

УДК 537.9

Метод малого параметра в задачах моделирования динамики нелинейных электромагнитных волн в 2D сверхструктурах

Федулов И.Н.¹, Глазов С.Ю.²

ФГБОУ ВО «Югорский государственный университет»¹,
ФГБОУ ВО «Волгоградский государственный социально-педагогический университет»²

Аннотация: Развита метод решения системы двумерных нелинейных волновых уравнений, описывающих распространение электромагнитных волн в графеновых сверхструктурах, на основании разложения искоемых функций (ортогональных компонент векторного потенциала) в ряд по малому параметру, характеризующему их взаимодействие. Это позволяет свести исходную систему к линеаризованным уравнениям и сравнительно легко получить приближенное аналитическое решение.

Ключевые слова: метод малого параметра, нелинейные волны, сверхструктуры, сверхрешетки на основе графена, графеновые сверхрешетки, низкоразмерные системы.

1. Введение

В последнее время в связи с открытием новых материалов становятся актуальными задачи, связанные с исследованиями в области физики низкоразмерных (одно- и двумерных) систем, важным примером которых являются графеновые сверхрешетки (ГСР). Одной из таких задач является изучение распространения электромагнитной волны вдоль поверхности двумерной (2D) ГСР, образованной листом графена на плоской подложке типа «шахматное поле» из чередующихся квадратных областей оксида и карбида кремния. В процессе ее решения возникает система взаимосвязанных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая изменение ортогональных компонент векторного потенциала *удвоенной* электромагнитной волны (УЭВ) [1]. Несмотря на возможность численного решения, представляет интерес аналитическое решение данной системы уравнений, позволяющее выявить характер взаимодействия компонент векторного потенциала УЭВ. В настоящей работе предлагается применить для этой цели метод малого параметра, разлагая решение системы в ряд по степеням параметра, характеризующего так называемую «неаддитивность энергетического спектра» ГСР, проявляющуюся во взаимодействии взаимно ортогональных компонент векторного потенциала УЭВ. Как будет показано далее, предлагаемый метод позволяет «линеаризовать» исходную систему, сведя ее к хорошо известным нелинейным уравнениям Sine-Gordon и последовательности линейных уравнений, которые могут быть решены стандартными методами.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \sin \phi_x (1 + \beta \cos \phi_y) = 0 \\ \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + \sin \phi_y (1 + \beta \cos \phi_x) = 0 \end{cases}$$

Компоненты векторного потенциала ϕ_x и ϕ_y можно разложить в ряды по малому параметру β :

$$\phi_x = \phi_x^{(0)} + \beta \phi_x^{(1)} + \beta^2 \phi_x^{(2)} + \dots \quad (1)$$

$$\phi_y = \phi_y^{(0)} + \beta \phi_y^{(1)} + \beta^2 \phi_y^{(2)} + \dots \quad (2)$$

где верхний символ в круглых скобках обозначает порядок разложения. Подставляя указанные выражения в систему (1) и ограничиваясь вторым порядком по β , а также заменяя синусы и косинусы на их приближенные выражения, получим в нулевом порядке двумерные уравнения Sine-Gordon, а в первом и втором порядке – две пары одинаковых по структуре линейных неоднородных дифференциальных уравнений в частных производных, различающихся только видом неоднородностей в своих правых частях. Решение каждого последующего уравнения явным образом зависит от решений уравнений, соответствующих предыдущим приближениям.

3. Результаты и выводы

Не останавливаясь на решении хорошо изученного уравнения Sine-Gordon, заметим, что для целей изучения распространения УЭВ в ГСР может быть взято любое его решение, однако сложные многосолитонные и бризерные решения могут затруднить поиск последующих приближений. Поэтому в данной связи большую роль играет простейшее решение, соответствующим одиночному кинку [2]. Нахождение первой и второй поправок сводится к решению неоднородной задачи Коши [3], явно зависящей от выбранного решения уравнения Sine-Gordon.

В одном из простейших частных случаев, когда УЭВ направлена под углом $\theta = \frac{\pi}{4}$ по направлению к осям ГСР, в качестве решения нулевого приближения можно выбрать одинаковые решения для ϕ_x и ϕ_y . В этом случае решение однородной задачи Коши представимо в виде «бегущей волны» и уравнения для поправок сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям, методы решения которых хорошо известны [4]. Данный случай интересен тем, что для него известно точное решение [1], с которым можно сравнить результат, полученный нами. Еще один аспект, представляющий интерес в связи с данным случаем – существование локализованного решения у однородного уравнения, лежащего в основе нахождения поправок к «невозмущенному» решению уравнения Sine-Gordon.

Литература

1. Glazov S., Syrodoev G. Numerical modeling of nonlinear wave processes // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1740. Art. 012062.
2. Аэро Э. Л., Булыгин А. Н., Павлов Ю. В. Нелинейные задачи механики деформируемого твердого тела // Теоретическая и математическая физика. 2009. Т. 158, № 3. С. 370-377.

3. Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
4. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 2001. 576 с.

MSC 35L70

Small parameter method in problems of modeling the dynamics of nonlinear electromagnetic waves in 2D superstructures

I.N. Fedulov¹, S.Yu. Glazov²

Yugra State University¹, Volgograd State Social-Pedagogical University²

Abstract: A method has been developed for solving a system of two-dimensional nonlinear wave equations describing the propagation of electromagnetic waves in graphene superstructures, based on the expansion of the desired functions (orthogonal components of the vector potential) in a series in terms of a small parameter characterizing their interaction. This allows us to reduce the original system to linearized equations and to obtain an approximate analytical solution relatively easily.

Keywords: small parameter method, nonlinear waves, superstructures, graphene-based superlattices, graphene superlattices, low-dimensional systems.

References

1. Glazov S., Syrodoev G. Numerical modeling of nonlinear wave processes // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1740. P. 012062.
2. Aero E. L., Bulygin A. N., Pavlov Yu. V. Nelineinye zadachi mekhaniki deformiruemogo tverdogo tela [Nonlinear problems in mechanics of deformable solids] // Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika [Theoretical and Mathematical Physics]. 2009. Vol. 158, no. 3. P. 370-377. (in Russian)
3. Polyanin A. D. Spravochnik po lineynym uravneniyam matematicheskoy fiziki [Handbook of linear equations of mathematical physics]. Moscow: Fizmatlit, 2001. 576 p. (in Russian)
4. Zaitsev V. F., Polyanin A. D. Spravochnik po obyknovennym differentsialnym uravneniyam [Handbook of ordinary differential equations]. Moscow: Fizmatlit, 2001. 576 p. (in Russian)