4. Заключение

Сформулирована математическая модель и определены вычислительные требования к открытому конечно-элементному решателю задачи зеркально-теневого контроля цилиндрических изделий проходными ЭМАП. Дальнейшая работа направлена на программную реализацию эластодинамического модуля, его верификацию по эталонным данным и генерацию массива синтетических осциллограмм для последующего решения обратной задачи дефектоскопии методами машинного обучения. Создаваемый комплекс призван стать импортонезависимым вычислительным ядром для программного обеспечения современных дефектоскопических систем.

Литература

1. Петров К.В. Зеркально-теновой метод контроля цилиндрических изделий с использованием электромагнитно-акустических преобразователей: дис. ... канд. техн. наук. Ижевск, 2020. 134 с.
2. Hirao M., Ogi H. Electromagnetic Acoustic Transducers: Noncontacting Ultrasonic Measurements Using EMATs. 2nd ed. Tokyo: Springer, 2017. 380 p.
3. Logg A., Mardal K.-A., Wells G.N. (eds.) Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method: The FEniCS Book. Berlin: Springer, 2012. 723 p.
4. Cimrman R., Lukeš V., Rohan E. Multiscale finite element calculations in Python using SfePy // Advances in Computational Mathematics. 2019. Vol. 45. P. 1897-1921.

MSC 65M60

Numerical simulation of the mirror-shadow method for testing cylindrical products based on open-source software

V.A. Terentev¹

National Research Mordovia State University¹

Abstract: The paper considers numerical simulation of the mirror-shadow method of non-destructive testing of cylindrical products using encircling electromagnetic acoustic transducers (EMATs). The mathematical model is a weakly coupled system of electrodynamic and elastodynamic equations: the quasi-stationary Maxwell equations are used to compute eddy currents and the Lorentz body force, while the elastic wave equation describes the propagation of ultrasonic pulses in the cross-section of the product. Requirements for spatial discretization and time integration schemes ensuring correct reproduction of multiply reflected echo signals are discussed. An architecture of an open-source Python-based software package built on the FEniCS and SfePy finite element libraries is proposed as an import-independent alternative to the commercial COMSOL Multiphysics package. Published simulation results, including transverse wave focusing and amplitude modulation of echo pulses caused by cross-section ovality, are used as a benchmark for cross-verification.

Keywords: non-destructive testing, mirror-shadow method, electromagnetic acoustic transducer, finite element method, wave equation, numerical dissipation, FEniCS, SfePy.

УДК 519.63

Разработка и идентификация кинетической модели процесса низкотемпературной паровой конверсии алканов

Хисаметдинов И.Ф.¹, Хашпер А.Л.², Урлуков А.С.^{3,4}, Губайдуллин И.М.⁵

Уфимский государственный нефтяной технический университет¹, ООО
«СИБИНТЕК-СОФТ»², Институт катализа им. Г.К. Борескова³, Новосибирский
государственный университет⁴, Институт нефтехимии и катализа УФИЦ РАН⁵

Аннотация: Низкотемпературная паровая конверсия легких алканов является перспективным способом подготовки попутного нефтяного газа к дальнейшей транспортировке и использованию в качестве топлива. Проведение вычислительных экспериментов на основе кинетических моделей позволяет исследовать влияние технологических параметров на состав продуктов реакции и существенно сократить объем дорогостоящих экспериментальных исследований. В работе рассматривается разработка математической модели процесса, решение прямой и обратной задач химической кинетики, а также идентификация кинетических параметров по экспериментальным данным для Rh–Cu-катализатора.

Ключевые слова: низкотемпературная паровая конверсия, алканы, кинетическая модель, обратная задача, идентификация параметров, метод BDF, GPU.

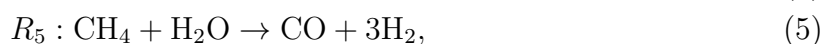
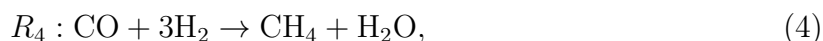
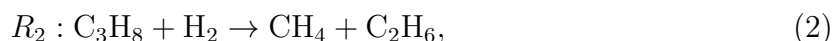
1. Постановка задачи

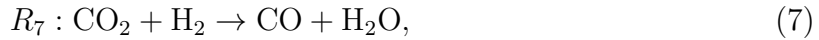
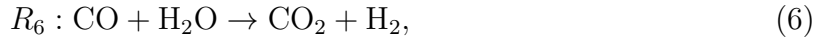
Низкотемпературная паровая конверсия (НТПК) легких алканов является перспективным способом подготовки попутного нефтяного газа к дальнейшей транспортировке и использованию в качестве топлива. Проведение вычислительных экспериментов на основе кинетических моделей позволяет исследовать влияние технологических параметров на состав продуктов реакции и существенно сократить объем дорогостоящих экспериментальных исследований. В связи с этим актуальной задачей является разработка математической модели процесса и эффективных алгоритмов идентификации ее кинетических параметров.

Целью работы является разработка кинетической модели процесса низкотемпературной паровой конверсии алканов, решение прямой и обратной задач химической кинетики, а также идентификация кинетических параметров по экспериментальным данным, полученным для Rh–Cu-катализатора [1].

2. Кинетическая модель

В основу математической модели положена следующая кинетическая схема:





Предполагается, что каждая реакция имеет первый порядок по каждому из реагентов. В соответствии с законом действующих масс [2] скорость i -й реакции определяется выражением

$$r_i = k_i(T) \prod_{j=1}^m C_j^{\delta_{ij}},$$

где C_j – концентрация j -го компонента реакционной смеси, $k_i(T)$ – константа скорости реакции, $\delta_{ij} = 1$, если компонент участвует в качестве реагента в i -й реакции, и $\delta_{ij} = 0$ в противном случае.

Для рассматриваемой кинетической схемы скорости реакций имеют вид

$$r_1 = k_1 C_{\text{C}_3\text{H}_8}, r_2 = k_2 C_{\text{C}_3\text{H}_8} C_{\text{H}_2}, \quad (9)$$

$$r_3 = k_3 C_{\text{C}_2\text{H}_6} C_{\text{H}_2}, r_4 = k_4 C_{\text{CO}} C_{\text{H}_2}, \quad (10)$$

$$r_5 = k_5 C_{\text{CH}_4}, r_6 = k_6 C_{\text{CO}}, \quad (11)$$

$$r_7 = k_7 C_{\text{CO}_2} C_{\text{H}_2}, r_8 = k_8 C_{\text{C}_2\text{H}_6}. \quad (12)$$

$$\mathbf{C} = (C_{\text{C}_3\text{H}_8}, C_{\text{C}_2\text{H}_6}, C_{\text{CH}_4}, C_{\text{H}_2}, C_{\text{H}_2\text{O}}, C_{\text{CO}}, C_{\text{CO}_2})^T, \quad \mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_8)^T. \quad (13)$$

Математическая модель процесса записывается в виде задачи Коши

$$\frac{d\mathbf{C}}{dt} = S \mathbf{r}(\mathbf{C}, \mathbf{p}, T), \quad \mathbf{C}(0) = \mathbf{C}_0,$$

где S – стехиометрическая матрица процесса, $\mathbf{p}$ – вектор идентифицируемых кинетических параметров.

3. Численное решение и идентификация параметров

Полученная система является жесткой вследствие существенного различия характерных времен отдельных стадий процесса. Для решения прямой задачи в многопоточном режиме центрального процессора используется неявный многошаговый метод обратного дифференцирования Backward Differentiation Formula (BDF) [3], обладающий высокой устойчивостью при интегрировании жестких систем и автоматически изменяющий порядок и шаг интегрирования в соответствии с оценкой локальной погрешности. Применение метода BDF обеспечивает эффективное решение системы при широком диапазоне значений кинетических параметров.

Для проведения массовых вычислительных экспериментов реализован альтернативный режим вычислений на графическом процессоре. В данном режиме интегрирование системы осуществляется неявным методом Эйлера, который, несмотря на первый порядок точности, обладает А-устойчивостью и хорошо подходит для массово-параллельной реализации благодаря простой вычислительной схеме. Использование GPU позволяет одновременно интегрировать большое количество независимых кинетических систем, что существенно сокращает время вычислений при решении обратной задачи.

Идентификация кинетических параметров рассматривается как задача нелинейной оптимизации. Вектор неизвестных параметров имеет вид

$$\mathbf{p} = (A_1, E_1, \dots, A_8, E_8)^T.$$

Для оценки качества модели используется функционал относительной квадратичной ошибки

$$\Phi(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^m \left(\frac{C_{jk}^{\text{calc}}(\mathbf{p}) - C_{jk}^{\text{exp}}}{C_{jk}^{\text{exp}} + 10^{-20}} \right)^2,$$

где C_{jk}^{calc} и C_{jk}^{exp} – соответственно расчетные и экспериментальные концентрации j -го компонента для k -го опыта. Добавление малого параметра 10^{-20} предотвращает потерю устойчивости вычислений при близких к нулю экспериментальных концентрациях.

Поиск оптимального набора кинетических параметров сводится к решению задачи

$$\mathbf{p}^* = \arg \min_{\mathbf{p}} \Phi(\mathbf{p}).$$

Оптимизация функционала выполняется симплекс-методом Нелдера–Мида [4]. В процессе оптимизации вычисление значения целевой функции требует многократного решения прямой задачи для всех экспериментальных режимов, что определяет высокую вычислительную сложность процедуры идентификации. Для сокращения времени вычислений реализована многопоточная схема, в которой независимые задачи интегрирования распределяются между вычислительными потоками CPU либо одновременно выполняются на графическом процессоре. Такая организация вычислений позволяет существенно ускорить процедуру идентификации без изменения математической постановки задачи.

4. Заключение

Разработанная кинетическая модель удовлетворительно описывает экспериментальные данные для процесса низкотемпературной паровой конверсии алканов на Rh–Cu-катализаторе [1] и может быть использована для проведения вычислительных экспериментов, исследования влияния технологических параметров на состав продуктов реакции и оптимизации режимов работы каталитического реактора.

Литература

1. Zyryanova M.M., Snytnikov P.V., Shigarov A.B., Belyaev V.D., Kirillov V.A., Sobyenin V.A. Fuel. 2014. Vol. 135. P. 76-82.
2. Лэйдлер К.Дж., Мейзер Дж.Х. Физическая химия. 1982. 780 с.
3. Зенков А.В. Численные методы: учеб. пособие. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2016. 124 с.
4. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. Москва: Радио и связь, 1988. 128 с.

MSC 65L05, 65K10, 80A30

Development and Identification of a Kinetic Model for Low-Temperature Steam Conversion of Alkanes

I.F. Khisametdinov¹, A.L. Khashper², A.S. Urlukov^{3,4}, I.M. Gubaidullin⁵

Ufa State Petroleum Technological University¹, SIBINTEK-SOFT LLC², Boreskov Institute of Catalysis³, Novosibirsk State University⁴, Institute of Petrochemistry and Catalysis, Ufa Federal Research Centre, Russian Academy of Sciences⁵

Abstract: Low-temperature steam conversion of light alkanes is considered as a promising method for preparing associated petroleum gas for further transportation and use as fuel. The work presents a kinetic model of the process, the formulation of direct and inverse chemical-kinetics problems, and the identification of kinetic parameters from experimental data obtained for a Rh–Cu catalyst. The numerical solution combines implicit methods for stiff systems with parallel computations on CPU and GPU.

Keywords: low-temperature steam conversion, alkanes, kinetic model, inverse problem, parameter identification, BDF method, GPU.

УДК 519.87:004.942:004.85

Унифицированное программное обеспечение для оценивания динамических производственных функций и моделей машинного обучения

Д.И. Хоха¹

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы¹

Аннотация: Разработано авторское программное обеспечение для построения и сравнения моделей на базе динамических производственных функций, регрессионных моделей машинного обучения и рекуррентных нейронных сетей. Реализованы производственные функции Кобба–Дугласа, Векслеля и CES с нейтральным научно-техническим прогрессом и распределёнными лагами факторов производства; регрессионные модели машинного обучения: линейная регрессия, Lasso-регрессия, гребневая регрессия, ElasticNet, случайный лес и градиентный бустинг; рекуррентные нейронные сети на основе слоёв RNN, LSTM и GRU. Выполнен вычислительный эксперимент на основе статистических данных стран БРИКС и стран-партнёров за 1990–2024 гг.

Ключевые слова: программный комплекс, производственная функция, временные лаги, технический прогресс, машинное обучение, рекуррентные нейронные сети.

1. Введение и постановка задачи

Агрегированные производственные функции используются для описания зависимости выпуска от затрат капитала, труда и научно-технического прогресса [1]. При межстрановом анализе экономического роста на основе динамических производственных функций данная спецификация является недостаточной: инвестиции, ввод мощностей и изменение занятости воздействуют на выпуск с задержкой. Поэтому в модели спецификаций производственных функций включается лаговая структура факторов производства [2] (капитала и труда). В последнее время получают развитие регрессионные модели машинного обучения и нейронные сети для анализа экономических процессов [3]. На практике при моделировании экономического роста возникает задача выбора «лучшей» модели, описывающей данный производственный процесс. Цель данной работы состоит в разработке программного комплекса для построения и сравнения моделей на базе динамических производственных функций, ML-регрессий и нейронных сетей.

2. Алгоритм оценивания моделей и программная архитектура

В разработанном программном комплексе на базе динамических производственных функций с постоянной эластичностью замещения факторов производства [4]

$$\begin{aligned} Y_t &= AK_t^\alpha L_t^\beta e^{\lambda t} && \text{(Кобба–Дугласа),} \\ Y_t &= AK_t^\alpha L_t^{1-\alpha} e^{\lambda t} && \text{(Векслеля),} \\ Y_t &= A (\delta K_t^{-\rho} + (1 - \delta) L_t^{-\rho})^{-\gamma/\rho} e^{\lambda t}, \quad 0 < \delta < 1 && \text{(CES),} \end{aligned} \tag{1}$$

реализованы спецификации с лаговой структурой факторов:

$$Y_t = A e^{\lambda t} \prod_{i=0}^p (K_{t-i}^{\alpha_i} L_{t-i}^{\beta_i}), \quad (2)$$

и

$$Y_t = A e^{\lambda t} \left[\sum_{i=0}^p (\delta_{K,i} K_{t-i}^{-\rho} + \delta_{L,i} L_{t-i}^{-\rho}) \right]^{-\gamma/\rho}, \quad \sum_{i=0}^p (\delta_{K,i} + \delta_{L,i}) = 1. \quad (3)$$

В формулах (1)–(3) использованы следующие обозначения: Y_t – выпуск, K_t – капитал, L_t – труд, t – параметр научно-технического прогресса, A – технологический множитель, p – общая максимальная глубина лагов капитала и труда. В случае производственной функции Викселля в спецификации (2) дополнительно считаем, что выполняется условие линейной однородности $\sum_{i=0}^p (\alpha_i + \beta_i) = 1$.

Оценивание производственных функций (1)–(3) выполняется в два этапа. На первом этапе строится начальное приближение путём нахождения коэффициентов линейаризованной модели Кобба–Дугласа (Викселля) методом наименьших квадратов (МНК). МНК-оценки служат стартовыми значениями для нелинейной оптимизации. Для CES-модели начальные приближения формируются через аппроксимацию функцией Кобба–Дугласа. На втором этапе параметры моделей уточняются в исходной нелинейной постановке с применением метода оптимизации `curve_fit` библиотеки SciPy и алгоритма Trust Region Reflective. Глубина лагов выбирается перебором заданного пользователем диапазона: для каждой страны, модели и лага формируется выборка, выполняется оценивание и фиксируются прогнозные значения.

Разработанное программное обеспечение является авторской разработкой и реализует клиент–серверную архитектуру. Веб-интерфейс (рис. 1) реализован посредством технологий TypeScript/React и обеспечивает выбор источника данных, стран или пользовательского файла со статистическими данными, временного периода, количества факторов производства, тестовой доли выборки, диапазона лагов и моделей. Серверная часть реализована на Python/FastAPI и обеспечивает приём структурированного запроса, загрузку исходных данных через World Bank API либо из файлов форматов Excel/CSV, их предварительную обработку и последующую передачу подготовленного массива данных в специализированные вычислительные подсистемы.

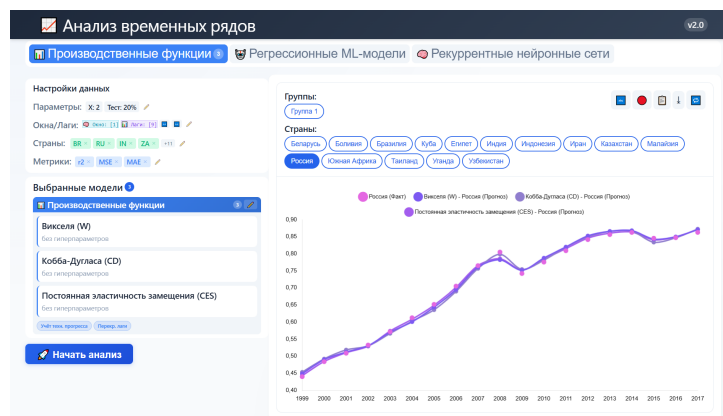


Рис. 1. Интерфейс программного комплекса

Унификация программного обеспечения осуществляется на уровне общего сценария обработки многомерных временных рядов. Центральный управляющий модуль `TimeSeriesAnalysis` последовательно выполняет основные этапы анализа: получает исходные данные, приводит их к единому внутреннему формату `DataPreprocessed`, передаёт подготовленные данные в выбранные модельные блоки и возвращает результаты в веб-интерфейс. Общая логика работы моделей вынесена в родительский класс `GeneralTimeSeriesModel`: он задаёт единые правила взаимодействия с данными, препроцессором и модулем расчёта метрик. На его основе реализованы специализированные классы `ConstantElasticity`, `RegressionML` и `RecurrentNeuralNetworks`, отвечающие соответственно за производственные функции, регрессионные ML-модели и рекуррентные нейронные сети. Для производственных функций и ML-регрессий система формирует таблицу признаков с лаговыми переменными; для RNN те же временные ряды преобразуются в тензоры вида $N \times T \times d$, где N – число сформированных обучающих примеров, T – размер скользящего окна, d – число факторов.

3. Результаты и заключение

Вычислительный эксперимент выполнен по статистическим данным Всемирного банка для стран БРИКС и их партнёров за 1990–2024 гг.: реальный ВВП (Y), валовое накопление основного капитала (K) и численность рабочей силы (L). Для стран БРИКС и стран-партнёров оценивались спецификации (1)–(3). По полученным оптимальным моделям выделены четыре типа результатов: трудоинтенсивный профиль (Беларусь, Россия; функция Викселля), капиталоемкий или смешанный профиль с высокой прогнозной адекватностью (Египет, Малайзия, Индия, Иран, Уганда, Индонезия, Бразилия), средняя надёжность с необходимостью проверки устойчивости параметров (Казахстан, Узбекистан) и неудовлетворительное качество модели на тестовом интервале (Таиланд, Боливия, Куба, Южная Африка). Сценарий на статистических данных стран БРИКС подтвердил, что производственные функции, ML-регрессии и RNN могут запускаться из одного интерфейса, на общей структуре данных и с единым форматом результата.

Разработанная система объединяет указанные классы моделей в едином вычислительном контуре динамических производственных функций, ML-регрессий и нейронных сетей. Двухэтапное оценивание повышает устойчивость вычислений, а модульная архитектура позволяет подключать новые модели без изменения пользовательского сценария.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований, проект «Разработка программного обеспечения для сравнения эффективности классических моделей и алгоритмов машинного обучения в задачах управления производственными процессами национальной экономики», договор с БРФФИ № Ф25ИИ М-019 от 02.05.2025 г., № ГР 20251071. Программное обеспечение является собственной разработкой автора и внедрено в деятельность ОАО «АСБ Беларусбанк».

Литература

1. Проневич А.Ф., Хацкевич Г.А. Динамические производственные функции для моделирования производственных процессов // Вестник Института экономики НАН Беларуси. 2022. Вып. 5. С. 9-27.
2. Almon S. The distributed lag between capital appropriations and expenditures // Econometrica. 1965. Vol. 33, No. 1. P. 178-196.
3. Смирнов С.В. Методы машинного обучения в макроэкономическом прогнозировании: предварительные итоги // Вопросы экономики. 2025. № 10. С. 131-154.
4. Хацкевич Г.А., Проневич А.Ф. Классификация Сато-Бекмана учёта научно-технического прогресса // Журнал Белорусского государственного университета. Экономика. 2020. № 2. С. 4-17.

MSC 91B62, 68T07, 62M10, 65C60

Unified Software for Estimating Dynamic Production Functions and Machine Learning Models

D.I. Khokha¹

Yanka Kupala State University of Grodno¹

Abstract: Original software has been developed for constructing and comparing models based on dynamic production functions, regression machine learning models and recurrent neural networks. The system implements Cobb–Douglas, Wicksell and CES production functions with neutral scientific and technological progress and distributed lags of production factors; regression machine learning models, including linear regression, Lasso regression, Ridge regression, ElasticNet, random forest and gradient boosting; and recurrent neural networks based on RNN, LSTM and GRU layers. A computational experiment was performed using statistical data for BRICS countries and partner countries for 1990–2024.

Keywords: software system, production function, time lags, scientific and technological progress, machine learning, recurrent neural networks.

УДК 519.6 534.8 517.443

Дискретный спектральный анализ акустических импульсов при оптоакустических исследованиях полимеров и композитов

Чертищева С.А.¹, Судьенков Ю.В.¹, Кучмин А.Ю.²

Санкт-Петербургский государственный университет¹, Институт проблем машиноведения Российской академии наук (ИПМаш РАН)²

Аннотация: В работе представлена разработанная методика дискретного спектрального анализа импульсных акустических сигналов. Приведены результаты спектрального анализа наносекундных акустических импульсов, регистрируемых при оптоакустической дефектоскопии образцов полимеров и композитов. Показаны преимущества представленной методики в сравнении со стандартной методикой быстрого Фурье-анализа.

Ключевые слова: оптоакустика, дискретный спектральный анализ, вейвлет-фильтрация.

Представлена методика дискретного спектрального анализа наносекундных оптоакустических импульсов в полимерах (оргстекло, стекло) и композитах (углепластик, стеклопластик). Целью работы является повышение точности расчета дисперсии скорости и затухания за счет автоматизации предобработки данных и подавления шумов регистрирующей системы при помощи вейвлет-фильтрации.

В работе использовался оптоакустический метод исследования [1], основанный на термоупругом эффекте. В ПВДФ-пленке ($h = 25$ мкм) лазерным импульсным излучением ($\lambda = 1.06$ мкм, $\tau \approx 2$ нс) осуществляется генерация акустических сигналов. Регистрация эхо-импульсов проводилась пьезодатчиком, сигнал с которого записывался осциллографом с частотой дискретизации 2 ГГц. Рабочий диапазон частот составил от 1 МГц до 70 МГц.

Традиционный анализ быстрого преобразования Фурье (БПФ) в OriginLab оказался неэффективен для композитных материалов из-за большого затухания и высокого уровня шума регистрирующей системы, а также из-за невозможности пакетной обработки серии импульсов. Поэтому была предложена методика предобработки сигнала в среде MATLAB, основанная на задаче об идентификации нестационарного динамического объекта [2]. Алгоритм работы программы состоит из трех основных этапов:

1. Фильтрация сигнала осуществлялась с использованием вейвлет-разложения для удаления аппаратного шума с сохранением фазовой структуры.
2. Моделирование временного профиля каждого импульса суммой гауссовых функций с последующей оптимизацией параметров методом наименьших квадратов.
3. Расчет спектра от аналитической суммы гауссиан вместо численного БПФ и вычисление дисперсии скорости и затухания с высоким разрешением по частоте.

Для исследуемых образцов стандартными методами дефектоскопии были получены следующие значения скорости звука c_0 и затухания α : стекло 6047 м/с и 0.36 см^{-1} , оргстекло 2700 м/с и 0.35 см^{-1} , углепластик 3020 м/с и 1.39 см^{-1} , стеклопластик 2741 м/с и 1.92 см^{-1} .

Для стекла получено минимальное значение дисперсии скорости. Оргстекло демонстрирует вязкоупругое поведение, наблюдается практически линейный рост затухания и выраженная дисперсия скорости. Высокое затухание в композитах (углепластик, стеклопластик) обусловлено рассеянием на волокнах и пористостью материала [3]. Дисперсия скорости стеклопластика указывает на его вязкоупругую природу, как и для оргстекла.

Предложенный алгоритм в MATLAB позволил снизить погрешность моделирования формы импульса менее, чем до 0.1% и получить гладкие спектральные кривые без скачков фазы, что невозможно при использовании стандартных оконных функций быстрого преобразования Фурье. Также был выявлен основной недостаток метода – это проявление эффекта Гиббса на высоких частотах, требующее дополнительного сглаживания моделей полиномом.

Таким образом, предлагаемый дискретный спектральный анализ позволил автоматизировать процесс выделения окна нестационарных акустических сигналов и их обработки от шума измерительной системы, что обеспечивает надежную оценку дисперсии и затухания (особенно в сильно поглощающих материалах), превосходя традиционные подходы по точности и скорости обработки массивов данных.

Литература

1. Судьенков Ю.В. Исследование термомеханических и ударно-волновых процессов в твёрдых телах при наносекундных длительностях возмущений: автореферат дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.02.04. Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский государственный университет, 2014. 265 с.
2. Кучмин А.Ю. Проблемы идентификации нестационарных динамических объектов // Информационно-управляющие системы. 2018. № 2 (93). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/problemy-identifikatsii-nestatsionarnyh-dinamicheskikh-obektov>. Дата обращения: 25.09.2023.
3. Соколовская Ю.Г., Подымова Н.Б., Карабутов А.А. Исследование частотных зависимостей фазовой скорости продольных акустических волн в пористых углепластиках с использованием широкополосной акустической спектроскопии с лазерным источником ультразвука // Известия Российской академии наук. Серия физическая. 2021. Т. 85, № 1. С. 127-133. DOI: 10.31857/S0367676521010282.

MSC 65T50, 42C40, 94A12

Discrete spectral analysis of acoustic pulses in optoacoustic investigations of polymers and composites

S.A. Chertishcheva¹, Yu.V. Sudenkov¹, A.Yu. Kuchmin²

Saint Petersburg State University¹, Institute for Problems
in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences²

Abstract: The paper presents a developed methodology for discrete spectral analysis of pulsed acoustic signals. The results of the spectral analysis of nanosecond acoustic pulses recorded during optoacoustic defectoscopy of polymer and composite samples are presented. The advantages of the proposed technique over the standard Fast Fourier Transform (FFT) method are demonstrated.

Keywords: optoacoustics, discrete spectral analysis, wavelet filtering.

УДК 519.7

К вопросу об исследовании вынужденных колебаний в неоднородной цепочке линейных осцилляторов с трением и малым параметром

Шаманаев П.А.¹

Научно-технологический университет «Сириус»¹

Аннотация: Исследуются поперечных колебаний неоднородной цепочки линейных осцилляторов с трением методом Ляпунова Шмидта. Получены аналитические зависимости амплитуд колебаний от малого параметра.

Ключевые слова: цепочка линейных осцилляторов, вынужденные периодические колебания, метод Ляпунова-Шмидта.

Основные результаты по исследованию малых колебаний цепочки линейных осцилляторов изложены в [1] и [2]. В работе [3] изучены вынужденные колебания неоднородной цепочки линейных осцилляторов методом Ляпунова-Шмидта в предположении, что коэффициенты жёсткости пружин различны.

В настоящей работе исследуются поперечные колебания неоднородной цепочки линейных осцилляторов с трением и малым параметром $\varepsilon \neq 0$ (возмущенная система). На систему действуют диссипативные силы и внешние периодические силы. Рассматривается резонансный случай, когда частота внешней периодической силы совпадает с одной из собственных частот невозмущенной системы ($\varepsilon = 0$).

Для построения точного периодического решения возмущенной системы применяется метод Ляпунова-Шмидта. Показано, что при наличии диссипативных сил длина обобщенной жордановой цепочки может быть равна только 1 и при стремлении малого параметра ε к нулю амплитуда колебаний периодического решения возмущенной системы непрерывно стремится к амплитуде колебаний некоторого периодического решения невозмущенной системы.

Численное моделирование проводилось на языке Python на примере линейной цепочки из десяти осцилляторов.

Литература

1. Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. 2-е изд. М.: Гостехиздат, 1950. 200 с.
2. Вибрации в технике: Справочник в 6-ти т. Том 1. Колебания линейных систем / под ред. В. В. Болотина; ред. совет: В. Н. Челомей (пред.). Москва : Машиностроение, 1978. 352 с.
3. Шаманаев П. А., Катин Д. А., Ошина Н. В. Исследование вынужденных колебаний в неоднородной цепочке линейных осцилляторов методом Ляпунова-Шмидта // Журнал Средневолжского математического общества. 2025. Т. 27, № 4. С. 471–487. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202504.471-487

MSC 34C10, 34C25

On the study of forced oscillations in a non-uniform chain of linear oscillators with friction and a small parameter

P.A. Shamanaev¹

Sirius University of Science and Technology ¹

Abstract: Transverse oscillations of a non-uniform chain of linear oscillators with friction are investigated using the Lyapunov-Schmidt method. Analytical expressions relating oscillation amplitudes to a small parameter are obtained.

Keywords: chain of coupled linear oscillators, forced periodic oscillations, Lyapunov-Schmidt method.

УДК 517.956

Асимптотика резонансных состояний для двухмерных волноводов, соединенных сближающимися отверстиями

Юрова Т.С.¹, Попов И.Ю.¹

Университет ИТМО¹

Аннотация: Рассматриваются двумерные волноводы, связанные через малые сближающиеся окна. Получены и исследованы первые члены асимптотического разложения резонансов для случая условий Дирихле на границах. Используется метод сращивания асимптотических разложений решений краевых задач.

Ключевые слова: резонанс, асимптотики функции Грина, связанные волноводы.

1. Введение

Исследование резонансов в системах рассеяния ведется весьма активно, что обусловлено их высокой значимостью для широкого спектра физических приложений (см., например, [1, 2]). На сегодняшний день сложилось несколько основных подходов к анализу таких резонансов: это теория рассеяния Лакса–Филлипса [3], метод комплексного скейлинга [4], теория возмущений [5], использование функциональных моделей [6], асимптотические методы [7, 8], а также модели, опирающиеся на теорию расширений операторов [9].

Благодаря специфическим особенностям волноводов, мы можем моделировать движение электрона внутри такой микроструктуры как поведение свободной (бесспиновой) частицы, заключенной в соответствующей пространственной области с граничным условием Дирихле. Следовательно, теоретическое описание многих мезоскопических квантовых систем сводится к задаче о транспорте электронных волн через систему волноводов. Проблема связанных состояний и резонансов для латерально связанных волноводов вызывает интерес из-за того, что собственные значения и резонансы оказывают определяющее влияние на электронный транспорт в квантовых системах, что делает данную задачу исключительно важной с физической точки зрения.

В последнее десятилетие благодаря стремительному развитию нанотехнологий возникла новая волна интереса к проблеме резонансов в волноводах с перфорированными границами, равно как и к теории усреднения (см. [10, 11]). В этом контексте особенно важно понять, как ведут себя резонансы в ситуациях, когда расстояние между связывающими окнами (отверстиями) стремится к нулю. Дополнительная актуальность этого вопроса продиктована его связью с проблемой выбора регуляризации при построении моделей на основе теории расширений [12]. В настоящей работе данная задача исследуется именно с позиций асимптотического подхода.

В настоящей работе мы рассматриваем систему двумерных волноводов (полос) Ω_+ и Ω_- шириной d_+ и d_- соответственно, связанных друг с другом латерально через два небольших окна шириной $2a$ (рис. 1) с условиями Дирихле на границах. Подобные системы связанных волноводов являются предметом давнего и глубоко-

го изучения. Так, оценки и асимптотики для связанных состояний вблизи нижней границы непрерывного спектра уже были получены в работах [13,14]. В нашем исследовании применяется подход, во многом аналогичный методам из [15–18], который опирается на процедуру сшивания асимптотических разложений решений соответствующих краевых задач [20]. В работе [19] была исследована похожая задача, но для условий Неймана.

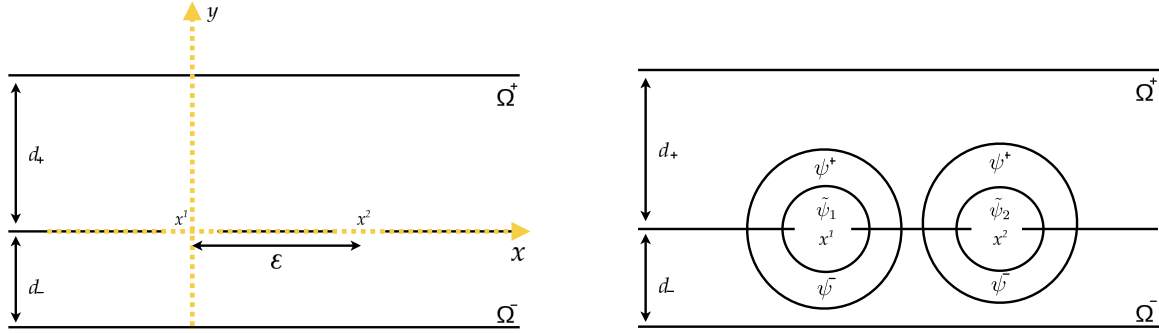


Рис. 1. Конфигурация системы.

2. Построение асимптотики

Наша задача — получить асимптотическое разложение резонанса, который стремится к нижней границе второй ветви непрерывного спектра (второму порогу) при $a \rightarrow 0$. Мы будем следовать традиционной схеме сшивания, предложенной Ильиным и Гадильшиным [20]. Отличие состоит в том, что мы начинаем с другой формы асимптотического ряда и ищем асимптотическое разложение некоторой функции от рассматриваемого квазисвязанного состояния. Малый параметр a — это полуширина отверстия. Рассмотрим случай, когда $d_+ > d_-$. Пусть k_a^2 — резонанс, близкий к точке π^2/d_-^2 . Для каждого окна мы строим две окружности радиусов $\sqrt{a}$ и $2\sqrt{a}$, в которых нам необходимо найти такие связующие функции, удовлетворяющие граничным условиям Дирихле, чтобы члены соответствующих порядков в асимптотических разложениях решения совпадали в областях:

$$\left(\Omega^+ \setminus S_{\sqrt{a}}^{1,2}\right) \cap S_{2\sqrt{a}}^{1,2}, \quad \left(\Omega^- \setminus S_{\sqrt{a}}^{1,2}\right) \cap S_{2\sqrt{a}}^{1,2}.$$

Мы будем искать асимптотический ряд следующего вида:

$$\left(\frac{\pi^2}{d_-^2} - k_a^2\right)^{1/2} = \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{i=0}^{[(j-1)/2]} k_{ji} a^j (\log a)^i. \quad (1)$$

Для соответствующей собственной функции $\psi_a(x)$ асимптотический ряд имеет следующий вид:

$$\psi_a(x) = \left(\frac{\pi^2}{d_-^2} - k_a^2\right)^{1/2} \sum_{j=0}^{\infty} a^j P_{j+1}(D_y, \log a)$$

$$(\alpha_1 G^-(x, (x^1, y), k) + \alpha_2 G^-(x, (x^2, y), k)) \Big|_{y=0}, \quad x \in \Omega^- \setminus S_{\sqrt{a}}^{1,2} \quad (2)$$

$$\tilde{\psi}_a(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{[(j-1)/2]} v_{ji}(x/a) a^j (\log a)^i, \quad x \in S_{2\sqrt{a}}^{1,2}. \quad (3)$$

$$\psi_a(x) = - \left(\frac{\pi^2}{d_-^2} - k_a^2 \right)^{1/2} \sum_{j=0}^{\infty} a^j P_{j+1}(D_y, \log a) \\ (\alpha_1 G^+(x, (x^1, y), k) + \alpha_2 G^+(x, (x^2, y), k)) \Big|_{y=0}, \quad x \in \Omega^+ \setminus S_{\sqrt{a}}^{1,2}. \quad (4)$$

где $v_{ji} \in W_{2,loc}^1(\Omega^+ \cup \Omega^-)$, $P_1(D_y, \log a) = a_{10}^{(1)} \frac{\partial}{\partial n_y}$, P_m — некоторые полиномы от D_y (D_y — производная по y):

$$P_m(D_y, \log a) = \sum_{q=1}^{m-1} \sum_{i=0}^{[(q-1)/2]} a_{qi}^{(m)} (\log a)^i D_y^{m-q+1}, \quad m \geq 2, \quad (5)$$

$$D_y^{2j+1} = \frac{\partial^{2j+1}}{\partial n_y^{2j+1}}, \quad D_y^{2j} = \frac{\partial^{2j}}{\partial n_y^{2j-1} \partial l_y}, \quad l = \{1, 0\}, \quad n = (0, -1).$$

$G^{\pm}$ — функции Грина для волноводов $\Omega^{\pm}$. Принимая во внимание известное представление для функции Грина лапласиана Дирихле в полосе

$$G^{\pm}((x_1, y_1), (x_2, y_2), k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{d_{\pm} p_{n,\pm}} \sin \frac{n\pi y_1}{d_{\pm}} \sin \frac{n\pi y_2}{d_{\pm}} \exp(-p_{n,\pm} |x_1 - x_2|), \quad (6)$$

$$p_{n,\pm} = \left(\frac{n^2 \pi^2}{d_{\pm}^2} - k^2 \right)^{1/2},$$

получаем следующее представление для ее производных в непосредственной близости от точки π^2/d_-^2 и при $x \rightarrow x^{1,2}$:

$$D_y^j G^{\pm}(x, (x^{1,2}, 0), k) = \frac{1}{d_{\pm}} \sin \frac{\pi x_2}{d_{\pm}} D_y^j \left(\sin \frac{\pi y_2}{d_{\pm}} \right) \Big|_{y_2=0} \left(\frac{\pi^2}{d_{\pm}^2} - k^2 \right)^{-1/2} + \\ + \Phi_j(x, k) \log \frac{r}{a_0} + g_j^{\pm}(x, k) + \sum_{i=0}^{[j/2]} \sum_{t=0}^{j-2i-1} b_{it}^{(j)}(k) r^{-j+2(i+t)} \sin(j-2i)\theta, \quad (7)$$

где (r, θ) — полярные координаты. Члены $b_{it}^{(j)}(k)$, $\Phi_j(x, k)$, $g_j^{\pm}(x, k)$ аналитичны по k в некоторой окрестности точки π/d_- , $\Phi_j \in C^{\infty}(R^2)$ и антисимметрична относительно y_2 , $g_j^{\pm} \in C^{\infty}(\Omega^{\pm})$,

$$b_{00}^j = (-1)^{[(j+1)/2]} (j-1)!/\pi, \quad b_{10}^{(3)} = k^2/(2\pi), \quad \Phi_1(0, k) = -k^2/(2\pi). \quad (8)$$

Краевые задачи для коэффициентов ряда (4) получаются следующим образом. Подставляем ряды (4) и (2) (точнее, не только (2), но и соответствующий ряд для k_a) в уравнение Гельмгольца (для $k = k_a$) с граничным условием Дирихле. Затем

делаем замену переменных: $\xi = x/a$. Коэффициенты при одинаковых степенях a и $\log a$ должны быть равны. Отсюда получаем следующие задачи:

$$\Delta_{\xi} v_{ji} = - \sum_{p=0}^{j-3} \sum_{q=0}^{[p/2]-1} \Lambda_{pq} v_{j-p-2, i-1}, \quad \xi \in R^2 \setminus \gamma, \quad (9)$$

$$v_{ji} = 0, \quad \xi \in \gamma,$$

где γ — плоскость без отверстия (но с включенными концами), Λ_{pq} — коэффициенты ряда

$$k_a^2 = \sum_p \sum_q \Lambda_{pq} a^p (\log a)^q.$$

Пусть $\mathbf{R}^*$ — $\mathbf{R}$ без рассматриваемого отверстия. Функцию v_{ji} можем искать как линейную комбинацию гармонических функций $Y_q(\xi)$ в $\mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{R}^*$, $Y_q|_{\mathbf{R}^*} = 0$, $Y_q \in W_{2, \text{loc}}^1(\mathbf{R}^2)$, при $\rho \rightarrow \infty$ вида

$$Y_q(\xi) = \begin{cases} - \sum_{j=1}^{\infty} c_{qj} \rho^{-j} \sin j\theta, & \xi_2 > 0, \\ \rho^q \sin q\theta + \sum_{j=1}^{\infty} c_{qj} \rho^{-j} \sin j\theta, & \xi_2 < 0. \end{cases}$$

В работе найдены коэффициенты второго и третьего порядка по a .

Литература

1. Exner P., Kovarik H. Quantum Waveguides // Springer, Berlin. 2015.
2. Osipov P.P., Nasyrov R.R. Resonance curve in rectangular closed channel // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. 41. P. 1283-1288.
3. Lax P.D., Phillips R.S. Scattering Theory // Academic Press, New York. 1967.
4. Bonnet-Ben Dhia A.-S., Chesnel L., Pagneux V. Trapped modes and reflectionless modes as eigenfunctions of the same spectral problem // Proceedings of the Royal Society A. 2018. 474. 20180050.
5. Rouleux M. Resonances for a semi-classical Schrödinger operator near a non trapping energy level // Publication of RIMS Kyoto University. 1998. 34. P. 487-523.
6. Khrushchev S.V., Nikol'skii N.K., Pavlov B.S. Unconditional bases of exponentials and of reproducing kernels // Complex Analysis and Spectral Theory. Springer-Verlag, Berlin, New York. 1981. P. 214-335.
7. Frolov S.V., Popov I. Yu. Resonances for laterally coupled quantum waveguides // Journal of Mathematical Physics. 2000. 41. 7. P. 4391-4405.
8. Vorobiev A.M., Bagmutov A.S., Popov A.I. On formal asymptotic expansion of resonance for quantum waveguide with perforated semitransparent barrier // Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. 2019. 10. 4. P. 415-419.
9. Popov I.Y. Extension theory and localization of resonances for domains of trap type // Mathematics of the USSR Sbornik. 1990. 71. 1. P. 209-234.

10. Borisov D., Cardone G., Durante T. Homogenization and norm resolvent convergence for elliptic operators in a strip perforated along a curve // *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Section A: Mathematics*. 2016. 146. 6. P. 1115-1158.
11. Nazarov S.A., Orive-Illera R., Perez-Martinez M.E. Asymptotic structure of the spectrum in a Dirichlet-strip with double periodic perforations // *Networks and Heterogeneous Media*. 2019. 14. 4. P. 733-757.
12. Fassari S., Popov I.Y., Rinaldi F. On the behaviour of the two-dimensional Hamiltonian $-\Delta + \lambda[\delta(x + x_0) + \delta(x - x_0)]$ as the distance between the two centres vanishes // *Physica Scripta*. 2020. 95. 075209.
13. Exner P., Vugalter S. Asymptotic estimates for bound states in quantum waveguides coupled laterally through a narrow window // *Annales de l'Institut Henri Poincaré*. 1996. 65. P. 109-123.
14. Popov I.Yu. Asymptotics of bound states and bands for waveguides coupled through small windows // *Applied Mathematics Letters*. 2001. 14. P. 109-113.
15. Popov I.Yu. Asymptotics of resonances and bound states for laterally coupled curved quantum waveguides // *Physics Letters A*. 2000. 269. P. 148-153.
16. Popov I. Yu., Tesovskaya E.S. Electron in a multilayered magnetic structure: resonance asymptotics // *Theoretical and Mathematical Physics*. 2006. 146. 3. P. 361-372.
17. Gortinskaya L.V., Popov I. Yu., Tesovskaya E.S., Uzdin V.M. Electronic transport in the multilayers with very thin magnetic layers // *Physica E*. 2007. 36. P. 12-16.
18. Trifanova E.S. Resonance phenomena in curved quantum waveguides coupled via windows // *Technical Physics Letters*. 2009. 35. P. 180-182.
19. Trifanova E.S., Bagmutov A.S., Katasonov V.G., Popov I.Y. Asymptotic expansions of resonances for waveguides coupled through converging windows // *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*. 2023. 8. 1. P. 72-82.
20. Il'in A.M. *Matching of Asymptotic Expansions of Solutions of Boundary Value Problems* // American Mathematical Society, Providence. 1992.

MSC 35J05

Asymptotics of resonant states for two-dimensional waveguides connected by converging apertures

T.S. Yurova¹, I.Yu. Popov¹

ITMO University¹

Abstract: Two-dimensional waveguides coupled through small converging windows are considered. The first terms of the asymptotic expansion of resonances for the case of Dirichlet boundary conditions are obtained and investigated. The method of matching asymptotic expansions of solutions of boundary value problems is used.

Keywords: resonance, Green's function asymptotics, coupled waveguides.

УДК 519.63

Исследование эффективности захвата металлических компонентов космического мусора катушкой с электрическим током

Юферева Д.Д.¹, Яковлев А.Б.¹

Санкт-Петербургский государственный университет¹

Аннотация: В работе исследуется вопрос об эффективности предложенной ранее системы уборки космического мусора на основе катушки с электрическим током. Для этого рассматривается задача о движении кольца в неоднородном магнитном поле, создаваемого катушкой с постоянным током в вакууме при их соосном расположении.

Ключевые слова: космический мусор, электромагнитная индукция, сила Ампера, катушка с током.

1. Введение

Использование космического пространства в научных, военных и разнообразных гражданских целях в последние десятилетия становится все более активным. Однако, в результате космической деятельности за время, прошедшее с запуска первого спутника, на околоземных орбитах скопились сотни тысяч объектов искусственного происхождения: нефункционирующих космических аппаратов, ступеней ракет, разгонных блоков, кусков обшивки, частиц, краски, топлива, которые называются космическим мусором (КМ). Поэтому очистка околоземного космического пространства от космического мусора становится все более актуальной задачей. Большие объекты космического мусора, уже находящиеся на орбите, являются потенциальными источниками более мелкого, но не менее опасного космического мусора. Их удаление с орбиты позволит снизить риск неконтролируемого роста космического мусора. Для решения этой задачи необходимо разработать безопасные и эффективные способы сближения с космическим мусором, его захвата и орбитальной транспортировки. В работах [1-4] дан обзор основных способов увода элементов крупномасштабного космического мусора с околоземных орбит. Проблемы моделирования динамики мелкомасштабной компоненты КМ подробно изложены, например, в [5].

Оригинальный метод захвата космического мусора и его транспортировки на орбиты захоронения предложен в [6]. Предлагается использовать большую катушку с электрическим током на космическом корабле-уборщике, которая создает в металлических компонентах КМ силу, способствующую их захвату. В настоящей работе проведен анализ эффективности подобной системы в упрощенной постановке: вместо плоской катушки рассмотрена катушка в виде тора с плотно упакованными проводниками, а в качестве элемента КМ – металлическое кольцо (проволочный виток). Также на первом этапе предполагается, что рассмотрение взаимного перемещения катушки с током и кольца происходит в инерциальной системе отсчета катушки при соосном их расположении.

Так как в рассматриваемой задаче катушка представляется в виде тонкого коль-

ца с плотной намоткой и толщина намотки пренебрежимо мала по сравнению с ее радиусом, она заменяется одиночным кольцом с током, равным сумме токов всех ее витков. Поэтому для дальнейших расчетов рассматривается задача о взаимодействии двух соосных проводящих колец (рис. 1).

Первое кольцо (радиуса R) неподвижно и при пропускании через него постоянного тока I служит источником неоднородного магнитного поля. Второе кольцо (радиуса r) расположено на одной оси с большим и может свободно перемещаться вдоль нее. Ось x проходит через центры обоих колец перпендикулярно их плоскостям. В начальный момент времени малое кольцо удалено на расстояние x_0 от большого и начинает двигаться в его сторону с начальной скоростью v_0 . Движение малого кольца в неоднородном магнитном поле приводит к изменению пронизывающего его магнитного потока, в малом кольце возникает ЭДС индукции, которое приводит к возникновению индукционного тока, который порождает силу Ампера, тормозящую кольцо.

2. Цель

Цель данной работы – исследовать эффективность предложенной системы захвата металлической компоненты космического мусора в упрощенной постановке. В частности, определить диапазоны начальных относительных скоростей, при каких возможен захват.

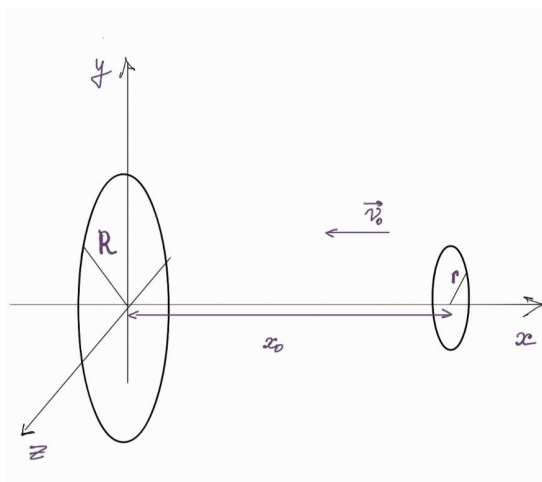


Рис. 1. Расположение двух колец.

3. Используемые методы

Для вычисления ЭДС индукции использовались два численных метода, описанных в [7, 8]. Первый метод основан на расчёте скорости изменения магнитного потока через площадь малого кольца за промежутки времени Δt .

Второй метод использует представление ЭДС как работу сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда вдоль замкнутого контура. Сравнение результатов, полученных обоими методами при одинаковых начальных условиях, показало их практически полное совпадение, что подтверждает корректность вычислений. Второй метод требует значительно меньшего времени для реализации, поэтому он был выбран в качестве основного для построения траекторий движения малого

кольца.

Для вычисления динамики движения кольца был использован второй закон Ньютона, по которому ускорение в каждый момент времени определяется действующей на кольцо силой. В данной задаче этой силой является сила Ампера.

При помощи ЭДС рассчитывался индукционный ток, возникающий в кольце. Далее по найденному току вычислялась сила Ампера, действующая на данное кольцо.

Также рассматривался приближенный метод расчета силы взаимодействия, когда малое кольцо с индуцированным током заменялось точечным магнитным диполем. Когда малое кольцо находится далеко от большого, его размерами можно пренебречь и рассматривать его как точечный магнитный диполь с моментом $\mathbf{p}_m$. В этом случае сила, действующая на элементарный контур, вычисляется как сила, действующая на диполь в неоднородном поле. Однако по мере приближения малого кольца к большому такое приближение теряет точность. Показано, что на расстояниях, значительно превышающих радиус большого кольца, траектории движения малого кольца фактически совпадают с полученными при точном расчете.

4. Результаты расчётов

Расчёты проводились при фиксированных параметрах: удельное сопротивление материала кольца ρ_c , значение которого приведено в работе [9], его плотность ρ , площадь поперечного сечения проводника малого кольца S_2 , число витков большого кольца N , начальное положение малого кольца относительно большого x_0 . Изменялись ток I одного витка большого кольца, отношение радиусов колец $\rho = r/R$, начальная скорость малого кольца v_0 .

Для каждого набора параметров строилась зависимость координаты остановки малого кольца x от его начальной скорости v_0 . На рис. 2-5 приведены полученные в результате расчетов зависимости $x(v_0)$ для $\rho = 1/15$ (рис. 2-3) и $\rho = 1/12$ (рис. 4-5) при различных значениях тока в одном витке большого кольца I .

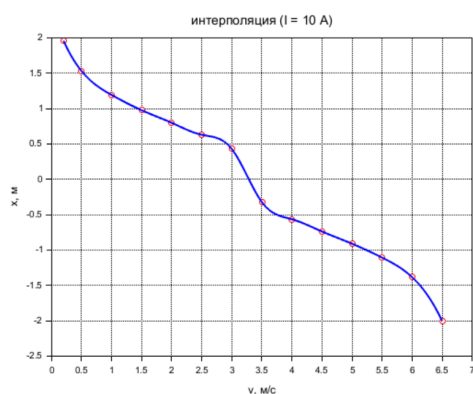


Рис. 2. $\rho = 1/15$, $I = 10$ А в одном витке.

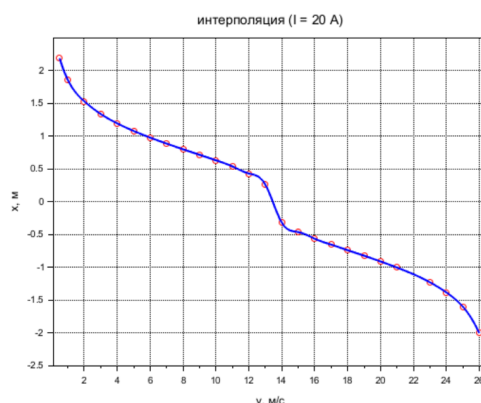


Рис. 3. $\rho = 1/15$, $I = 20$ А в одном витке.

5. Заключение

В ходе численного моделирования установлены диапазоны начальных скоростей, в пределах которых захват малого кольца возможен:

— для $\rho = 1/20$: $v_0 \in (0; 0,9]$ м/с ($I = 5$ А), $(0; 3,6]$ м/с ($I = 10$ А), $(0; 14,5]$ м/с

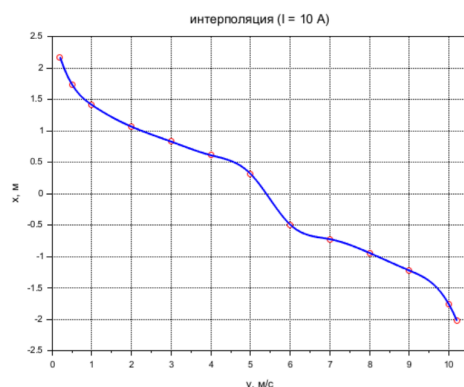


Рис. 4. $\rho = 1/12$, $I = 10$ А в одном витке.

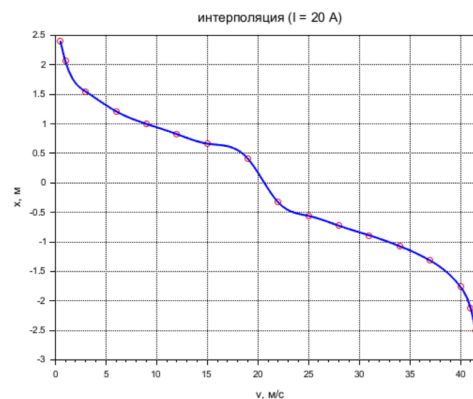


Рис. 5. $\rho = 1/12$, $I = 20$ А в одном витке.

($I = 20$ А);

— для $\rho = 1/15$: $v_0 \in (0; 1,6]$ м/с ($I = 5$ А), $(0; 6,5]$ м/с ($I = 10$ А), $(0; 26]$ м/с ($I = 20$ А), $(0; 59]$ м/с ($I = 30$ А);

— для $\rho = 1/12$: $v_0 \in (0; 2,5]$ м/с ($I = 5$ А), $(0; 10,2]$ м/с ($I = 10$ А), $(0; 41,5]$ м/с ($I = 20$ А).

Анализ зависимостей $x(v_0)$ показал, что с увеличением тока I или с увеличением отношения радиусов ρ диапазон начальных скоростей малого кольца, при которых возможна остановка в окрестности большого, расширяется. Это объясняется тем, что при увеличении тока, он создаёт более сильное магнитное поле, а при увеличении ρ малое кольцо начинает пронизывать больший магнитный поток. В обоих случаях это приводит к возрастанию ЭДС, а вследствие этого и индукционного тока, что ведет к возрастанию силы Ампера, которая стремится остановить малое кольцо.

Также следует отметить, что даже при большом количестве витков катушки и наиболее благоприятном случае соосности колец диапазон скоростей, для которых возможен захват, является достаточно узким.

Список литературы

1. Пикалов Р.С., Юдинцев В.В. Обзор и выбор средств увода крупногабаритного космического мусора // Труды МАИ. Вып. № 100.
2. Shan M., Guo J., Gill E. Review and comparison of active space debris capturing and removal methods // Progress in Aerospace Sciences. 2015. Vol. 80. P. 18-32.
3. Зайцева О.Н., Лукьянчиков А.В., Пичхадзе К.М. Аспекты технической реализации автоматического космического комплекса для захвата и свода с орбиты объектов, прекративших активное существование // Вестник НПО им. С.А. Лавочкина. 2012. Т. 5, № 16. С. 12-18.
4. Палий А.С. Методы и средства увода космических аппаратов с рабочих орбит (состояние проблемы) // Техническая механика. 2012. № 1. С. 94-102.
5. Яковлев А.Б. Математическое моделирование неравновесных процессов на кафедре физической механики СПбГУ. Ч. 3. Моделирование динамики микрочастиц естественного и искусственного происхождения в космической плазме // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2025. Т. 12 (70), Вып. 3. С. 491-515.

6. Patel I.K., Tikhonov A.A. Dynamics and control of an electrodynamic tug: Transfer to the graveyard orbit // Acta Astronautica. 2021. Vol. 183. P. 310-318.
7. Иродов И.Е. Электромагнетизм. Основные законы. 9-е изд. 2014.
8. Джанколи Д. Физика: В 2-х т. Т. 2. Москва: Мир, 1989.
9. Десай П.Д., Джеймс Х.М., Хо С.Я. Electrical Resistivity of Aluminum and Manganese // Journal of Physical and Chemical Reference Data. 1984.

MSC 78A25

Study on the efficiency of capturing metallic components of space debris using a current-carrying coil

D.D. Yufereva¹, A.B. Yakovlev¹
St. Petersburg State University¹

Abstract: This work investigates the efficiency of a previously proposed space debris removal system based on a current-carrying coil. The study considers the problem of the motion of a ring in a nonuniform magnetic field generated by a direct-current coil in vacuum, assuming their coaxial arrangement.

Keywords: space debris, electromagnetic induction, Ampere force, current-carrying coil.

MSC 41A15

About global and local orthogonal splines

V.L. Leontiev¹

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

Аннотация: The procedures of orthogonalization of splines generating global or local orthogonal splines are considered. It is noted that many existing orthogonalization procedures for the formation of local orthogonal splines make it possible to minimize sizes growth of splines compact supports, but initial sizes of compact supports increases during orthogonalization. The importance of Leontiev theory of splines, based on obtaining local orthogonal splines using the orthogonalization procedure that preserves sizes of compact supports of splines, is emphasized.

Ключевые слова: basis of Hilbert space, Haar functions, Faber functions, Franklin functions, Schoenberg splines, global or local orthogonal splines, orthogonalization procedure preserving compact supports of functions, Gram-Schmidt orthogonalization procedure.

1. Comparison of different global and local orthogonal splines

The Haar system of functions [1], which appeared in 1910, makes it possible to approximate functions in the space of continuous functions. This system is not a basis of a given space, but is historically the first basis of the Hilbert space of quadratically summable functions. On the grid that appears at each current step of the halving the corresponding part of the system of Haar functions is equivalent to a system of step functions. Such a finite set of Haar functions and a grid system of step functions are associated with B-splines of degree zero, which are local and orthogonal, but have discontinuities of the first kind. Integrating the Haar functions led in 1910 to the Faber system of functions [2], which is historically the first basis of the space of continuous functions. On each particular grid, Faber functions are associated with first degree B-splines, which are continuous local splines but not orthogonal. The application of the Gram-Schmidt orthogonalization procedure to the Faber system of functions gave rise in 1928 to the basis system of Franklin functions [3], which are global orthogonal continuous splines that lost their compact supports during the transition from Faber functions. The theory of splines begins with the article [4], in which cubic Schoenberg splines were constructed, which are local and continuous, but not orthogonal.

The Gram-Schmidt orthogonalization procedure for systems of compactly supported functions leads to an increase in the sizes of compact supports of functions. The compactness of the supports of the resulting functions and their orthogonality are incompatible in the case of this procedure. A single volume 5 of the journal Numerical Algorithms with numbers 1-4 was published in November 1993 and contains the article [5] in which global piecewise linear continuous splines obtained on the basis of B-splines using a simplified Gram-Schmidt orthogonalization procedure were proposed. The article [6] applies global splines [5] and notes that they are constructed using the Gram-Schmidt orthogonalization procedure. In the case of B-splines of the first degree (Faber functions), the orthogonalization procedure used in the article [5] is a special case of the general Gram-Schmidt procedure used to construct the orthogonal Franklin basis [3], and therefore does not

seem to possess fundamental scientific novelty. In [5], orthogonal global piecewise linear splines are considered, just as in the case of the Franklin function system, but unlike [3] they are connected to only one grid. The expansion of domains of the compact supports at each step of applying the simplified orthogonalization formula [5] is noted in the article [5] and it is recognized that global splines are proposed in this article. The article [5] proposes a procedure for forming a system of global splines based on local B-splines of the first degree, in which only neighboring splines on a given grid are orthogonal. The article [5] also provides the algorithm for forming a system of global piecewise cubic splines in which only neighboring splines are orthogonal on a given grid. Therefore, all the comments presented above regarding piecewise linear splines [5] also apply to piecewise cubic splines [5].

In May 1993 [7], a generalization of first degree B-splines (Courant functions) was given for the first time without changing their compact supports, leading to orthogonal local continuous piecewise linear B-splines. In January 1994, such a generalization of B-splines was presented in more details [8]. The list of references in the monograph [9] contains information about articles in which, in subsequent years, the idea of forming generalized local continuous orthogonal splines using the orthogonalization procedure [7,8] preserving the compact supports of the original functions, was developed and justified. The orthogonalization algorithm [7,8,9] applied to cubic Schoenberg splines, while preserving their compact supports and using auxiliary step functions, is described in article [10], and in article [11] it is developed using four auxiliary cubic Schoenberg splines.

In 1988, the orthogonal basis of Daubechies wavelets with compact supports was created, but such wavelets are constructed approximately using an iterative procedure, have low smoothness, are not expressed in analytical form, and do not possess symmetry properties, as noted in [9]. The article [12] suggests a procedure for constructing orthogonal scaling functions with compact supports. Examples of such scaling functions and their corresponding wavelets are given [12]. The procedure [12] is similar to the Daubechies procedure and generates orthogonal wavelets with compact supports having low smoothness. The article [13] discusses the symmetric Gram-Schmidt procedure with a limitation, when applied, of the growth in the sizes of compact supports inherent in the general Gram-Schmidt procedure. The work [14] is devoted to algorithms for constructing orthogonal splines while minimizing the sizes of their compact supports, that is, splines approaching local splines in their properties, using various procedures, in particular, using the Gram-Schmidt procedure. At the same time, the articles [12–14] do not take into account the fact that the theory of orthogonal local continuous splines was built on the basis of another orthogonalization procedure that preserves compact supports of functions and does not require minimizing their sizes during orthogonalization, starting in 1993 [7, 8]. This theory is presented in the monograph [9] and it continues to evolve. In the following years after 1993, many new results were obtained within the framework of this theory, for example, [10, 11]. The works [5–14] show that scientific directions related to the creation of grid bases consisting of global or local orthogonal splines and their applications in computational mathematics are relevant.

References

1. Haar A. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme // Math. Ann. 1910. Vol. 69. No. 3. P. 331-371.
2. Faber G. Über die Orthogonalfunktionen des Herrn Haar // Jahresbericht der

- Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 1910. Vol. 19. P. 104-112.
3. Franklin P. A set of continuous orthogonal functions // Math. Ann. 1928. Vol. 100. No. 1. P. 522-529.
 4. Schoenberg I.J. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions // Quart. Appl. Math. 1946. No. 4. P. 45-99, 112-141.
 5. Mason J.C., Rodriguez G., Seatzu S. Orthogonal splines based on B-splines - with applications to least squares, smoothing and regularization problems // Numerical Algorithms. 1993. Vol. 5. P. 25-40.
 6. Alavi J., Aminikhah H. A Numerical Algorithm Based on Modified Orthogonal Linear Spline for Solving a Coupled Nonlinear Inverse Reaction-Diffusion Problem // Filomat. 2021. Vol. 35. No. 1. P. 79-104.
 7. Leontiev V.L. Metody konechnykh elementov, osnovannyye na ispolzovanii obobshchennykh funktsiy Curanta v teorii uprugih kolebaniy // Tezisy dokladov Vserossiyskogo nauchnogo seminara "Problemy dinamiki i prochnosti elektro- i energomashin 18-20.05.1993. SPb: Izdatelstvo Instituta mashinovedeniya RAN, 1993. P. 21-22. (in Russian)
 8. Leontiev V.L. Ob odnom obobshchenii funktsiy Curanta // Teoriya funktsiy i priblizheniy. Trudy 7-y Saratovskoy Zimney shkoly, 30.01-4.02.1994 (pamyati professora A.A. Privalova). Mezhevuz. sbornik nauchnykh trudov, chast 3, Saratov: Izdatelstvo Saratov. univ., 1995. P. 36-40. (in Russian)
 9. Leontiev V.L. Ortogonalnye finitnye funktsii i chislennyye metody. Ulyanovsk: UIGU, 2003. (in Russian)
 10. Leontiev V.L. On orthogonalization of Schoenberg splines // Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva. 2025. Vol. 27. No. 2. P. 1-16. (in Russian)
 11. Leontiev V.L. On orthogonal cubic Schoenberg splines // Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva. 2025. Vol. 27. No. 4. P. 411-421. (in Russian)
 12. Yang S., Huang H. A novel method of constructing compactly supported orthogonal scaling functions from splines // Journal of Inequalities and Applications. 2017. Vol. 155. P. 1-13.
 13. Liu X., Nassar H., Podgorski K. Dyadic diagonalization of positive definite band matrices and efficient B-spline orthogonalization // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2022. Vol. 414. No. 114444. P. 42-47.
 14. Burkotova J., Pavlu I., Nassar H., Machalov J., Hron K. Efficient spline orthogonal basis for representation of density functions // arXiv:2405.02231v1 [stat.ME]. May 2024. 3. P. 1-32.

Научное электронное издание

**Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ**

**СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ
XII ВСЕРОССИЙСКОЙ НАУЧНОЙ
МОЛОДЕЖНОЙ ШКОЛЫ-СЕМИНАРА
имени Е.В. Воскресенского**

Саранск
21 — 24 июля 2026 г.

Редакторы: Пескова Е.Е., Язовцева О.С.

Формат 60×84 1/16

Усл. печ. л. 15.23

Подписано в печать 21.07.2026

Средне-Волжское математическое общество
Национальный исследовательский
Мордовский государственный университет
430005, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевистская, 68

