

УДК 517.54

Инварианты однородных динамических систем произвольного нечетного порядка с диссипацией

Шамолин М.В.

МГУ имени М. В. Ломоносова

Аннотация: Представлены новые случаи интегрируемых однородных по части переменных динамических систем произвольного нечетного порядка, в которых может быть выделена система на касательном расслоении к четномерному многообразию. При этом силовое поле (генератор сдвига в системе) разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает диссипацией разного знака. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает ранее рассмотренные поля. Приведены полные наборы как первых интегралов, так и инвариантных дифференциальных форм.

Ключевые слова: инвариант динамической системы, существенно особые точки инварианта, система с диссипацией, интегрируемость.

Как известно, нахождение достаточного количества тензорных инвариантов (не только автономных первых интегралов) [1–3] облегчает исследование, а иногда позволяет точно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Так, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных систем этот факт естествен, когда фазовый поток сохраняет объем с гладкой (или постоянной) плотностью. Сложнее (в смысле гладкости инвариантов) дело обстоит для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Для них коэффициенты искомых инвариантов должны, вообще говоря, включать функции, обладающие существенно особыми точками (см. также [4–6]). Наш подход в том, что для точного интегрирования автономной системы порядка m надо знать $m - 1$ независимый нетривиальный тензорный инвариант. При этом для достижения точной интегрируемости приходится соблюдать также ряд дополнительных условий.

Ранее [5, 7] важные случаи интегрируемых систем с конечным числом степеней свободы в неконсервативном поле сил уже рассматривались автором. При этом упор делался на нахождение достаточного количества именно первых интегралов. Но, как известно, иногда полного набора первых интегралов для систем может и не быть, зато достаточное количество инвариантных форм может быть обеспечено.

Понятия «консервативность», «силовое поле», «диссипация» и др. для систем классической механики вполне естественны. Поскольку в работе изучаются системы на касательном расслоении к гладкому многообразию (пространству положений), уточним данные понятия для таких систем.

Исследование «в целом» начинается с изучения приведенных уравнений геодезических, левые части которых при правильной параметризации представляют собой ускорение движения материальной частицы, а правые части приравнены к нулю. Соответственно, величины, которые ставятся в дальнейшем в правую часть, рассматриваются как обобщенные силы. Такой подход традиционен для классической механики, а теперь он естественно распространяется на более общий случай касательного расслоения к гладкому многообразию. Последнее позволяет, в некотором смысле, конструировать «силовые поля». Так, например, введя в систему коэффи-

циенты, линейные по одной из координат касательного пространства (по одной из квазискоростей системы), получим силовое поле (генератор сдвига) с диссипацией разного знака.

Словосочетание «диссипация разного знака» несколько противоречиво, тем не менее, будем его употреблять. Учитывая при этом, что в математической физике диссипация «со знаком «плюс» – это рассеяние полной энергии в обычном смысле, а диссипация «со знаком «минус» – это своеобразная «подкачка» энергии (при этом в механике силы, обеспечивающие рассеяние энергии называются диссипативными, а силы, обеспечивающие подкачку энергии называются разгоняющими).

Консервативность для систем можно понимать в традиционном смысле, но мы добавим к этому следующее. Будем говорить, что система консервативна, если она обладает полным набором гладких первых интегралов, что говорит о том, что она не обладает притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Если же она последними обладает, то будем говорить, что система обладает диссипацией какого-то знака. Как следствие этого – обладание системы хотя бы одним первым интегралом (если они вообще есть) с существенно особыми точками.

В предлагаемой работе силовое поле (генератор сдвига системы) разделяется на так называемые внутреннее и внешнее. Внутреннее поле характерно тем, что оно не меняет консервативности системы. А внешнее может вносить в систему диссипацию разного знака. Заметим также, что вид внутренних силовых полей заимствован из классической динамики твердого тела.

В данной работе приведены первые интегралы, а также инвариантные дифференциальные формы классов однородных по части переменных динамических систем произвольного нечетного порядка, в которых может быть выделена система с конечным числом степеней свободы на своем четномерном многообразии. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает диссипацией переменного знака. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает силовые поля, рассматриваемые ранее.

Литература

1. Poincaré H. Calcul des probabilités. Paris: Gauthier-Villars, 1912. 340 p.
2. Колмогоров А. Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Доклады АН СССР. 1953. Т. 93, № 5. С. 763-766.
3. Козлов В. В. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // Успехи математических наук. 2019. Т. 74, № 1(445). С. 117-148.
4. Шамолин М. В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи математических наук. 1998. Т. 53, № 3. С. 209-210.
5. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования // Доклады РАН. 2015. Т. 464, № 6. С. 688-692.
6. Шамолин М. В. Инварианты однородных динамических систем седьмого порядка с диссипацией // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2024. Т. 516, № 1. С. 65-74.
7. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле // Доклады РАН. 2015. Т. 461, № 5. С. 533-536.

MSC 37J35

Invariants of homogeneous dynamical systems of arbitrary odd order with dissipation

M.V. Shamolin

Lomonosov Moscow State University

Abstract: New cases of integrable dynamical systems homogeneous in terms of variables of arbitrary odd order are presented, in which a system on a tangent bundle to an even-dimensional manifold can be distinguished. In this case, the force field (the shear generator in the system) is divided into an internal (conservative) and an external one, which has a dissipation of different signs. The external field is introduced using some unimodular transformation and generalizes the previously considered fields. Complete sets of both the first integrals and invariant differential forms are given.

Keywords: invariant of a dynamical system, essential singular points of invariant, system with dissipation, integrability

References

1. Poincaré H. Calcul des probabilités [Probability calculus]. Paris: Gauthier-Villars, 1912. 340 p. (in French)
2. Kolmogorov A. N. O dinamicheskikh sistemakh s integral'nym invariantom na tore [On dynamical systems with an integral invariant on the torus] // Doklady AN SSSR [Proceedings of the USSR Academy of Sciences]. 1953. Vol. 93, No. 5. P. 763-766. (in Russian)
3. Kozlov V. V. Tenzornye invarianty i integrirovanie differentsial'nykh uravnenii [Tensor invariants and integration of differential equations] // Uspekhi matematicheskikh nauk [Russian Mathematical Surveys]. 2019. Vol. 74, No. 1(445). P. 117-148. (in Russian)
4. Shamolin M. V. Ob integriruemosti v transtsendentnykh funktsiyakh [On integrability in transcendental functions] // Uspekhi matematicheskikh nauk [Russian Mathematical Surveys]. 1998. Vol. 53, No. 3. P. 209-210. (in Russian)
5. Shamolin M. V. Polnyy spisok pervykh integralov uravneniy dvizheniya mnogomernogo tverdogo tela v nekonservativnom pole pri nalichii lineynogo dempfirovaniya [Complete list of first integrals of equations of motion of a multidimensional rigid body in a non-conservative field with linear damping] // Doklady RAN [Doklady Mathematics]. 2015. Vol. 464, No. 6. P. 688-692. (in Russian)
6. Shamolin M. V. Invarianty odnorodnykh dinamicheskikh sistem sed'mogo poryadka s dissipatsiey [Invariants of homogeneous dynamical systems of seventh order with dissipation] // Doklady RAN. Matematika, informatika, protsessy upravleniya [Doklady Mathematics]. 2024. Vol. 516, No. 1. P. 65-74. (in Russian)
7. Shamolin M. V. Polnyy spisok pervykh integralov dinamicheskikh uravneniy dvizheniya mnogomernogo tverdogo tela v nekonservativnom pole [Complete list of first integrals of dynamical equations of motion of a multidimensional rigid body in a

non-conservative field] // Doklady RAN [Doklady Mathematics]. 2015. Vol. 461, No. 5. P. 533-536. (in Russian)